Zadania 3. série letnej časti KMS 2016/2017

Kategória ALFA

Úloha č. 1: ($\kappa \leq 1$)
V Krajine osí ôs si pre lepší prehľad ofarbili všetky celé čísla nabielo alebo načierno. Vieme, že ak vezmeme ľubovoľné dve biele čísla a, b, tak čísla $a+b$, $a-b$ majú rôzne farby. Navyše vieme, že číslo 1 je biele. Zistite, ktorej farby je číslo 2017.

Úloha č. 2: ($\kappa \leq 2$)
Najuznávenejšou osobou krajiny je čarodejník Š. Je známy tým, že svojou mágiou kreslí rôzne geometrické obrazce, napríklad takéto. Kružnice k a l, sa pretínajú v dvoch bodoch A a B. Stred S kružnice k leží na kružnici l. Tetiva AC kružnice k pretína l po druhýkrát v bode D. Dokážte, že úsečky SD a BC sú na seba kolmé.[1]

Úloha č. 3: ($\kappa \leq 3$)
Dvaja susedia Krajiny osí ôs, Kornélia a Leopold, nerobia celé dni nič iné, len hrajú nasledovnú hru. Napíšu si na papier čísla 1, 2, ..., 100. Hru začína Kornélia a potom sa s Leopoldom striedajú v ťahoch. Hráč v jednom svojom ťahu vpíše znamienko +, − alebo · (plus, mínus alebo krát) medzi ľubovoľné dve susedné čísla, medzi ktorými ešte žiadne nie je. Hra končí, keď medzi každými dvomi susednými číslami je práve jedno znamienko. Môže Kornélia docieliť, aby bol na konci výsledok párny, nech hrá Leopold akokoľvek? Môže Kornélia docieliť, aby bol výsledok nepárny?

Úloha č. 4: ($\kappa \leq 4$)
Zlatokop Zlatko sníva celý život o tom, že nájde najvzácnejší drahokam krajiny v tvare trojstenu. Podarilo sa mu však nájsť iba štvorsten[2] , tak by si z neho chcel spraviť aspoň trojuholník.
Dokážte, že v každom štvorstene existuje vrchol, z ktorého vychádzajúce hrany môžu vytvoriť trojuholník. Tri úsečky môžu vytvoriť trojuholník, práve vtedy, keď je každá z nich kratšia ako súčet dĺžok zvyšných dvoch.

Úloha č. 5: ($\kappa \leq 7$)
V Krajine osí ôs však žije aj zlý čarodejník, známy pod menom Devil Voršiper. Dobrý čarodejník Š ho vyzval raz na súboj. Devil Voršiper rozložil na stôl $2n$ kariet pexesa (n párov rovnakých kariet). V každom ťahu môže Š otočiť k kariet lícom nahor. Ak je medzi nimi aspoň jeden pár, Š vyhral. Ak nie, tak Devil Voršiper nachvíľu oslepí Š-a. Kým Š nevidí, tak Devil Voršiper zoberie k kariet, ktoré Š otočil, ľubovoľne ich zamieša a potom v nejakom poradí vráti na tých k pozícií, odkiaľ ich zobral. Potom sa Š-ovi otvoria oči a pokračuje ďalším ťahom. Pre ktoré dvojice celých čísel $n \geq k \geq 2$ existuje prirodzené číslo m také, že Š môže zaručene vyhrať na nanajvýš m ťahov bez ohľadu na to, ako Devil Voršiper mieša karty?

Úloha č. 6:
Devil Voršiper nemá rád osi. Preto ani jeho kúzelný magický symbol žiadne osi neobsahuje. Jeho symbol tvorí trojuholník ABC, v ktorom D je stred strany BC. Bod E leží na strane AC tak, že platí $2|AE| = |CE|$. Naviac platí, že $|\sphericalangle CBE| = |\sphericalangle ADB|$. Určte veľkosť uhla ABC.

Úloha č. 7:
V Krajine osí ôs namiesto zvierat chovajú čísla. Farmárka Felícia chová reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kde $n \geq 2$ je dané prirodzené číslo. Ich dolné celé časti $\lfloor x_1 \rfloor, \lfloor x_2 \rfloor, \ldots, \lfloor x_n \rfloor$ majú v nejakom poradí hodnoty $1, 2, \ldots, n$ (každú práve raz). Nájdite maximálnu a minimálnu hodnotu výrazu

$$\lfloor x_2 - x_1 \rfloor + \lfloor x_3 - x_2 \rfloor + \lfloor x_4 - x_3 \rfloor + \cdots + \lfloor x_n - x_{n-1} \rfloor.$$

Zápis $\lfloor a \rfloor$ označuje *dolnú celú časť* reálneho čísla a, t. j. najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje a.

[1] K tejto úlohe vám odporúčame pripomenúť si, resp. naštudovať vzťahy medzi uhlami v kružnici. Môžete sa o nich dočítať v článku `https://old.kms.sk/~mazo/matematika/pocitanieUhlov.pdf`, hlavne v príklade 2.
[2] Ak nevieš čo je štvorsten, pozri sa sem `https://sk.wikipedia.org/wiki/Štvorsten`

Kategória BETA

Úlohy číslo **4, 5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:

Felícia na svojej farme chová aj funkcie, ktorým dáva papať čísla. Nedávno ich nakŕmila nulami, ktoré nemajú rady, tak jej všetky poutekali. Pomôžte jej nájsť ich!

Nájdite všetky funkcie[3] $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky nenulové reálne čísla x, y platí

$$x \cdot f(xy) + f(-y) = x \cdot f(x).$$

Úloha č. 9:

Š nie je uznávaným čarodejníkom Krajiny osí ôs len tak pre nič za nič. Je majstrom v čarovaní osí. Jeho najsilnejšie kúzlo pozostáva z trojuholníka ABC. Os uhla CAB pretína stranu BC v bode L a os uhla CBA pretína stranu AC v bode K. Os úsečky (teda os osi) BK pretína priamku AL v bode M. Bod N leží na priamke BK tak, že priamky LN a MK sú rovnobežné. Dokážte, že $|LN| = |NA|$.

Úloha č. 10:

V Krajine osí ôs majú šachovnice nezvyčajných rozmerov, ktoré ešte nezvyčajnešie farbia tromi farbami. Políčka šachovnice $(n+1) \times (n-1)$ sú zafarbené tromi farbami tak, že neexistuje dvojica riadkov a dvojica stĺpcov, pre ktoré majú štyri políčka na ich prieniku rovnakú farbu. Nájdite najväčšiu možnú hodnotu prirodzeného čísla n, pre ktoré je to možné.

Návody a videonávody k úlohám

Po termíne série zverejňujeme na našej stránke `www.kms.sk` medzi novinkami návody k úlohám. Pomôžu vám doriešiť úlohy, s ktorými ste si nevedeli rady. Taktiež vám môžu pomôcť videonávody, ktoré nájdete na našom YouTube kanáli `www.youtube.com/user/KorMatSem`.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame Zbierku KMS, v ktorej nájdete užitočné metódy riešenia úloh a taktiež aj výber úloh z minulých ročníkov KMS. Môžete ju nájsť na stránke `kms.sk/zbierka`.

Všetky úlohy, ktoré sa v KMS vyskytli, spolu so vzorovými riešeniami môžete nájsť v našom archíve na `www.kms.sk/archiv`. Pri riešení týchto príkladov a čítaní vzorových riešení isto získate užitočné skúsenosti.

Množstvo ďalších úloh spolu s užitočnými textami, ktoré uspokoja aj náročnejších riešiteľov, môžete nájsť v archíve českého Matematického korespondenčního semináře na adrese `http://mks.mff.cuni.cz/archive/archive.php`

Partneri

Termín odoslania riešení: **10. apríl 2017** (pre zahraničie 7. apríl 2017)

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`

[3]Pokiaľ ste sa ešte nestretli s úlohou tohto typu, odporúčame vám pozrieť si stránky `https://old.kms.sk/~mazo/matematika/funkcionalne_rov.pdf` a `http://mks.mff.cuni.cz/library/FunkcionalniRovniceVM/FunkcionalniRovniceVM.pdf`.