



Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci!

Dostávate do rúk úvodný leták letnej časti 46. ročníka Korešpondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškóľakov jedinečnou príležitosťou na zdokonalenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústreďení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO).

Mladším a začínajúcim študentom je určená kategória ALFA, pre starších a skúsenejších je kategória BETA. Každý môže, samozrejme, v rámci svojich možností, riešiť obidve kategórie. Podrobnejšie informácie o jednotlivých kategóriách nájdete v pravidlách. Pre tých, ktorí majú vyššie ambície a chcú by uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je určený seminár iKS (Medzinárodný korešpondenčný seminár), ktorý organizujú vedúci KMS v spolupráci s českými kolegami z Matematického korešpondenčného seminára. Tento seminár má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Bližšie informácie o ňom nájdete na stránke www.iksco.org.

Ak máte akékoľvek otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adrese kms@kms.sk, prípadne ich pošlite písomne na adresu uvedenú pod zadaniami.

Veľa úspechov a radosti z riešenia vám želajú

vaši organizátori

Pravidlá

Všeobecné informácie o korešpondenčnom matematickom seminári

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí — zimnej a letnej. Každá z nich prebieha v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústreďenie. Každá časť pozostáva z troch kôl úloh. Zadania jednotlivých kôl nájdete na stránke <https://kms.sk/ulohy/> vždy aspoň mesiac pred termínom odovzdania daného kola. Úlohy 1 až 8 budú obodované počtom bodov od 0 po 9, úlohy 9 a 10 počtom bodov od 0 po 10. Okrem toho v niektorých špeciálnych prípadoch (popísané nižšie) môžu byť úlohy obodované aj od 0 po 5.

Body sa udeľujú aj za čiastkové či neúplné riešenia. Za každé kolo sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

Kategórie ALFA a BETA

Na to, aby si vedel/-a, ktoré úlohy môžeš riešiť, potrebuješ poznať svoj koeficient κ . Tento koeficient si môžeš vypočítať ako $\kappa = r + u + c$. Číslo r je tvoj ročník, číslo u je počet tvojich úspešných semestrov a číslo c je počet tvojich úspešných účastí na celoštátnom kole Matematickej olympiády. Semester považuj za úspešný, ak sa ti počas

neho podarilo získať aspoň 90 bodov alebo si sa zúčastnil/-a sústredenia. Tvoj ročník je prepočítavaný podľa počtu rokov do maturity tak, aby maturant mal ročník 4, teda napr. prváci 5-ročného štúdia majú ročník 0.

Kategóriu ALFA môžu riešiť len študenti, ktorí neboli úspešnými riešiteľmi celoštátneho kola Matematickej olympiády a ktorých koeficient κ je najviac 3.

Kategóriu BETA môžu riešiť všetci študenti. Riešitelia ALFY sa vo výsledkovej listine BETY objavajú až po kole, v ktorom pošlú aspoň jednu z úloh 8, 9 alebo 10.

Kategória ALFA

Pre riešiteľov kategórie ALFA sú určené úlohy 1 až 7. Úlohu číslo 1 môžu súťažne riešiť len študenti s $\kappa \leq 1$ a úlohu číslo 2 len študenti s $\kappa \leq 2$. Ostatné úlohy (3 až 7) môžu riešiť všetci riešitelia kategórie ALFA.

Kategória BETA

Pre riešiteľov kategórie BETA sú určené úlohy 3 až 10. Úlohu číslo 3 môžu súťažne riešiť len študenti s $\kappa \leq 5$, ale dostanú za ňu najviac 5 bodov (popísané nižšie). Úlohu číslo 4 môžu súťažne riešiť len študenti s $\kappa \leq 5$ a úlohu číslo 5 len študenti s $\kappa \leq 8$. Ostatné úlohy (6 až 10) môžu riešiť všetci riešitelia kategórie BETA.

Riešenia za 5 bodov

Koeficient κ určuje, ktoré úlohy môže riešiteľ súťažne riešiť (ostatné úlohy môže riešiť tiež, no nebudú zarátané do výsledného poradia). Okrem toho môže riešiteľ za najviac 5 bodov riešiť nasledujúce úlohy, aj keď mu to koeficient nedovoľuje:

- úloha s najvyšším poradovým číslom, ktorú koeficient riešiteľovi nedovoľuje riešiť
- úloha číslo 4

Napríklad:

- riešiteľ s koeficientom 5 nemôže súťažne riešiť úlohy 1 a 2, v úlohe 3 vie získať 5 bodov, v úlohách 4 až 8 vie získať po 9 bodov a v úlohách 9 a 10 vie získať po 10 bodov
- riešiteľ s koeficientom 9 nemôže súťažne riešiť úlohy 1 až 3, v úlohách 4 a 5 vie získať po 5 bodov, v úlohách 6 až 8 vie získať po 9 bodov a v úlohách 9 a 10 vie získať po 10 bodov

Bodovanie týchto úloh funguje tak, že opravovateľ ohodnotí úlohu od 0 po 9 bodov ako zvyčajne, ale riešiteľovi sa do súčtu bodov z nej započíta len polovica bodov zaokrúhlená nahor.

Pozývanie na sústredenia

Po každej časti, zimnej aj letnej, sa uskutočnia **dve** sústredenia pre najúspešnejších riešiteľov oboch kategórií ALFA a BETA. Na každé z nich bude pozvaných aspoň 36 najlepších riešiteľov príslušnej kategórie. Ostatní riešitelia môžu byť pozvaní ako náhradníci. V rámci jednej časti je možné zúčastniť sa najviac jedného sústredenia.

Keďže sústredenie kategórie ALFA je určené najmä pre študentov 9. ročníka základnej školy až 3. ročníka strednej školy a sústredenie kategórie BETA je určené najmä pre stredoškolských študentov, vyhradujeme si právo s prihliadnutím hlavne na ročník úspešného riešiteľa pozvať ho na sústredenie inej kategórie, resp. nepozvať ho.

Pokyny pre riešiteľov

- Úlohy rieš **samostatne**.
- Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. V prípade, že v časti či celom riešení používaš odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu, prípadne odkaz na internetovú stránku, ak si čerpal z internetu. Samozrejme, aj v tomto prípade zašli kompletne riešenie. Riešenie musí byť explicitné (pochopteľné samo o sebe bez ďalších zdrojov) a musí byť skontrolovateľné (v rozumnom čase) ručne opravovateľom (napríklad riešenia využívajúce výpočtovú techniku obvykle ručne skontrolovateľné nie sú).
- Odporúčame Ti pozrieť stránku Ako riešiť úlohy v KMS na adrese www.kms.sk/ako_riesit/, kde nájdeš niekoľko užitočných rád.
- Riešenia posielaj do termínu odoslania kola. Ak posielaš riešenia poštou z územia mimo Slovenskej republiky, treba to stihnúť do uvedeného zahraničného termínu. Riešenia odoslané po termíne odoslania (rozhodujúca je pečiatka na obálke) spôsobujú značné organizačné problémy, vyhradzuje si preto právo udeliť nula bodov za všetky riešenia odoslané po termíne.
- Riešenia neodovzdávajte organizátorom osobne.
- Riešenie každej úlohy píš na samostatný papier formátu A4. Ku každej úlohe uveď svoje meno, triedu, školu a adresu! Vítané sú okrem riešení v slovenčine aj riešenia v angličtine, češtine a riešenia písané v \TeX . Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch.
- Na našej stránke www.kms.sk/template si môžeš stiahnuť a vytlačiť predlohy pre riešenia.
- Riešenia píš čitateľne. Ak nebudeme schopní prečítať časť tvojho riešenia, vyhradzuje si právo neudelit ti za tú časť body. Môžeš zvážiť písanie riešenia na počítači.
- Nedodržanie týchto pravidiel bude viesť k postihu.
- Opravené, obodované a okomentované riešenia nájdeš po prihlásení pod zadaním úlohy na našej stránke.
- Po termíne kola môžeš na našej stránke nájsť návody, príp. aj videonávody, ktoré ti pomôžu (nesúťažne) doriešiť úlohy, s ktorými si mal/-a problém. Následne tam zverejníme aj vzorové riešenia.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr sťažnosť na e-mailovú adresu kms@kms.sk spolu s oskenovaným riešením v prílohe. Žiadosť môžeš poslať aj písomne na našu adresu, ktorú nájdeš v hlavičke letáku. Nezabudni k nej priložiť aj originál sporného riešenia.
- Ak ti nie je v zadaniach čokoľvek jasné alebo máš akékoľvek pochybnosti, netreba sa báť spýtať sa nás. Ideálny spôsob je zaslanie e-mailu na kms@kms.sk.

Elektronické posielanie riešení

Svoje riešenia môžeš odovzdať aj v elektronickej podobe na našej stránke. Presný návod na ich odovzdávanie nájdeš na stránke www.kms.sk/eriesenia. Pre elektronické posielanie riešení platia nasledovné pravidlá:

- Termín na odovzdanie je vždy v deň termínu odoslania kola o **23:59**. Po tomto čase už elektronické posielanie nie je možné. Tento jednotný termín sa týka aj zahraničných riešiteľov.

- Akceptované sú **iba riešenia vo formáte pdf** písané na počítači, prípadne naskenované, **pre každú úlohu jeden súbor**. Pri ich tvorbe odporúčame použiť \TeX alebo export do formátu pdf z iných aplikácií. Môžeš pritom využiť predlohy, ktoré nájdeš na našej stránke www.kms.sk/template. Ak posielaš oskenované riešenie, daj si pozor, či nie je príliš tmavé a či je čitateľné.
- Nezabudni v hlavičke riešenia uviesť svoje meno, triedu, školu a adresu!
- Pokiaľ na našej stránke vyplníš všetky potrebné údaje (pozri si návod na www.kms.sk/eriesenia), nemusíš posilať poštou papierovú návratku.

Prijatie na FMFI UK bez prijímačiek

Ak účastník získa v niektorej časti (zimnej, letnej) a ľubovoľnej kategórii KMS aspoň 65% celkového počtu bodov, a hlási sa na študijný program, ktorého profilovým predmetom je matematika, bude prijatý.

Ba čo viac, ak dosiahne excelentné výsledky a dostane za to Dekanský list, v prípade, že príde študovať na FMFI UK, čaká naňho motivačné štipendium vo výške približne 300 eur.

.....TU ODSTRIHNI.....

Prihláška do letnej časti KMS 2024/2025 – **poslať spolu s 1. kolom!**

Meno a priezvisko: Dátum narodenia:

Škola:

Rok maturity: Trieda:

Počet účastí na celoštátnom kole MO:

Adresa domov:

Adresa pre poštu (domov – škola – iná):

Tel. domov: mobil (vlastný):

e-mail:

Svojím podpisom dávam podľa § 11 a nasl. zákona č. 122/2013 Z.z. o ochrane osobných údajov svoj výslovný súhlas so správou, spracovaním a uchovaním svojich osobných údajov, ktoré poskytujem občianskemu združeniu Trojsten. Poskytujem dobrovoľné údaje s tým, že tieto údaje môžu byť spracované pre (i) ich interné využitie v rámci občianskeho združenia Trojsten za účelom vyhodnotenia uchádzačov o program (ii) za účelom vytvárania databázy uchádzačov pre účely ďalšej spolupráce so študentom. Beriem na vedomie a súhlasím s tým, že Trojsten môže moje údaje dlhodobo uchovávať a spracúvať za účelom poskytovania študentských príležitostí alebo iných odborných alebo spoločenských aktivít občianskeho združenia Trojsten. Súhlas je daný na dobu nevyhnutnú na dosiahnutie účelu spracovania a je ho možné kedykoľvek písomne odvolať.

Podpis:

Zadania 1. kola letnej časti

Termín odoslania 17. február (pre zahraničie 14. február)

V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na kms@kms.sk.

1.1 Kradne Mená Súrodencom ($\kappa \leq 0$)

kategória **alfa**

V „chalúpke“ vo Vrbovom bývala rodina, ktorá mala veľa detí. Matúš, Móric, Michal, František, Serafín, August. To všetko boli mená jedného z nich. Jeho súrodencom sa nepáčilo, že Matúš Móric Michal František Serafín August môže mať hneď 6 mien, kým oni nemajú žiadne, takže hneď ako dospel, tak ho hnali pred súd, aby nastolil spravodlivosť.

Súd súdi na základe troch premenných x, y, z , ktoré sú celými číslami, a rád by zistil, či odsúdený môže byť vo väzení až do roku 2025. Aby tam tak dlho mohol byť, tak premenné musia splňať

$$(x + y)(y + z)(z + x) = 2025.$$

Existujú také x, y, z ?

1.2 Krásnu Miluje Süßannku ($\kappa \leq 0$)

kategória **alfa**

Matúš Móric Michal František Serafín August nechcel riskovať, že súd nájde čísla, ktoré ho pošlú do väzenia na niekoľko storočí, tak pre istotu ušiel do Poľska – do Popradu. Tam sa zalúbil do krásnej Süßannky. Zistil, že jej rodina ukrýva poľských odbojárov, tak neváhal a aj on vstúpil do odboja. V skrýši im bolo so Süßannkou spolu príjemne, takže nemohlo nasledovať nič iné ako svadba.

Oltár, pred ktorým sa Süßannka s Matúšom Móricom Michalom Františkom Serafínom Augustom brali, mal tvar obdĺžnika $ABCD$. Na jeho strane AB leží bod E tak, že úsečky EC a ED majú postupne dĺžky 35 a 84 palcov a zároveň platí $\sphericalangle ECB + \sphericalangle EDA = 90^\circ$. Určte v palcoch vzdialenosť bodov A a E .

1.3 Krajinou Maširujú Spiklenci ($\kappa \leq 1$)

kategórie **alfa a beta**

Účasť v odboji mala však aj svoje tienisté stránky. Matúš Móric Michal František Serafín August to zistil, keď im do skrýše vtrhli Rusi a všetkých zajali. Náhodou to bol aj spôsob, ktorým sa dozvedel, proti komu sa vlastne odboj organizuje. Rusi sa s protivníkmi nemaznali a rozhodli sa ich odlifrovať až na Kamčatku.

Cesta na Kamčatku trvala dlho. Cestovali prvý deň, druhý deň, tretí deň... Matúš Móric Michal František Serafín August si každý deň zaznačil, ako ďaleko je od domova. Jeho vzdialenosť od Süßannky v n -tý deň si označil nezáporným reálnym číslom a_n . Ako ďaleko bude v 2025-ty deň svojej cesty, pokiaľ platí:

- $a_4 = 2$,
- $a_{n+1} = \frac{1}{a_0+a_1} + \frac{1}{a_1+a_2} + \dots + \frac{1}{a_n+a_{n+1}}$ pre všetky celé $0 \leq n \leq 2024$?

1.4 Kamčatka Mimoriadne Strašná ($\kappa \leq 2$)

kategórie **alfa** a **beta**

Nik nemohol tušiť, že odbojáři na Kamčatke sa budú nudiť, a tak zorganizujú ďalší odboj. Matúš Móric Michal František Serafín August a jeho kumpáni nahovorili miestny ľud a spolu premohli vojenskú posádku, ktorá ich mala strážiť. Keďže sa báli, že Rusi pošlú posily, rozhodli sa utiecť po mori.

Na cestu sa museli náležite pripraviť. Bolo zima, tak na loď naložili x kožušín, y konzerv špenátu a keďže už nevedeli, čo by ešte mohli naložiť, tak si zobrali p ton pravého snehu, kde x, y sú kladné celé čísla a p je prvočíslo. Nájďte všetky trojice (x, y, p) , spĺňajúce

$$y(x^2 + p) - x(y^2 + p) = p.$$

1.5 Ktovieaký Macauský Stopár ($\kappa \leq 6$)

kategórie **alfa** a **beta**

Po mori sa odboj preplavil až do Macaa. Po ceste zjedli všetky zásoby vrátane kožušín a snehu, no i tak boli vyhľadovaní. V Macau teda predali loď, aby sa mali za čo najesť. Matúšovi Móricovi Michalovi Františkovi Serafínovi Augustovi sa už cnelo za domovom, tak sa rozhodol, že si stopne nejakú loď do Európy. Po dvoch dňoch stá-tia s vystrčeným prstom v prístave sa nad ním zľutovala posádka jednej francúzskej lode a vzala ho na cestu do Lorientu.

Matúš Móric Michal František Serafín August už bol z toho všetkého cestovania znudený. Našťastie boli na lodi námorníci, nanešťastie sa chceli hrať iba kocky a na tie mu už nezostali peniaze. On si však vystačí aj sám.

Hracia plocha je n -uholník. Matúš a Móric sa striedajú v ťahoch, pričom začína Matúš. Vo svojom ťahu zafarbí hráč jeden dosiaľ nezafarbený vrchol namodro alebo nazeleno tak, aby žiadne dva vrcholy rovnakej farby nesusedili. Ak niekto nemá ako spraviť ťah, prehráva. V závislosti na $n \geq 3$ určte, či má víťaznú stratégiu Matúš, alebo Móric, a vysvetlite aká je.

1.6 Kuchárske Majstrovstvo Sľubuje

kategórie **alfa** a **beta**

Keď sa Matúš Móric Michal František Serafín August konečne dostal do Európy, hneď sa ponáhlal za svojou ženou Süßannkou a ich synom. Po jeho príchode dostal správy z Francúzska, kde sa o ňom dopyčul tamjší kráľ a mal preňho prácu národného významu. Matúš Móric Michal František Serafín August mal predávať bagety na nejakom ostrove kúsok východne od Afriky. Keď sa to dozvedel, celý natešený sa tam vybral. Na tomto ostrove však domorodí obyvatelia nekonzistentne používali dve meny, ariary a franky.

Finančnú bilanciu si Matúš Móric Michal František Serafín August zaznamenával ako dvojicu nenulových celých čísel (a, f) . Po roku prezieravého obchodovania jeho bilancia spĺňala

$$a^{a+f} = f^{24},$$

$$f^{a+f} = a^6.$$

Určte všetky možné dvojice (a, f) .

1.7 Kráľovskú Moc Skúša

kategórie **alfa** a **beta**

Na východ od Afriky je mnoho ostrovov, no Matúš Móric Michal František Serafín August mal svoj stánok na tom najväčšom. Preto ho už po prvom roku povýšili na hlavného distribútora pre všetky bagetérie v okolí. Matúš Móric Michal František Serafín August povzbudený týmto povýšením sa rozhodol povýšiť ešte viac a prehlásil sa za kráľa celého ostrova. To sa nepáčilo právoplatnému kráľovi Julienovi, ktorý sa rozhodol zorganizovať domorodý odboj proti hnusným francúzskym kolonizátorom.

Keď už je Matúš Móric Michal František Serafín August kráľom, tak potrebuje korunu a žezlo. Žeziel má dostatok a v prípade hladu si z nich môže aj odkusnúť. Koruna mu však zatiaľ chýba, tak si ju musí upiecť. Jeho plech má tvar trojuholníka ABC . Na stranách AB a AC boli smerom von zostrojené rovnostranné trojuholníky ABD a ACE . Úsečky CD a BE sa pretínajú v bode F . Ukázalo sa, že bod A je stred kružnice vpísanej trojuholníku DEF . Nájdite veľkosť uhla BAC .

1.8 Kokosy Môže Strieľať

kategórie **alfa** a **beta**

Odboj prerástol do otvorenej vojny. Matúš Móric Michal František Serafín August sa bál čo i len vykročiť z domu, domorodci totiž zasypávali okupovateľov salvami kokosov. Francúzskeho kráľa o pomoc požiadať nemohol, sotva by mu túto trápnu situáciu dokázal vysvetliť. Musel sa teda spoliehať len na tých, ktorí s ním boli na ostrove. Ich výskumné oddelenie však nezaháľalo a pripravilo nový recept na bagety, ktoré sa dali použiť na odrážanie nepriateľského bombardovania.

Odpalovanie kokosov Matúša Mórica Michala Františka Serafína Augusta bavilo natoľko, že si začal písať štatistiky, kam až sa mu kokos podarilo odpáliť. Nech a je kladné celé číslo reprezentujúce, o koľký odpal išlo, a nezáporné celé číslo x je vzdialenosť, do ktorej kokos odpálil. Platí, že

$$\frac{1}{2}((2^a - 1)^2 + 1) = x.$$

Nájdite všetky čísla a také, že vzdialenosť x je druhou mocninou celého čísla.

1.9 Kamene Miesto Stravy

kategória **beta**

Matúš Móric Michal František Serafín August síce zvládol utajiť, čo sa uňho na ostrove deje, no predavači z okolitých ostrovov si všimli, že nové bagety sú viac uspôsobené na odpalovanie kokosov ako na jedenie, a začali sa sťažovať. Keďže k náprave nedošlo, musela na ostrov prísť Obchodná inšpekcia, aby skontrolovala, čo vlastne Matúš Móric Michal František Serafín August porába.

Inšpekcia si do políčok štvorca $n \times n$ zapisuje čísla od 1 do n^2 , každé práve raz. Pre každú dvojicu čísel v rovnakom stĺpci alebo riadku potom spočíta podiel väčšieho k menšiemu. *Charakteristika* rozmiestnenia čísel je najmenší z týchto $n^2(n - 1)$ podielov. Na to, aby inšpekcia došla k nejakému záveru, musí zistiť, akú najväčšiu hodnotu môže charakteristika nadobudnúť. Pomôžte to inšpekcii zistiť.

1.10 Kopec Memoárov Spisuje

kategória **beta**

Keď si Matúš Móric Michal František Serafín August uvedomil, že mu okrem problémov domorodcov môžu hroziť problémy aj od francúzskeho kráľa, rozhodol sa nečakať na závery vyšetrovania Obchodnej inšpekcie a nenápadne



aj s rodinou zdúchol z ostrova. Doplavili sa až do Anglicka. Aby mali z čoho žiť, rozhodol sa predať práva na svoj životopis s výstižným názvom „Pamäti a cesty“. Vo svojich memoároch toho Matúš Móric Michal František Serafín August popísal veľa. Dokonca toho popísal aspoň tolko, koľko zažil, a pravdepodobne výrazne viac.

Dokážte, že keď $k > 1$ je reálne číslo, $n \geq 3$ je celé číslo a $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ sú kladné reálne čísla, tak

$$\frac{x_1 + kx_2}{x_2 + x_3} + \frac{x_2 + kx_3}{x_3 + x_4} + \dots + \frac{x_n + kx_1}{x_1 + x_2} \geq \frac{n(k+1)}{2}.$$