



Zadania 2. kola letnej časti

Termín odoslania 17. marec 2025 (pre zahraničie 14. marec 2025)

V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na kms@kms.sk.

2.1 Každý Mimomartánský Spis ($\kappa \leq 0$)

kategória **alfa**

Nadnárodný Inštitút Vesmírnych Aktivít Mimomartánských¹ je prísne tajná nadnárodná organizácia, ktorá monitoruje Mars a jeho slnečnú sústavu, aby zachytila akékoľvek dôkazy o existencii mimomartánskeho života.

Za svoju existenciu zaznamenala množstvo incidentov, každý vo vlastnom prísne tajnom spise. Spisy sú zoradené podľa svojich identifikačných čísel 1000, 1001, 1002, ..., 2000. Koľko je medzi nimi dvojíc po sebe idúcich spisov takých, že pri súčte identifikačných čísel tejto dvojice nedôjde k prechodu cez desiatku (na žiadnom mieste)?

2.2 Kozmickú Misiu Spúšťame ($\kappa \leq 0$)

kategória **alfa**

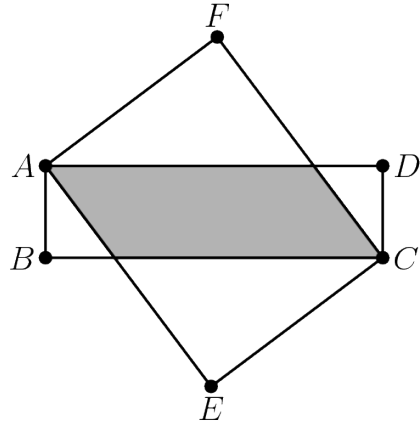
Medzitým na Zemi (na ktorej nemohol jestvovať život, veď obsahuje také toxické látky ako dihydrogén monoxid a dusík (od slova dusiť!!)) si ľudstvo všimlo, že na Marse sa dejú zvláštne veci. Rozhodli sa teda vyslať na Mars dvoch najschopnejších astronautov v slnečnej sústave: Patricka Matthews a Matthewa Patricksa. Tí hneď po prilete k Marsu vytiahli vesmírnu lupu a zamerali ju do poľa, aby ho bližšie preskúmali. Sila slnečných lúčov koncentrovaných lupou však bola na pole priveľa a vypálila v ňom tmavý flak. To vnuklo astronautovi Matthewsovi senzačný nápad, s ktorým sa hneď musel podeliť.

„Počuj, Matt, čo keby sme niečo do toho poľa nakreslili?“

„A čo také?“ pýtal sa jeho kolega, astronaut Patricks. Matthews stíšil hlas a začal šepkať kolegovi do ucha. Po chvíli sa obaja začali hihňať.

A tak kreslili. Začali obdĺžnikom $ABCD$ so stranami $|AB| = 3$ km a $|BC| = 11$ km. Pokračovali obdĺžnikom $AECF$ so stranami $|AF| = 7$ km a $|FC| = 9$ km. Nakoniec ešte uprostred vypálili sivú plochu ako na obrázku. Určte jej obsah.

¹Nemýliť si s Nadnárodným Inštitútom Vesmírnych Aktivít Martánských



2.3 Kukaj! Mimoszemský Staviteľia! ($\kappa \leq 1$)

kategórie **alfa** a **beta**

Po úspešnom kreslení sa Matthews a Patricks presunuli nad neďalekú púšť, kde učinili najväčší objav celej histórie. Našli mimozemský život. Domorodci sa plahočili po púšti a stavali nejakú monumentálnu stavbu, akiste hrobku pre vládcu ich primitívnej spoločnosti. Astronauti pristáli, aby sa pozreli zblíža. Pri pohľade z povrchu však niečo nebolo v poriadku – takto predsa pyramídy nevyzerajú!

Astronauti Matthews a Patricks sa rozhodli, že domorodcom pomôžu. Vtrhli medzi nich a začali ukazovať, čo majú ako robiť, aby pyramída vyzerala ako pyramída. V prvom rade je nutné mať vhodný parameter pyramídovosti p , ktorý je reálne číslo. Pre súradnice $[x, y, z]$ špičky pyramídy (tri reálne čísla) musí potom platiť

$$px + y + z = 1,$$

$$x + py + z = p,$$

$$x + y + z = p^2.$$

Vzhľadom na reálne číslo p vypočítajte vhodné súradnice $[x, y, z]$.

2.4 Komusi Maškrty Sľubujú ($\kappa \leq 2$)

kategórie **alfa** a **beta**

Astronauti Matthews a Patricks sa spokojní vrátili do lode. Chceli sa venovať svojej ďalšej úlohe – robiť nejaký výskum na martánskych formách života. Pristáli teda s loďou pri jednom štvornohom domorodcovi a požiadali ho, aby si nastúpil. Štyri nohy, štyri rohy, štyri oči. Vyzerali aj stavbári takto? To už si udatní astronauti nepamätali, domorodec im však nerozumel, tak sa ho rozhodli nalákať na čokoládu predtým, než ho spútajú a násilím dotlačia do lode.

Čokoláda značky Zem je tvorená tabuľkou 4×8 štvorcíkov. Podľa medziplanetárnej smernice spoločnosti Zem Inc., ktorá čokoládu produkuje, sa smie podávať mimozemským bytostiam len vo forme štvorcov 1×1 , 2×2 , 3×3 a 4×4 štvorcíky. Matthews a Patricks sa rozhodli, že čokoládu rovno rozdelia na niekoľko povolených kúskov. Koľko takých štvorcov mohli získať, ak rozdelili celú čokoládu? Nájdite všetky možné počty.

2.5 Kúzlo Medziplanetárneho Spojenia ($\kappa \leq 6$)

kategórie **alfa** a **beta**

S pravým Marťanom na palube sa vrátili na obežnú dráhu. Teraz boli na rade pokusy, lenže ako na to? Potrebovali poradiť. Na Marse nebolo publikum, ktorého pomoci by rozumeli, a hádať s pravdepodobnosťou 50 : 50 bol vo vesmíre priveľký risk. Rozhodli sa teda pre priateľa na telefóne. Astronaut Patricks už zdvíhal slúchadlo, keď sa zháčil.

„Počuj, Pat, akú má Zem predvoľbu?“

Predvoľba Zeme je celé číslo $n \geq 2$. Astronaut Matthews si pamätá, že $p(k)$ označuje najväčšieho prvočíselného deliteľa čísla k , $[k]$ označuje dolnú celú časť reálneho čísla k (teda najväčšie celé číslo menšie alebo rovné k) a navyše platí

$$p(n) + \lfloor \sqrt{n} \rfloor = p(n+1) + \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor.$$

Patricksovi tak nezostáva nič iné ako vyskúšať všetky možné predvoľby. Pomôžte mu tým, že určíte, ktoré všetky n má vyskúšať.

2.6 Kartičky Maľujú Spiklenecky

kategórie **alfa** a **beta**

Telefonát bol mimoriadne plodný a okrem nových nadávok sa z neho naši astronauti naučili, že na pokusy potrebujú inteligentné formy života. Tie sa vraj vyznačujú tým, že majú ruky. Bez ohľadu na počet nôh, rohov, či očí, im bude ich súčasný Marťan na nič. Potrebujú na ich loď nalákať iného, ideálne na niečo pestrofarebné...

Je dané kladné celé n . Patrick Matthews našiel na lodi veľkú hrbu kartičiek s tabuľkami $n \times n$. Začal ich vyfarbovať červenou, žltou, zelenou a modrou (každé políčko práve jednou) farbou tak, aby v každom štvorci 2×2 bola každá farba práve raz. Každú kartičku, ktorú ofarbil, ofarbil inak, pričom ofarbenia líšiace sa iba otočením nepovažujeme za rôzne (ale ofarbenia líšiace sa prevrátením rozlišujeme). Časom ho to omrzelo, lebo sa mu minuli ofarbenia.

Matthew Patricks našiel na lodi rovnakú hrbu kartičiek. Začal svoje kartičky tiež vyfarbovať červenou, žltou, zelenou a modrou tak, že v hornom riadku zafarbil políčka striedavo dvomi z týchto farieb a potom tie isté farby použil v každom nepárnom riadku zhora, no mohol zmeniť farbu, ktorou začal (čiže v každom riadku mal dve možnosti). Každý párny riadok zhora zafarbil striedavo zvyšnými dvoma farbami, pričom opäť si v každom z riadkov mohol vybrať počiatočnú farbu. Aj jeho to časom omrzelo, lebo sa mu minuli ofarbenia.

Majú naši astronauti rovnaké zbierky farebných kartičiek? Pamätajte, že ofarbenia líšiace sa iba otočením nepovažujeme za rôzne.

2.7 Kreslenie Marťanského Stvorenia

kategórie **alfa** a **beta**

Farebné kartičky splnili svoj účel a astronauti Matthews a Patricks mali čoskoro na lodi inteligentnú formu života. Tá musela byť mimoriadne inteligentná, lebo mala hneď 3 ruky: pravú (P), ľavú (L) a spodnú (S), ktorá vyrastala namiesto pupka.

Tieto životné formy boli výrazne nevyvážené, lebo $|LS| < |PS| < |LP|$. Navyše trojuholník PLS bol ostrouhlý. Matthews a Patricks fixkou na Marťanovi vyznačili na strane LP body U a V tak, aby SU bola výškou a SV ťažnicou trojuholníka. Ďalej na priamkach LS a PS označili postupne body X a Y tak, že $|PX| = |XS|$ a $|LY| = |YS|$. Dokážte, že stred úsečky XY je v rovnakej vzdialenosti od bodu U ako od bodu V .

2.8 Krásni Modří Schopní

kategorie **alfa** a **beta**

V priebehu niekoľkých dní vypukol na Marse ošial. Obyvatelia sa neustále dožadovali autorít, aby prešetrili údajný výskyt mimomarťanských bytostí, ktoré narúšajú výstavbu obchodných centier, vandalizujú polia neslušnými symbolmi a kradnú dobytok. Nadnárodný Inštitút Vesmírnych Aktivít Mimomarťanských bral túto hrozbu vážne, a tak vytvoril zásahový tím zvaný Marťania v modrom.

Jedným z novovyškolených agentov bol aj agent \check{F} .² Ten sa preukázal ako mimoriadne platný agent v skúške z „Hľadania mimomarťanskej aktivity“, keď ako jediný dokázal nájsť všetky trojice celých čísel (a, b, c) také, že

$$(ac - b)^2 + (bc - a)^2 = c.$$

Nájdite ich aj vy.

2.9 Kúsok Morálnosť Spochybňuje

kategória **beta**

Hneď prvý prípad agenta \check{F} sa týkal nejakého šialenca, ktorý tvrdil, že ho uniesli mimomarťania a vo svojej „lieťajúcej rakete“ ho pokreslili. Neznelo to veľmi vierohodne, ale dotýčný bol skutočne pokreslený. A tie zvláštne symboly... Úlohou Marťanov v modrom však bolo zabrániť akýmkoľvek rečiam, preto nemal agent \check{F} inú možnosť ako (napriek osobnému presvedčeniu) vymazať svojmu spoluobčanovi pamäť. Na to využije pamäťovú gumu, ktorá vojde jedným uchom dnu a druhým von...

Nech m je kladné celé číslo. Pamäť je nekonečná postupnosť a_1, a_2, a_3, \dots , v ktorej a_1 je kladné celé a pre každé $n \geq 1$ platí

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n^2 + 2^m & \text{ak } a_n < 2^m, \\ a_n/2 & \text{ak } a_n \geq 2^m. \end{cases}$$

Pamäťová guma však vymaže len celé spomienky. Preto vzhľadom na m určte všetky a_1 , pre ktoré je každý člen postupnosti celé číslo.

2.10 Kruté Mazanie Spomienok

kategória **beta**

Sedíš za počítačom a pozeráš si nové zadania KMS, keď sa zrazu ozve klopanie na dvere. Otvoríš a za nimi je postava v modrom. Má zvláštnu sivo-zelenkavú pokožku, na tvári mesačné okuliare³ a na tele oblek, ktorému zhruba uprostred brucha začína tretí rukáv. Akoby ho kreslila umelá inteligencia. Postava niečo nezrozumiteľne povie a pred očami sa ti zjaví gumený štupeľ do uší. Zrazu ťa jedna ruka chytí zosponu za bradu, ďalšia zvrchu za temeno, chceš sa vytrhnúť, ale nejde to. Cítiš, ako sa ti niečo tlačí do ľavého ucha...

...a viac nevieš o ničom, len o lichobežníku $ABCD$ so základňami BC a AD , pričom AD je tá dlhšia z nich. Na uhlopriečke AC má vyznačený bod P , na uhlopriečke BD bod Q . Vidiš, že priamka AC je osou $\sphericalangle BPD$ a priamka BD osou $\sphericalangle AQC$. Dokáž, že $\sphericalangle BPD$ a $\sphericalangle AQC$ majú rovnakú veľkosť.

²Čítaj \check{f} .

³Vyzerajú ako slnečné, avšak v skutočnosti neznižujú, ale zvyšujú množstvo svetla, ktoré nimi prechádza.