



Zadania 2. kola zimnej časti

Termín odoslania 4. november 2024

V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na kms@kms.sk.

2.1 Kóši Mučí Skalpelom ($\kappa \leq 0$)

kategória **alfa**

Doktor Kóši mal čoraz častejšie problém sústrediť sa na svoju prácu. Dôvodom bol In Te, kráľov vezír, ktorý sa pozýval k nemu do laboratória.

„Potrebujem už len pár dní a všetko bude pripravené.“

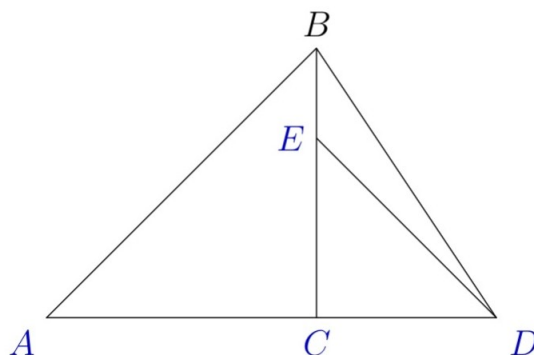
„Nemáš pár dní? Kráľ očakáva svoju novú armádu...“

„Je to nematematické, spraviť z vazalov poddajných otrokov...“

„Ty sa nezaoberaj tým, čo matematické je a čo nie. To nie je Tvoja práca. Keď sa Ti úloha nepozdáva, zavolaj si na pomoc pána Švarca.“

Pri tomto mene doktora zamrazilo. Ako mohol vezír vedieť o jeho alteregu? In Te odišiel a nechal Kóšiho osamote. Ten upriamil pozornosť späť na svoju prácu.

Doktor Kóši pozrel na svoj skalpel a zarezal ním do Trojuholníka ADB . Trojuholník ADB mal tuhý koreň. Jeho strana AD bola dlhá 12 cm. Avšak ani to trojuholníku nepomohlo. Kóši ním viedol dva rezy ako na obrázku, čím ho rozdelil na trojicu Trojuholníkov. Trojuholníky ACB a ECD boli pravouhlé, rovnostranné a obsah Trojuholníka EDB bol 9 cm^2 . Aký bol obsah trojuholníka ABD ?



2.2 Kreslíme Množiny Skvostné ($\kappa \leq 0$)

kategória **alfa**

Grafik Peter Senov bol medzitým na svojej pravidelnej návšteve u kolegu z Geometrie. Aj keď krajina sa pod vládou Al-Gebry zmenila, na rozhovore dvoch umelcov to nebolo badať. Petrov priateľ Feuer Sebastian mal ako vždy veľmi podnetné otázky.

„Pozri, Peter, je všeobecne známe, že keď máš v rovine rozsypanú množinu čísel $\{1, 2, \dots, 30\}$, tak jej podmnožina je *pekná*, ak sa v nej nenachádza žiadne číslo zároveň s jeho trojnásobkom. V čom je však ozajstné umenie, je vedieť nájsť najväčšiu *peknú* podmnožinu. Koľko najviac prvkov môže mať *pekná* podmnožina? Koľko rôznych *pekných* podmnožín s týmto počtom prvkov existuje?“

2.3 Kvóty Musíme Splniť ($\kappa \leq 1$)

kategórie **alfa** a **beta**

Petrovi pripadal jeho priateľ mimoriadne ustaraný, a tak mu nedalo, aby sa nespýtal aj na jeho rodinu. Feuer Sebastian si povzdychol a odpovedal:

„Vieš, my Bachovci sme boli vcelku známy rod, a tak sa nás nové opatrenia dotkli o to viac. Moje deti boli pridelené do továrne na epsilony, ja celé dni driem na nekonečnom poli. Skoro sa ani nevidáme, domov nás nepustia, kým nesplníme kvóty.

No a tie kvóty sú strašné, každý deň musia moje deti vyprodukovať aspoň $n = p^r q^s$ epsilonov, kde p, q sú navzájom rôzne prvočísla a r, s sú nezáporné celé čísla. Vieš si predstaviť, koľko potom existuje deliteľov čísla n^2 neprevyšujúcich n a zároveň nedeliacich n ? Ja nie, ale rád by som to vedel.“ Zistite to pre Sebastiana.

2.4 Kružnice Mužstvo Skonvertujú ($\kappa \leq 2$)

kategórie **alfa** a **beta**

Kým sa Peter Senov vracal znepokojený domov, aby zvestoval novinky o dianí v krajine Geometrie, v Al-Gebre čakal kráľ Kardáno Abel Gauss Horner na predvedenie novej armády. Ukážky sa ujal In Te, ktorý od doktora Kósiho odporoval používanie novej zbrane – kružnicovej inverzie. Tá umožňovala pomocou jednoduchého zariadenia zinvertovať ľubovoľného obyvateľa Geometrie, čím držiteľ zariadenia získal úplnú moc nad svojím cieľom.

Testované zariadenie vyzeralo ako kružnica k so stredom v bode A , cez ktorý prechádzala kružnica l so stredom Y . Priesečníky týchto kružníc boli označené ako B a \check{C} , pričom platilo, že bod Y ležal na úsečke $B\check{C}$. Na polpriamke opačnej k AY bol určený zlovestný bod X taký, že $|AX| = 2|AY|$.

1. Dokážte, že bod X ležal vonku z kružnice k .
2. Z bodu X vychádzali dotyčnice ku kružnici k . Body dotyku boli označené D, T , pričom T sa nachádzalo v rovnakej polrovine danej priamkou AY ako bod B . Nakoniec dokážte, že $\check{C}BTD$ je štvorec.

2.5 Krátke Medzinárodné Stretnutie ($\kappa \leq 6$)

kategórie **alfa** a **beta**

Kombistanci boli šokovaní a znechutení rozprávaním Petra Senova. Rozhodli sa teda vyslať delegáciu za kráľom Kardánom Abelom Gaussom Hornerom, aby mu zvestovala ich obavy. V trónnej sále Al-Gebry však čakalo ďalšie nepríjemné prekvapenie. Počas rozprávania delegácie si kráľ niečo šepkal so svojim vezírom. Nakoniec rozprávanie ukončil nesúvisiacou otázkou.

„Existujú také reálne čísla x, y, z , že

$$\frac{1}{(x-y)(x+y)} + \frac{1}{(y-z)(y+z)} + \frac{1}{(z-x)(z+x)} = 0?''$$

2.6 Kombistanci Mapujú Situáciu

kategórie **alfa** a **beta**

Delegácia Kombistanu sa vrátila domov zaskočená. Veď nemala byť Al-Gebra hlasom múdrosti? Mali sa zachovať ako hrdinovia, nie páchať takéto ohavnosti. V Kombistane sa zhodli, že je nutné zakročiť. Než však čokoľvek vykonajú, musia zhromaždiť dôkazy, aby sa vyhli unáhleným rozhodnutiam a predišli ďalšiemu medzinárodnému konfliktu.

Kombistanci mali mapu bývalej Krajiny Geometrie. Tá vyzerala ako štvorčeková sieť $n \times n$, pričom v prvom riadku chýbali dve prostredné políčka. Zvyšok štvorčekovej siete chceli pokryť fotkami, ktoré by odhaľovali, čo sa na danom území deje. Fotku si vieme predstaviť ako domino 2×1 , resp. 1×2 štvorčeky. Koľko z týchto domín môže byť obrátených vodorovne? Nájdite všetky možnosti pre

1. $n = 6$,
2. $n = 2024$.

2.7 Kord Mita Skladá

kategórie **alfa** a **beta**

Toho večera v tmavom kúte hradu v hlavnom meste Al-Gebry sa chystala Mita Li na ďalšiu tajnú prácičku. Kvôli kontrolám po ceste si nemohla zobrať zbraň vcelku, no Mita bola skúsená a vedela, ako si zbraň zmontovať. Ak všetko klapne, Al-Gebra bude ráno potrebovať nového vládcu.

Ako rukoväť Mitinej zbrane slúži číslo r a ostrie má tvar čísla o . Mita si samozrejme nezabudla svoj skrutkovač a kladivko. Pomocou skrutkovača dokáže z dvoch kladných celých čísel a a b zhotoviť dvojicu čísel \overline{ab} , \overline{ba} , ktorou nahradí pôvodnú dvojicu čísel. Keď na čísla a, b použije kladivko, tak ich zmení na čísla $a + b$ a $|a - b|$.

Mita vie, že kráľ Horner disponuje štítom, cez ktorý preniknú iba zbrane, ktorých rúčka r aj ostrie o sú deliteľné číslom 9. Určte všetky dvojice kladných celých čísel (x, y) , z ktorých dokáže Mita zmajstrovat' takúto zbraň.

Poznámka: Značením \overline{ab} rozumieme celé číslo zložené z cifier kladného celého a , za ktorými sú napísané cifry kladného celého čísla b .

2.8 Kontrolujeme Miesto Smrti

kategórie **alfa** a **beta**

Kráľ zomrel. S tým by sa obyvatelia Al-Gebry dokázali vysporiadať, avšak Kardáno Abel Gauss Horner bol zavraždený. To ľudí mimoriadne pobúrilo. Hneď, ako sa to dozvedel vezír In Te, povolal vyšetrovací tím. Ten sa s najmodernejším vybavením pustil do práce. Vyšetrovatelia zbierali vzorky, zaznamenávali dôkazy, analyzovali stopy a hlavne prezerali miesto činu.

Miesto činu vyzeralo ako rôznostranný ostrouhlý trojuholník ABC . **Opísanú** kružnicu trojuholníka označme k . Kráľ ležal v strede K jeho **vpísanej** kružnice. Body D, E, F sú body dotyku vpísanej kružnice postupne so stranami BC, AC, AB . Ďalej označme postupne P, Q priesečníky k s priamkami BK, CK , a priesečník priamok PE a QF ako L . Dokážte, že stred kružnice k leží na priamke KL .

2.9 Kráľ Menežuje Spravodlivosť

kategória **beta**

Korunováciu vezíra zakončili slávnostné zvolania:

„Nech žije kráľ In Te! Kráľ In Te! Kráľ In Te!“

Nový vládca Al-Gebry sa chystal na príhovor, keď do siene vpadli vyšetrovatelia, aby oznámili novinky. Počúvali ich všetci dvorania aj zástupcovia okolitých krajín. Hlavný vyšetrovateľ povedal:

„Po dosadení všetkých neznámych sme došli k záveru, že vlajka Kombistanu, na ktorej bol kráľ Kardáno Abel Gauss Horner napichnutý, značí jediné. Vraždu si objednal práve Kombistan.“

Všetci boli zhrození, len In Te zachoval chladnú hlavu. Zavolať si zástupcov Teórie Čísel a Matematickej Ludovo-demokratickej Analýzy a požiadal ich krajiny o pomoc pri odвете za tento hrozný čin. Delegát Teórie Čísel okamžite bežal k telefónu, aby získal informácie z domova.

„Haló, existujú ešte nejaké jednotky, ktoré by sme mohli vyslať na pomoc našim hrdinom z Al-Gebry?“

„Čakajte na linke, čoskoro to zistíme.“

Nájdite všetky kladné celé čísla n , pre ktoré existuje n navzájom rôznych prirodzených čísel takých, že najväčší spoločný deliteľ každých dvoch z nich je rovný absolútnej hodnote ich rozdielu.

2.10 Koordinujeme Množstvo Svalnáčov

kategória **beta**

A tak Al-Gebra, Teória Čísel a Matematická Ludovo-demokratická Analýza vyhlásili vojnu Kombistanu. Vojnu bolo treba nutne vyhrať, preto sa kráľ In Te rozhodol využiť aj vojakov z Geometrie. Aj keď ich bude sám ovládať, treba pre nich ešte nájsť tie správne funkcie.

Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ také, že pre každú dvojicu kladných reálnych čísel x, y platí

$$f(x) = f(x + y) + f(x + x^2 f(y)).$$