



Zadania 1. kola letnej časti

Termín odoslania 05. 03. 2018 (pre zahraničie 02. 03. 2018)

1.1 Kúsok Modifikovaný Symbol ($\kappa \leq 1$)

kategória **alfa**

Harry je fanúšik Harryho Pottera a prial si pod stromček symbol darov smrti. Pod stromčekom si našiel rovnostranný trojuholník ABC s vpísanou kružnicou k a rovnostranný trojuholník DEF , ktorého opísaná kružnica je tiež kružnica k . Harry bol smutný, lebo takto nevyzerá symbol darov smrti. No aspoň môže porovnať obsahy trojuholníkov. Zistite, koľkokrát je obsah trojuholníka ABC väčší ako obsah trojuholníka DEF .

1.2 Kosáka Mučí Sudosť ($\kappa \leq 2$)

kategória **alfa**

Pán Kosák nemá rád párne čísla, preto kúpil svojim deťom pod stromček rastúcu postupnosť

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 31, 33, \dots,$$

ktorá obsahuje všetky kladné celé čísla zložené len z nepárnych cifier. Nájdite 2018. člen tejto postupnosti.

1.3 Koľko Medovníkov Spapáš? ($\kappa \leq 3$)

kategória **alfa**

Všeobecný slovenský chudobný študent chcel kúpiť svojim malým súrodencom Adamovi a Eve hru. Nemal však veľa peňazí, tak im len vytlačil pravidlá. Na začiatku hry je na papieri napísaná postupnosť čísel 1, 2, 3, 4, ..., 19, 20. Hru začína Adam a následne sa strieda s Evou v ťahoch. Hráč vo svojom ťahu umiestni znamienko + alebo - pred niektoré číslo, ktoré ešte nemá znamienko. Keď už všetkých 20 čísel má znamienko, hra končí. Potom Eva zje toľko medovníkov, aká je absolútna hodnota súčtu čísel na papieri.

Eva chce zjesť čo najviac medovníkov a Adam chce, aby ich Eva zjedla čo najmenej. Nájdite najlepšiu stratégiu pre Adama a najlepšiu stratégiu pre Evu.¹ Koľko medovníkov spapá Eva, ak ona aj Adam budú hrať podľa svojich najlepších stratégií?

1.4 Kritérium Množstva Sladkostí ($\kappa \leq 4$)

kategórie **alfa a beta**

Niektoré deti dostávajú darčeky podľa toho, ako boli dobré. V rodine Racionálnych však dostáva ich synček Racko darčeky podľa počtu racionálnych čísel. Najprv dostane od rodičov tabuľku 50×50 . Potom Racko označí jej riadky číslami a_1, a_2, \dots, a_{50} a stĺpce číslami b_1, b_2, \dots, b_{50} , pričom týchto 100 čísel je navzájom rôznych a práve 50 z týchto 100 čísel je racionálnych. Potom umiestni do políčka v i -tom riadku a j -tom stĺpci číslo $a_i + b_j$. Racko dostane pod stromček darček za každé racionálne číslo v tabuľke. Zistite, koľko najviac darčiek môže Racko dostať pod stromček.

1.5 Koule Mi Spadla ($\kappa \leq 7$)

kategórie **alfa a beta**

Nešikovná Miladka rozbila pri zdobení stromčeka vianočnú guľu. Na zemi tak skončilo veľa ostrých črepov. Medzi nimi sa nachádzal aj ostrouhlý trojuholník ABC . Os uhla BAC pretínala stranu BC v bode D . Nech k je

¹Najlepšia stratégia pre Evu je taká stratégia, ktorou vie Eva zaručiť, že zje aspoň m medovníkov bez ohľadu na to, ako hraje Adam. Navyše, m je najväčšie možné. Obdobne, najlepšia stratégia pre Adama je taká stratégia, ktorou vie Adam zaručiť, že Eva zje nanajvýš n medovníkov bez ohľadu na to, ako ona hraje. Navyše, n je najmenšie možné.

kružnica opísaná trojuholníku ABD a priamka p je kolmica na priamku AD prechádzajúca bodom B . Miladka si označila E priesečník kružnice k a priamky p rôznej od bodu B a ďalej stred kružnice opísanej trojuholníku ABC ako O . Dokážte, že body A , O , E ležia na jednej priamke.

1.6 Kde Mám Soby?!

kategórie **alfa a beta**

Santa Claus má kvôli lepšej prehľadnosti očíslované soby kladnými celými číslami. Sob číslo a môže cváľať vedľa soba b práve vtedy, keď platí

$$a^3 + b^3 = a^2 + 42ab + b^2.$$

Nájdite všetky dvojice sobov (a, b) , ktoré môžu cváľať vedľa seba.

1.7 Klaus, Mikuláš, Santa

kategórie **alfa a beta**

Dostali ste od Ježiška darček, ktorý ste chceli? To je síce pekné, ale viete, koľko práce s tým Ježiško má? Ježiško má pripravených m rôznych darčiekov, z každého jeden kus. Na svete je n detí ($n \leq m$). Pre kladné celé číslo $i \leq n$, i -te dieťa má z Ježiškových m darčiekov vyhladených d_i darčiekov, po ktorých túži ($1 \leq d_i \leq m$). Ježiško vie, že platí

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_n} \leq 1.$$

Dokážte, že Ježiško môže rozdať deťom po jednom darčeku tak, aby každé dieťa dostalo darček, po ktorom túži.

1.8 Kružnica Majestátnych Sviečok

kategória **beta**

Ku správnej štedrej večeri patrí adventný veniec. Najlepšie taký, ktorý má tvar kružnice k , na ktorej ležia sviečky v štyroch rôznych bodoch A , B , C , D v tomto poradí. Ďalej polpriamky AB a DC sa pretínajú v bode M a polpriamky BC a AD sa pretínajú v bode N . Navyše platí, že $|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle ANM|$ a $|BC| = |CN|$. Prečo je takýto veniec najlepší? Lebo body M , N sú rovnako vzdialené od stredu kružnice k . Dokážte to!

1.9 Kvalitnejší Mirov Seminár

kategória **beta**

Miro dostal pod stromček nasledujúcu funkcionálku, aby si tým skvalitnil svoj seminár. Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x, y platí

$$f(x + yf(x)) = f(xf(y)) - x + f(y + f(x)).$$

1.10 Komunikácia Môjho Svetonázoru

kategória **beta**

V KMS je niekoľko vedúcich a niektoré dvojice sa spolu kamarátia. Namiesto toho, aby si užívali pokojné Vianočné sviatky, sa radšej hádajú, či je krajšia fialová alebo modrá farba. Na začiatku si každý vedúci myslí, že krajšia je fialová. Občas sa stane, že jeden vedúci zorganizuje stretnutie, ktorého sa zúčastní on a všetci jeho kamaráti. Po tomto stretnutí sa všetkým zúčastneným vedúcim zmení názor. Je možné bez ohľadu na to, ako sa vedúci kamarátia, že po niekoľkých stretnutiach si budú všetci vedúci myslieť, že je krajšia modrá?