Korešpondenčný matematický seminár
XXXIX. ročník, 2017/2018
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

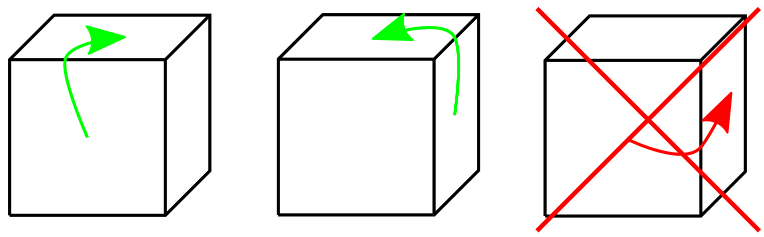
# Zadania 3. kola zimnej časti

Termín odoslania 04. 12. 2017 (pre zahraničie 1. 12. 2017)

## 3.1 Kocka Miestami Sladká ($\kappa \leq 1$)

kategória **alfa**

Kuchárka vyryla do kocky cukru dierky a spravila si z nej tak hraciu kocku. Potom sa ju snažila pootáčať, aby vyzerala pekne. Kocka vyzerá pekne, keď má na vrchu šestku a na jej prednej strane (otočenej ku kuchárke) je štvorka. Kuchárka môže otáčať kockou okolo všetkých hlavných osí okrem vertikálnej (pozri obrázok), a to vždy len o 90°. Koľko najmenej otočení potrebuje, aby vedela s určitosťou, že kocka bude vyzerať pekne, nech je na začiatku otočená ľubovoľne?



## 3.2 Kvôli Mastnému Soté ($\kappa \leq 2$)

kategória **alfa**

Jurkovi nechutilo soté, čo mal na obed, tak namiesto jedenia obdivoval svoju tácku. Tácka má tvar šesťuholníka $ABCDEF$ a je položená na kruhovom obruse tak, že všetky vrcholy šesťuholníka $ABCDEF$ ležia na jeho obvode. Jurko si začal po tácke a po stole kresliť a označil si priesečník priamok $AC$ a $FD$ ako $P$ a priesečník priamok $AE$ a $BF$ ako $Q$. Potom si všimol, že platí $|BF| = |BD|$, $|AC| = |CE|$, $|PA| = |PF|$ a že priamka $PQ$ je osou uhla $APF$. Zistite pomer obsahov trojuholníkov $ACE$ a $BDF$.

## 3.3 Kamilka Musí Sedieť ($\kappa \leq 3$)

kategória **alfa**

Kamilka už dojedla obed, ale musí ešte čakať, kým pani učiteľka donúti Jurka aspoň čosi zjesť. Našťastie si na jedálenskom obruse našla štvorčekovú mriežku rozmerov $2 \times 13$. Zobrala si svojich 13 lístkov na obed s číslami 1, 2, …, 13 a uložila ich do spodného riadku mriežky v tom istom poradí, na každé políčko práve jeden lístok. Potom začala lístky presúvať. V jednom ťahu môže presunúť lístok do niektorého vedľajšieho prázdneho políčka (hore, vľavo, vpravo alebo dole). Koľko najmenej ťahov potrebuje Kamilka spraviť, aby sa všetky lístky nachádzali v spodnom riadku a v opačnom poradí (13, 12, …, 1)?

## 3.4 Korenička, Makovnička, Soľnička ($\kappa \leq 4$)

kategórie **alfa** a **beta**

Tomáško miluje, keď má na stole systém a poriadok. Preto si na obede uložil lyžičku, vidličku, nožík, koreničku a soľničku postupne do bodov $L$, $V$, $N$, $K$ a $S$. Vytvoril tak z príboru rovnoramenný trojuholník $LVN$ so základňou $VN$. Body $K$ a $S$ sa nachádzali postupne na stranách $LV$ a $LN$. Všetko bolo navrhnuté tak, že osi uhlov $VKS$ a $KSN$ sa preťali v bode $M$, ktorý ležal na základni $VN$. Nakoniec umiestnil Tomáško do bodu $M$ makovničku. Dokážte, že bod $M$ sa nachádza v strede základne $VN$.

## 3.5 Keď Musíš Stáť ($\kappa \leq 7$)

kategórie **alfa** a **beta**

Pred jedálňou je niekoľko vešiakov, ktoré sú očíslované *za sebou idúcimi* celými kladnými číslami (nemusia začínať jednotkou). Každý vešiak je buď červenej, alebo modrej farby, pričom z každej farby sa tam nachádza aspoň jeden vešiak. Števko čakajúc v rade na obed spočítal súčet najmenšieho spoločného násobku čísel modrých vešiakov a najmenšieho spoločného násobku čísel červených vešiakov. Je možné, že dostal mocninu čísla 2?

## 3.6 Kaša Musí Stuhnúť

kategórie **alfa** a **beta**

Do cesta ide $l$ lásky, $d$ droždia a $o$ univerzálnej hnedej omáčky, kde $l$, $d$, $o$ sú rôzne nezáporné reálne čísla. Cesto je tuhé, ak platí

$$\frac{l^2}{(d-o)^2} + \frac{d^2}{(o-l)^2} + \frac{o^2}{(l-d)^2} > 2.$$

Dokážte, že cesto bude tuhé vždy bez ohľadu na použité množstvo surovín.

## 3.7 Kúp Mac Sebe

kategórie **alfa** a **beta**

Vedúca jedálne si kúpila nový Mac. Avšak v skutočnosti je $MAC$ uhol veľkosti $30°$ v trojuholníku $ABC$ s ťažnicou $AM$. Výška na stranu $AC$ z bodu $B$ pretína stranu $AC$ v bode $H$. Priamka cez bod $M$, ktorá je kolmá na priamku $AM$, pretína polpriamku $HB$ v bode $K$. Dokážte, že $|AK| = |BC|$.

## 3.8 Kučeravý Maťko Sklerotický

kategória **beta**

Vodka došiel do jedálne a zabudol tam zadania tohto kola KMS. Kuchárky zaujala najmä úloha 9. Úloha 8 však znie takto: Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že $n + f(m)$ delí $f(n) + nf(m)$, pre všetky kladné celé čísla $m$, $n$.

## 3.9 Kuchárky Montujú Svetlá

kategória **beta**

Tuto je spomínaná úloha, čo zaujala kuchárky. Vďaka nej totiž môžu zoptimalizovať osvetlenie v jedálni. Linoleum na podlahe jedálne tvorí štvorčekovú mriežku $m \times n$ štvorčekov. V každom štvorčeku sa nachádza jeden stôl. Osvetlenie jedálne zabezpečujú lampy, ktoré sa nachádzajú v niektorých mrežových bodoch mriežky (vrátane tých na obvode, všetkých mrežových bodov je teda $(m+1)(n+1)$). Každá lampa osvetľuje stoly na tých štvorčekoch, v ktorých rohoch sa nachádza. V závislosti od prirodzených čísel $m$, $n$ nájdite najmenší počet lámp potrebný na to, aby každý stôl bol osvetlený aspoň dvomi lampami.

## 3.10 Kečupová Maľba Snov

kategória **beta**

V jedálni urobili tety kuchárky langoše. Kuchárka Betka sa oduševnene pustila do kečupomaľby langoša. Najprv do kružnice $l$, ktorá ohraničuje langoš, vpísala trojuholník $ABC$ s pravým uhlom pri vrchole $A$. Ďalej urobila dotyčnicu ku kružnici $l$ v bode $A$, ktorá preťala priamku $BC$ v bode $P$. Stred kratšieho oblúka $AB$ kružnice $l$ označila ako $M$. Pokračovala priamkou $PM$, ktorá druhýkrát preťala kružnicu $l$ v bode $Q$. Svoje umenie zakončila dotyčnicou ku kružnici $l$ v bode $Q$, ktorá preťala priamku $AC$ v bode $K$. Síce plno kečupu skončilo mimo taniera, ale Betka vie, že jej umelecké dielo je to pravé. Dokážte, že uhol $PKC$ je pravý.