Zadania 1. kola zimnej časti KMS 2017/2018

Kategória ALFA

Úloha č. 1: ($\kappa \leq 1$)
Veronika a Aňa sadia kvetinky v záhrade s rozmermi 7×8. Záhrada je rozdelená na štvorčekové políčka 1×1. Veronika sadí fialové kvetinky a Aňa sadí ružové kvetinky. Dievčatá sa striedajú v sadení a tá, ktorá zasadí poslednú kvetinku, prehrá. Dievča, ktoré je na ťahu, rozdelí pole na dve časti čiarou rovnobežnou so stranou poľa. Potom si vyberie jednu časť poľa, ktorá obsahuje aspoň jedno voľné políčko, a na všetky voľné políčka tej časti vysadí svoje kvetinky. Ak začína Aňa, ktoré z dievčat má víťaznú stratégiu?[1]

Úloha č. 2: ($\kappa \leq 2$)
Adam a Milan hrajú hru. Na začiatku majú na stole kôpku n mincí. Adam začína a následne sa s Milanom striedajú v ťahoch. Vo svojom ťahu hráč zoberie z kôpky taký počet mincí, ktorý je deliteľom aktuálneho počtu mincí na kôpke, avšak nesmie zobrať všetky mince. Hráč, ktorý je na ťahu a na stole leží len jedna minca, prehráva. V závislosti od prirodzeného čísla n určte, ktorý z hráčov má víťaznú stratégiu.[1]

Úloha č. 3: ($\kappa \leq 3$)
Iveta má na papieri narysované dve polpriamky k, s vychádzajúce zo spoločného bodu. Mimo polpriamok k, s sa nachádza bod M. Iveta chce narysovať body K a S, ktoré ležia postupne na polpriamkach k a s. Navyše chce, aby platilo $|KM| = |MS|$ a aby body K, M, S ležali na jednej priamke. Ivetá má k dispozícii euklidovské pravítko a kružidlo.[2] Nájdite pre Ivetu všeobecný postup konštrukcie, ktorým narysuje spomenuté body K, S.

Úloha č. 4: ($\kappa \leq 4$)
Kika pestuje tekvicu na poli, ktoré má tvar konvexného mnohouholníka.[3] Každý múdry sedliak však vie, že tekvicové pole sa najlepšie obrába, keď má tvar rovnoramenného trojuholníka. Kika si ďalej všimla, že svoje pole môže rozdeliť pomocou niekoľkých uhlopriečok na rovnoramenné trojuholníky, čo aj urobila. Uhlopriečky, ktorými je pole rozdelené, sa nepretínajú vnútri mnohouholníka. Dokážte, že niektoré dve strany pôvodného mnohouholníka majú rovnakú dĺžku.

Úloha č. 5: ($\kappa \leq 7$)
Čeky má 11 náramčekov, každý inej farby. Odkladá si ich do vreca, ktoré by sa roztrhlo, ak by v ňom bolo viac ako 11 kg. Ivka vie, že náramčeky majú v nejakom poradí hmotnosti 1, 2, 3, ..., 11 kg, ale nevie v akom. Čeky pozná hmotnosti všetkých náramčekov a chce dokázať Ivke, že ružový náramček váži 1 kg. V jednom kroku môže Čeky dať do vreca nejaké náramčeky a ukázať Ivke, že sa <u>neroztrhlo</u>. Koľko najmenej krokov potrebuje Čeky na to, aby Ivku presvedčila?

Úloha č. 6:
Zajo si vymaľoval steny a teraz hľadá čísla x, y, ktoré by si na ňu zavesil. Má však na ne veľké nároky. Musia vyhovovať rovniciam

$$x^3 - 5 \cdot \frac{y^2}{x} = \frac{6}{y}, \qquad y^3 - 5 \cdot \frac{x^2}{y} = \frac{6}{x}.$$

Nájdite všetky reálne čísla x, y, ktoré vyhovujú Zajovým nárokom.

Úloha č. 7:
Slavo rád počíta deliteľov. Preto si zobral nepárne prvočíslo p. Potom pre každé celé číslo k spĺňajúce $1 \leq k \leq p-1$ spočítal počet deliteľov čísla $kp+1$, ktoré sú väčšie ako k a menšie ako p, a výsledný počet si zapísal na papier. Určte súčet všetkých čísel, čo Slavo napísal na papier.

Kategória BETA

Úlohy číslo **4, 5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Marián sa rozhodol, že sa začne venovať geometrii. Čarodejník Š mu poradil, že podstatou každej geometrickej úlohy je nájsť 4 body, čo ležia na jednej kružnici. Skúste to s ním aj vy!
Majme rovnobežník $ABCD$. Nech H je priesečník výšok trojuholníka ABC. Rovnobežka so stranou AB cez bod H pretína priamky AD a BC postupne v bodoch Q a P. Rovnobežka so stranou BC cez bod H pretína priamky AB a CD postupne v bodoch R a S. Dokážte, že body P, Q, R, S ležia na jednej kružnici.

[1] Hráč má víťaznú stratégiu, ak si vie svojimi ťahmi zaručiť výhru bez ohľadu na to, ako hrá jeho súper.
[2] O tom, čo je to euklidovské pravítko a kružidlo a čo všetko sa s nimi môže a nemôže robiť si prečítajte na stránke `kms.sk/ako_riesit/konstrukcne_ulohy/`
[3] Konvexný mnohouholník je taký mnohouholník, v ktorom spojnica ľubovoľných dvoch bodov leží celá vnútri mnohouholníka.

Úloha č. 9:

Jožo cestoval autobusom obdivujúc krásy malebnom Slovensku. Prišlo mu však nevoľno kvôli nerovnostiam na slovenských cestách. Úplne ho dorazila nasledovná nerovnosť.

Nech a, b, c sú strany trojuholníka. Dokážte, že platí

$$2 < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} < \sqrt{6}.$$

Úloha č. 10:

Mr. Miro sa nenaučil na test, tak sa musí spoľahnúť na svoje hekerské schopnosti. Okrem Mr. Mira sa testu účastní $n > 1$ študentov. Skúšajúci postupne zadáva otázky testu. Každú otázku najprv prečíta a dá na výber dve možnosti, z ktorých je práve jedna správna. Skôr, ako Mr. Miro napíše svoju odpoveď, je schopný pri každej otázke zistiť všetky odpovede ostatných študentov. Potom, čo všetci študenti (vrátane Mr. Mira) napíšu svoju odpoveď, skúšajúci ohlási správnu odpoveď a pokračuje ďalšou otázkou. Správna odpoveď je hodnotená 0 bodmi a nesprávna -2 bodmi, avšak nesprávna odpoveď Mr. Mira je hodnotená len -1 bodom, lebo Mr. Miro hekol hodnotiaci systém. Taktiež si Mr. Miro pri hekovaní nastavil 2^{n-1} bodov, pričom ostatní študenti začínali s 0 bodmi. Dokážte, že Mr. Miro môže zahlásiť: „Easy!“ a isto vie v teste skončiť najlepšie spomedzi všetkých študentov bez ohľadu na to, koľko otázok má test.

Návody a videonávody k úlohám

Po termíne série zverejňujeme na našej stránke `www.kms.sk` medzi novinkami návody k úlohám. Pomôžu vám doriešiť úlohy, s ktorými ste si nevedeli rady. Taktiež vám môžu pomôcť videonávody, ktoré nájdete na našom YouTube kanáli `www.youtube.com/user/KorMatSem`.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame Zbierku KMS, v ktorej nájdete užitočné metódy riešenia úloh a taktiež aj výber úloh z minulých ročníkov KMS. Môžete ju nájsť na stránke `kms.sk/zbierka`.

Všetky úlohy, ktoré sa v KMS vyskytli, spolu so vzorovými riešeniami môžete nájsť v našom archíve na `www.kms.sk/archiv`. Pri riešení týchto príkladov a čítaní vzorových riešení isto získate užitočné skúsenosti.

Množstvo ďalších úloh spolu s užitočnými textami, ktoré uspokoja aj náročnejších riešiteľov, môžete nájsť v archíve českého Matematického korespondenčního semináře na adrese `http://mks.mff.cuni.cz/archive/archive.php`

Partneri

Termín odoslania riešení: **9. október 2017** (pre zahraničie 6. október 2017)

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`