Zadania 2. kola zimnej časti KMS 2017/2018

Kategória ALFA

<u>Úloha č. 1:</u> ($\kappa \leq 1$)
Mr. Miro je slávny svojou dokonalou dedukciou. Jeden známy mu raz rozprával o rovnobežníku, ktorý bol rozdelený priamkou na dva štvoruholníky. Sotva prezradil, že tieto dva štvoruholníky majú rovnaký obsah, Mr. Miro hneď hovoriac „Easy!“ doplnil, že v takom prípade musia isto mať aj rovnaký obvod. Dokáže, že Mr. Miro mal pravdu.

<u>Úloha č. 2:</u> ($\kappa \leq 2$)
O sláve Mr. Mira sa dopočuli aj vo Farebnom meste. Zavolali ho, aby im pomohol navrhnúť linky MHD. Vo Farebnom meste majú každú ulicu vymaľovanú jednou z troch farieb: červenou, zelenou alebo modrou. Každá ulica je obojsmerná a spája práve dve križovatky. Z každej križovatky vychádzajú práve tri ulice, z každej farby jedna. Každá linka MHD má cyklickú trasu. Nemá teda východziu a konečnú zastávku, ale chodí dokola po svojej trase. Pri jednom opakovaní trasy nesmie dvakrát prejsť tou istou ulicou. Dokážte, že je možné v meste zaviesť linky MHD tak, že každou ulicou budú premávať práve dve linky MHD.

<u>Úloha č. 3:</u> ($\kappa \leq 3$)
Agenti C. S. I. Žilina vypočúvajú ťažkého zločinca, ktorý im nechce nič prezradiť. Preto si na pomoc zavolali Mr. Mira. Všetko, čo Mr. Miro potrebuje, je psychicky zničiť zločinca nasledujúcou hrou.
Zločinec si tajne myslí 8 políčok na šachovnici 8×8, pričom žiadne dve neležia v rovnakom riadku ani v rovnakom stĺpci. Potom má Mr. Miro sériu pokusov. Jeden pokus spočíva v tom, že Mr. Miro umiestni 8 veží na šachovnicu tak, aby sa žiadne dve neohrozovali. Následne zločinec ukáže, ktoré z veží sa nachádzajú na políčkach, na ktoré myslí. Ak zločinec ukáže na párny[1] počet veží, tak Mr. Miro vyhráva. V opačnom prípade sa veže odstránia zo šachovnice a Mr. Miro má ďalší pokus. Určte najmenší počet pokusov, po ktorých vie Mr. Miro určite vyhrať.

<u>Úloha č. 4:</u> ($\kappa \leq 4$)
Mr. Miro bol pozvaný na párty dlhorukých basketbalistov. Všetkých 2017 účastníkov párty si posadalo za okrúhly stôl, každý s pohárikom v ruke. Každú sekundu si štrngnú pohárikmi, pričom dodržiavajú nasledovné dve pravidlá:

(i) Necinkajú si poháriky do kríža.
(ii) V danej sekunde si každý môže cinknúť nanajvýš raz.

Za koľko najmenej sekúnd si môže cinknúť každý s každým?

<u>Úloha č. 5:</u> ($\kappa \leq 7$)
Betka upiekla pre Mr. Mira koláč, aby bol Mr. Miro spokojný. Koláč má tvar trojuholníka s dĺžkami strán 19, 20 a 21 cm. Chce ho rozrezať pozdĺž jednej priamky na dva kusy a uložiť ich na kruhový tanier tak, aby sa neprekrývali ani nevyčnievali z taniera. Určte minimálny priemer taniera, pre ktorý sa to môže Betke podariť.

<u>Úloha č. 6:</u>
Mr. Miro je osvedčený detektív, takže pomáha pri pátraní kombinačných čísel. Nájdite dvojicu prirodzených čísel n a k takú, aby kombinačné číslo $\binom{n}{k}$ bolo deliteľné tisícimi a navyše

a) číslo n bolo najmenšie možné,
b) súčet $n + k$ bol najmenší možný.

Poznámka. Kombinačné číslo $\binom{n}{k}$ označuje počet spôsobov, ako vybrať z n predmetov k predmetov, pričom nám nezáleží na poradí. Možno ho vypočítať ako

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}.$$

<u>Úloha č. 7:</u>
Mr. Miro sa vo voľnom čase zaoberá medziľudskými pomermi. Pomery v geometrii sú však preňho easy, tie prenecháva vám.
Majme trojuholník ABC s opísanou kružnicou k. Dotyčnice ku kružnici k v bodoch A a B sa pretínajú v bode T. Kružnica opísaná trojuholníku ABT pretína priamky BC a AC postupne v bodoch D a E ($D \neq B$ a $E \neq A$). Priamky CT a BE sa pretínajú v bode F. Predpokladajme, že bod D je stredom úsečky BC. Určte pomer $|BF| : |BE|$.

[1] Nula je párne číslo.

Kategória BETA
Úlohy číslo **4, 5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Povesť Mr. Mira sa doniesla až do zahraničia. Zavolal si ho Jaromír Jágr, aby mu pomohol s výzdobou kuchyne. Jágr má v kuchyni vykachličkovaný štvorec $n \times n$ štvorcovými kachličkami 1×1. Chce ho vyzdobiť pomocou niekoľkých pravouhlých rovnoramenných trojuholníkov s preponou dĺžky 2, ktorých vrcholy sa budú nachádzať v mrežových bodoch štvorčekovej siete, ktorú vytvárajú kachličky. Navyše každá strana kachličky sa musí nachádzať práve v jednom trojuholníku (vnútri neho alebo na okraji). Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je to možné.

Úloha č. 9:
Mr. Miro je spokojný, keď je najedený. Okrem toho je spokojný aj vtedy, keď nájde tri body ležiace na jednej priamke.
Majme trojuholník ABC. Označme A_1, B_1, C_1 postupne body dotyku jeho vpísanej kružnice so stranami BC, AC, AB. Nech O a I sú postupne stredy kružnice opísanej a vpísanej trojuholníku ABC a H_1 je ortocentrum trojuholníka $A_1B_1C_1$. Dokážte, že body O, I, H_1 ležia na jednej priamke.

Úloha č. 10:
Mr. Mira pozvali do školy na besedu. Pre žiakov si chce pripraviť nasledovnú úlohu. Povie im, že si myslí monický polynóm[2] stupňa 2017 s celočíselnými koeficientmi. Potom im povie k celých čísel n_1, n_2, $\ldots$, n_k, hodnotu súčinu $P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_k)$ a „Easy!“ Úlohou žiakov je nájsť polynóm, ktorý vyhovuje týmto podmienkam. Mr. Miro navyše chce, aby existoval len jeden polynóm, ktorý vyhovuje spomenutým podmienkam. Nájdite najmenšie prirodzené číslo k, pre ktoré sa Mr. Mirovi môže podariť pripraviť takúto úlohu.

Návody a videonávody k úlohám

Po termíne série zverejňujeme na našej stránke `www.kms.sk` medzi novinkami návody k úlohám. Pomôžu vám doriešiť úlohy, s ktorými ste si nevedeli rady. Taktiež vám môžu pomôcť videonávody, ktoré nájdete na našom YouTube kanáli `www.youtube.com/user/KorMatSem`.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame Zbierku KMS, v ktorej nájdete užitočné metódy riešenia úloh a taktiež aj výber úloh z minulých ročníkov KMS. Môžete ju nájsť na stránke `www.kms.sk/zbierka`.
Všetky úlohy, ktoré sa v KMS vyskytli, spolu so vzorovými riešeniami môžete nájsť v našom archíve na `www.kms.sk/archiv`. Pri riešení týchto príkladov a čítaní vzorových riešení isto získate užitočné skúsenosti.
Množstvo ďalších úloh spolu s užitočnými textami, ktoré uspokoja aj náročnejších riešiteľov, môžete nájsť v archíve českého Matematického korespondenčního semináře na adrese `http://mks.mff.cuni.cz/archive/archive.php` `www.kms.sk/kniznica`.

Partneri

Termín odoslania riešení: **6. november 2017** (pre zahraničie 3. november 2017)
Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`

[2]Monický polynóm je polynóm s vedúcim koeficientom 1, teda v tvare $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$.