Korešpondenčný matematický seminár
XXXIX. ročník, 2017/2018
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Riešenia 2. kola letnej časti

2.1 Králici Medzi Sysľami ($\kappa \leq 1$)

opravovala **Čeky**

Zadanie. *V cirkuse Crazy Monsters Circus predvádzajú číslo s králikmi a sysľami usporiadanými do kruhu. Všetky zvieratká sa pozerajú do stredu kruhu. Medzi zvieratkami je práve 7 králikov, ktoré majú po svojej pravici králika a práve 12 králikov, ktoré majú po svojej pravici sysľa. Ďalej, spomedzi ľubovoľných štyroch sysľov aspoň tri sysle majú po pravici králika. Koľko zvieratiek je v kruhu?*

Poďme sa pozrieť na to, ako by sme z informácií o zvieratkách mohli zistiť ich počet. Zvieratká stoja v kruhu, teda každé z nich má práve jedného pravého suseda – ním je buď králik alebo syseľ. Máme práve 7 králikov, ktorí majú po svojej pravici králika a práve 12 králikov, ktorí majú po svojej pravici sysľa. Z toho teda vieme, že v kruhu je práve $7 + 12 = 19$ králikov.

Aby mohlo platiť, že 12 králikov má po pravici sysľa, tak sysľov musí byť aspoň 12. Posledná informácia, že spomedzi každých štyroch sysľov majú aspoň traja po pravici králika, nám pomôže určiť všetky možné počty sysľov. Aby to platilo, môže existovať najviac jeden syseľ, ktorý nemá po pravici králika. Ak by totiž králika po pravici nemali dva (alebo viaceré) sysle, stačilo by k nim do štvorice pridať ľubovoľných dvoch sysľov a podmienka by nebola splnená.

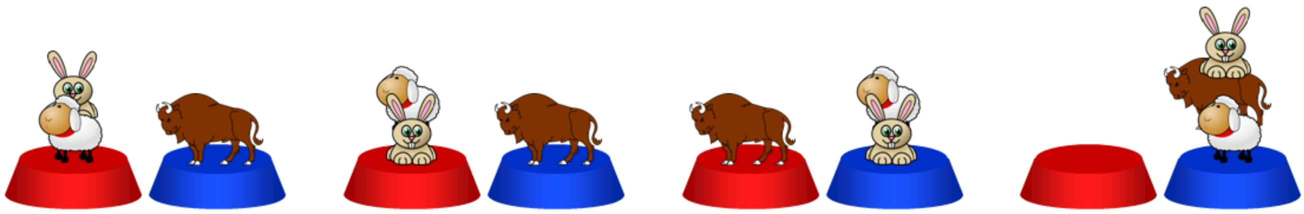
Počet sysľov, ktorí po pravici nemajú králika teda môže byť len 0 alebo 1, čo znamená, že sysľov je dokopy 12 alebo 13. Ak k nim pripočítame 19 králikov, dostávame dve riešenia úlohy – v kruhu je 31 alebo 32 zvieratiek.

2.2 Krejzy Monstr Sirkus ($\kappa \leq 2$)

opravoval **Dominik**

Zadanie. *Crazy Monsters Circus vlastní n zvieratiek. Predvádzajú s nimi akrobatické kúsky na červenom a modrom podstavci, na ktoré sa zvieratká stavajú do rôznych pozícií. Jedna pozícia vyzerá nasledovne: Všetky zvieratká sú rozdelené na dve skupiny. Jedna skupina tvorí vežu na červenom podstavci, druhá na modrom podstavci. Žiadne zvieratko neostane mimo. Veža z k zvieratiek vyzerá tak, že prvé zvieratko stojí na podstavci, druhé stojí na prvom zvieratku, tretie na druhom a tak ďalej až k-te zvieratko stojí na $(k-1)$-vom zvieratku. V závislosti od kladného celého čísla n určte, koľko rôznych pozícií môžu zvieratká zaujať.*

Pozície, ktoré sa líšia usporiadaním zvieratiek na podstavcoch, pokladáme za rôzne. Pre lepšiu názornosť na obrázku nižšie uvádzame zopár (nie nutne všetky) pozícií pre 3 zvieratká. Všimnite si, že všetky pozície sú rôzne.



V úlohách, ktoré hľadajú všeobecný vzorec pre n je vhodné najprv sa pozrieť, ako nám výsledok vychádza pre malé hodnoty, napr. $n = 1, 2, \cdots$. To nám môže dosť pomôcť v nájdení všeobecného vzorca, no nie je to všetko. Nemôžeme len tak povedať, že pre $n = 1, 2$ to platí, a teda to bude platiť vždy. Potrebujeme ukázať, že to naozaj tak bude vo všeobecnosti, čo si aj ukážeme. Okrem toho ďalším vhodným postupom môže byť aj matematická indukcia. Pre tých, čo o nej doteraz nepočuli, článok o nej nájdete napríklad v Zbierke KMS, ktorá je dostupná aj online.

Pozrime sa teda najprv na malé hodnoty n. Pre $n = 1$ máme len 2 možnosti, buď je zvieratko na modrom podstavci, alebo je na červenom. Ak vezmeme $n = 2$, začína to byť zaujímavejšie. Skúsme sa zamyslieť nad tým, kde môže byť druhé zvieratko. Druhé zvieratko môže buď ísť na iný podstavec ako prvé, alebo vyskočiť na chrbát prvého zvieratka, alebo môže vziať prvé zvieratko na plecia. Celkovo má teda 3 možnosti. Treba ale vziať do úvahy aj to, že prvé zvieratko má 2 možnosti, kam sa postaví. Ku každej z tých možností pripadajú 3 možnosti pre druhé zvieratko, teda dokopy je možností 6. Vypísaním možností sa dá prísť aj na to, že pre $n = 3$ je 24 možností, teda 4 možnosti pre tretie zvieratko.

Nejaký nápad na vzorec by sme takto mohli dostať (vyzerá to tak, že n-té zvieratko má vždy $n+1$ možností, teda celkový počet možností bude $(n+1)!$), no treba aj overiť, či je ozaj správny. Skúste si premyslieť, že v skutočnosti je rovnako správne rozmýšľať nad dvomi podstavcami ako nad jedným poradím zvieratiek, ktoré je v nejakom mieste oddelené čiarou, ktorá znamená predel medzi podstavcami.

Keď prichádza nové n-té zvieratko, v tomto poradí už ich je $n-1$. Koľkými spôsobmi môže byť zapísaných $n-1$ čísel (zvieratká) do poradia? Na prvé miesto $n-1$, na ďalšie $n-2$ a tak ďalej. Celkovo je to $(n-1)!$ Na koľko rôznych miest môže prísť nové zvieratko? Môže prísť na ľubovoľné miesto od 1 po n, teda má n možností. Zamyslieť sa však musíme ešte nad tým, že máme dva podstavce, čiže niekam musíme dať čiaru. Podobnou úvahou ako pred chvíľou zistíme, že možností pre čiaru je $n + 1$. A to je všetko, máme n zvieratiek na dvoch podstavcoch. Koľko teda bolo možností pre n zvieratiek?

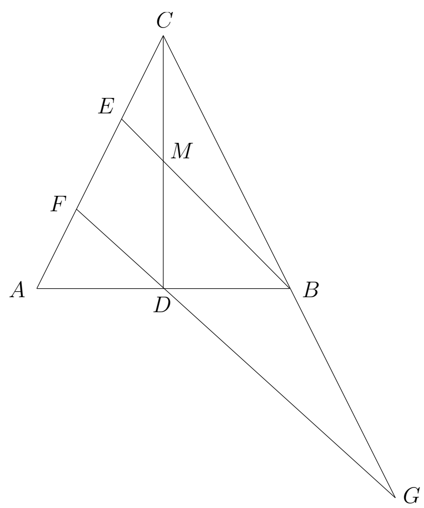
Pre n zvieratiek je $(n-1)! \cdot n \cdot (n+1) = (n+1)!$ možností.

2.3 Kostra Mohutného Stanu ($\kappa \leq 3$)

opravovali **Adam** a **Kika V.**

Zadanie. *Čo vám napadne, keď sa pozriete na cirkusový stan? Predsa rovnoramenný trojuholník, napríklad takýto. V rovnoramennom trojuholníku ABC so základňou AB označíme D pätu výšky z bodu C na stranu AB. Stred strany CD označíme M. Priamka BM pretína stranu AC v bode E. Dokážte, že $2 \cdot |CE| = |AE|$.*

Pri takýchto úlohách je vždy dobrý začiatok skúsiť si do obrázka niečo dokresliť a potom skúmať, či tam niečo zaujímavé nevidíme. Spôsobov, ako do obrázka niečo dokresliť, je mnoho a niektoré dávajú väčší zmysel ako iné. V tomto konkrétnom prípade dávalo zmysel veľa rôznych dokreslení, my si ukážeme dve z nich.



Najprv skúsime dokresliť priamku rovnobežnú s úsečkou EB prechádzajúcu bodom D. Bod, v ktorom pretne stranu trojuholníka AC, si nazveme F a bod, v ktorom pretne predĺženú stranu BC, nazveme G. Čo v takom-to obrázku vidíme? Viacero trojuholníkov vyzerá podobne, napríklad taký $\triangle MCE$ bude podobný s $\triangle DCF$ podľa vety *uu* . Keďže úsečky DF a ME sú rovnobežné, veľkosti uhlov FDC a EMC sú rovnaké, a uhol FCD je spoločný. Vidíme, že trojuholník MCE je menší, no vieme ho natiahnúť tak, aby sa prekryl s (zobrazil sa na) trojuholníkom DCF.

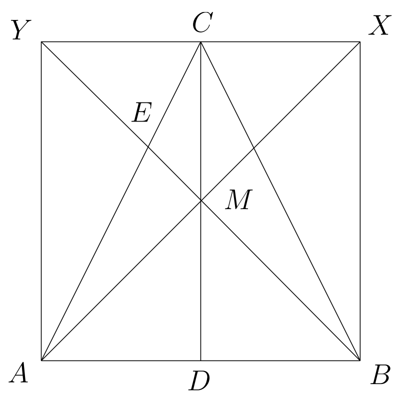
Zaujíma nás ako veľmi sa $\triangle MCE$ pri tom zväčší, alebo inak povedané koľkokrát sú strany $\triangle DCF$ dlhšie ako im prislúchajúce strany $\triangle MCE$. Nie je to príliš náročné, keďže M leží v strede DC, strana DC bude dvakrát dlhšia ako MC. Pozrieme sa teda na stranu AC ktorá nás podľa zadania zaujíma, a s tým čo sme zistili vieme povedať, že strana FC je dvakrát dlhšia ako strana EC a teda platí, že EC a FE sú rovnako dlhé.

Fajn, toto však nie sú jediné podobné trojuholníky na obrázku, platí to aj pre $\triangle ADF$ a $\triangle ABE$, znova podľa *uu* ($|\sphericalangle AFD| = |\sphericalangle AEB|$ a $|\sphericalangle EAB|$ je spoločný). Znovu sa zamyslíme ako veľmi treba $\triangle ADF$ natiahnúť aby bol rovnako veľký ako $\triangle ABE$ – a vidíme že stačí potiahnúť bod D do bodu B. Trojuholník ABC je rovnoramenný, bod D leží v strede strany AB, a teda platí $|AB| = 2 \cdot |AD|$. Pomer dĺžok prislúchajúcich strán $\triangle ABE$ a $\triangle ADF$ je teda znova 2, a znovu sa môžme pozrieť na stranu AC. Platí $|AE| = 2 \cdot |AF|$, takže $|AF| = |EF|$.

A už máme všetko, čo potrebujeme, riešenie je zjavné. Platí $|AF| = |EF|$ a $|CE| = |EF|$, potom $|AF| = |EF| = |CE|$. Čiže $|AC| = 3 \cdot |CE|$ a $|AE| = 2 \cdot |CE|$.

Iné riešenie

Ako sme spomínali, ukážeme si dve riešenia, tu je druhé. Teraz využijeme symetriu rovnoramenného trojuholníka a dokreslíme si okolo neho obdĺžnik $ABXY$ tak, že bod C leží v strede strany XY. Bod M nám tak nejako intuitívne pripadá byť stredom nášho obdĺžnika, a bez väčšej námahy to aj vieme ukázať (nech sa páči). Úsečka BM začína vo vrchole obdĺžnika a pokračuje do jeho stredu, ak ju teda predĺžime bude z nej uhlopriečka a narazí na bod Y. Rovnako zakreslíme aj druhú uhlopriečku AX.



Teraz sa zamerajme na trojuholník AXY. Strana AC, ktorá nás podľa zadania zaujíma, spája jeho vrchol so stredom protiľahlej strany, bude teda ťažnicou. Bod M delí uhlopriečky na polovice a teda leží v strede AX. Z toho ale vyplýva že aj YM je ťažnica trojuholníka AXY. Bod, v ktorom sa pretínajú ťažnice, nazývame ťažiskom a v tomto prípade je to bod E. Vieme že ťažisko leží v dvoch tretinách ťažnice, čo je dosť príhodné lebo to priamo dokazuje že $|AE| = 2 \cdot |CE|$. A voilà, máme hotovo!

2.4 Kompozícia Mnohých Susedov ($\kappa \leq 4$)

opravovali **Dada** a **Kika Prš**

Zadanie. *V cirkuse Crazy Monsters Circus nepredvádzajú žiadne jednoduché čísla, ale zložené. Nech n je zložené kladné celé číslo. Pre každého vlastného deliteľa d (t. j. deliteľa rôzneho od n a 1) napíšeme na papier číslo $d + 1$. Nájdite všetky hodnoty n, pre ktoré sme na papier vypísali všetkých vlastných deliteľov nejakého prirodzeného čísla m.*

Na začiatok si ujasnime dve veci:

- *Zložené číslo* je také celé kladné číslo n, ktoré nie je *prvočíslom* a je rôzne od 1. Môžeme ho zapísať v tvare $n = a \cdot b$, kde a, b sú tiež celé kladné čísla rôzne od 1. (Príklad: $10 = 2 \cdot 5$.)
- *Vlastný deliteľ* je také celé kladné číslo d, ktoré delí zložené číslo n a je rôzne od 1 aj od n. (Príklad: 12 má vlastných deliteľov 2, 3, 4, 6.)

Našou úlohou je nájsť také číslo n, aby **všetky** jeho vlastné delitele d_i zväčšené o 1 boli **všetkými** vlastnými deliteľmi $d_i + 1$ iného zloženého čísla m. Nech teda $N = \{d_1, d_2, d_3, \dots, d_k\}$ je množinou všetkých vlastných deliteľov čísla n a $M = \{d_1 + 1, d_2 + 1, d_3 + 1, \dots, d_k + 1\}$ je množinou všetkých vlastných deliteľov čísla m. Keďže najmenší vlastný deliteľ čísla n je $d_1 \neq 1$ (pretože v tom prípade by nebol vlastným deliteľom), tak najmenší vlastný deliteľ čísla m je $d_1 + 1 \neq 2$, z čoho vyplýva, že číslo m nebude môcť byť deliteľné dvomi, čiže bude nepárne a jeho vlastnými deliteľmi môžu byť len **nepárne** čísla.

Ak všetky vlastné delitele čísla m sú nepárne, tak všetky vlastné delitele čísla n musia byť naopak **párne**.

Ďalej si uvedomme, že ak N obsahuje nejaké číslo $2^k \cdot p$, kde p je nepárne *prvočíslo*, tak musí obsahovať aj p, pretože aj to bude vlastným deliteľom čísla n. Lenže ak N obsahuje p, tak M obsahuje $p + 1$ a to je číslo párne (*nepárne číslo zväčšené o* 1 *je párne číslo*), čo je v rozpore s predchádzajúcim zistením, že vlastné delitele čísla m sú nepárne. Takže N nemôže obsahovať číslo tvaru $2^k \cdot p$.

Pre názornosť:

- 2
- $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$
- $6 = 3 \cdot 2$
- $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$
- $10 = 5 \cdot 2$
- $12 = 3 \cdot 2 \cdot 2$
- $14 = 7 \cdot 2$
- $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$
- …

Vidíme, že vhodné sú práve mocniny čísla 2. V konečnom dôsledku rovnako tak aj číslo n musí byť mocninou dvojky a platí, že ak $n = 2^k$, potom $N = \{2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{k-1}\} = \{2, 4, 8, \dots, 2^{k-1}\}$ a $M = \{3, 5, 9, \dots, 2^{k-1} + 1\}$.

Vezmime si teda $N = \{2\}$. Vtedy je $n = 4$, $M = \{3\}$ a $m = 9$. Ďalej ak $N = \{2, 4\}$, $n = 8$, potom $M = \{3, 5\}$ a $m = 15$. Ale ak $N = \{2, 4, 8\}$, $n = 16$, potom $M = \{3, 5, 9\}$, najmenší spoločný násobok týchto troch čísel je číslo 45, lenže to má vlastného deliteľa aj 15 a teda nie je splnená podmienka, že množina M obsahuje **všetky** vlastné delitele čísla m. Číslo 15 bude vždy vlastným deliteľom čísla m ak sú čísla 3, 5 a 9 jeho vlastnými deliteľmi, teda ak sú čísla 2, 4 a 8 vlastnými deliteľmi čísla n. Aby číslo 15 bolo v množine M, tak v množine N musí byť číslo 14. Avšak to už vieme, že takéto číslo byť v množine N nemôže. Teda žiadne ďalšie $n = 2^k$ nevyhovuje.

Pre každé ďalšie n nebude množina M spĺňať spomínanú podmienku a teda finálnym riešením sú hodnoty $n = 4$ a $n = 8$ a k nim prislúchajúce $m = 9$ a $m = 15$.

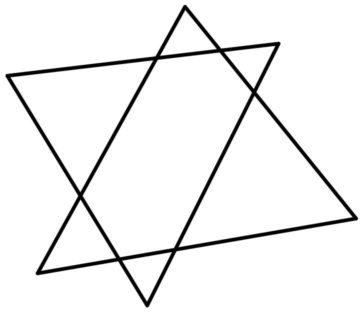
2.5 Koľko Miesta Separuješ? (κ ≤ 7)

opravovali **Kapitán D.** a **Slavo**

Zadanie. *V žiadnom správnom cirkuse nesmie chýbať vystúpenie, v ktorom sa niečo reže. V Crazy Monsters Circuse rozdeľujú neuveriteľnú vec – nekonečný papier. Cirkusant najprv nakreslí na nekonečný papier n trojuholníkov. Trojuholníky môžu byť rôzne a môžu sa prekrývať. Potom papier rozreže po každej strane trojuholníka (reže po úsečke, nie po priamke). V závislosti od kladného celého čísla n určte, koľko najviac kusov papiera tak vie cirkusant papier dostať.*

Máme n trojuholníkov na papieri. Čo nás zaujíma je, že koľko oblastí je týmito trojuholníkmi (ich obvodmi) ohraničených. Najskôr sa pozrime na to, aká môže byť vzájomná poloha týchto trojuholníkov. Najjednoduchšie, čo sa môže stať je, že sa vôbec neprekrývajú a teda pre n trojuholníkov dostávame za každý trojuholník jeden kus papiera, teda $n + 1$ kusov papiera (plus zvyšok). Ďalšia jednoduchá možnosť nastáva, ak sú všetky trojuholníky zhodné a položené na sebe. Vtedy dostaneme len 2 oblasti, ale keďže nás zaujíma, koľko najviac častí môžno získať, tak túto možnosť môžeme ignorovať.

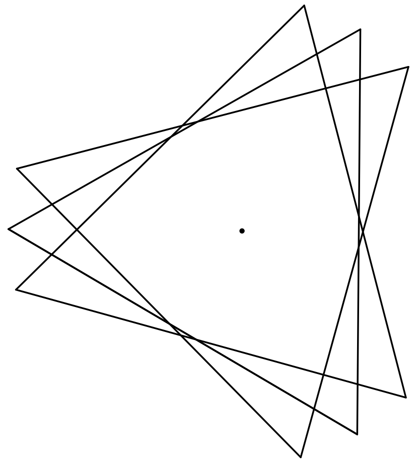
Získali sme nejaký spodný odhad na počet oblastí. To je na začiatok fajn, ale zrejme to nie je najlepšie umiestnenie. Je teda úplne na mieste položiť si otázku, čo by sa muselo stať, aby sme získali viac oblastí. Veľa možností, čo robiť, nemáme, skúsme umiestniť trojuholníky tak, aby sa pretínali. To nám pridá pár ďalších oblastí. Pozrime sa najprv na malé prípady, čo sa udeje, keď budu trojuholníky len dva. Po chvíľke skúšania dôjdeme k tomu, že vieme dostať najviac 8 oblastí. Napríklad takto:



Pozrime sa lepšie na to ako môže vzniknúť nová oblasť. Nová oblasť nám vznikne vtedy, keď niektorá zo strán trojuholníka pretne dvakrát iný trojuholník, lebo ho tým rozdelí na dve časti, alebo ak nejaký nejaký vrchol leží na strane iného trojuholníka. Rozmyslime si, že v takom prípade by sme mohli trojuholníky preusporiadať tak, aby sa na vzájomnej polohe všetkých iných trojuholníkov nič nezmenilo a počet oblastí by bol väčší (tento nový vrchol by sme posunuli tak, aby sa tieto trojuholníky preťali). Preto ďalej uvažujme len možnosť kedy žiadny vrchol neleží na strane iného trojuholníka. Jedna úsečka teda vie pretnúť trojuholník najviac dvakrát. Pozrime sa, čo sa môže stať, keď máme ľubovoľne položených n trojuholníkov a chceli by sme pridať $(n+1)$-vý .

Najviac oblastí dostaneme práve vtedy, ak každá strana novo pridaného trojuholníka pretne každý iný trojuholník práve dva krát, čo tak isto znamená, že každá zo strán pôvodných trojuholníkov dvakrát pretne náš novo pridaný trojuholník. Pôvodných strán máme $3n$, teda náš nový trojuholník vie delením pôvodných trojuholníkov pridať najviac $3n$ oblastí. Tak isto ale strany pôvodných trojuholníkov vedia pretnúť novo pridaný najviac dvakrát, teda dokopy to je $6n$. Oblasť ohraničenú novo pridaným trojuholníkom rátať nemusíme, lebo je už započítaná v spoločnom prieniku všetkých trojuholníkov. (Ak sa nám podarí trojuholník umiestniť tak, aby každá strana bola dvakrát pretnutá.)

Keďže pri jednom trojuholníku sú 2 oblasti, tak takýmto pridávaním trojuholníkov ich nebude viac ako $2 + 6 + 12 + \cdots + (6n - 6) = 2 + 6(1 + 2 + \cdots + (n - 1)) = 2 + 3n(n - 1)$. Ešte potrebujeme ukázať, že existuje rozloženie trojuholníkov, pre ktoré je možné daný počet oblastí dosiahnuť. Na to také rozloženie zostrojíme.



Vezmeme si rovnostranný trojuholník a ten n-krát otočíme okolo svojho ťažiska tak, aby trojuholníky spolu nesplynuli.

Iné riešenie

Pri skúšaní, ako dostať čo najviac oblastí, si môžeme všimnúť, že čím viac sa nám trojuholníky pretnú, tým viac oblastí dostaneme. Na to, aby sme mohli niečo také dokázať, by sa nám zišlo najprv poriadne uchopiť „pretnutie trojuholníkov“. Čo nám určí, ako veľa sa trojuholníky pretínajú? Napríklad priesečníky. Prečo by mal počet priesečníkov nejako súvisieť s počtom oblastí, ktoré dostaneme? Lebo vždy, keď sa nám niektoré dva trojuholníky pretnú, tak vznikne aj nová oblasť aj nové priesečníky.

Poďme skúsiť dokázať, že čím viac je priesečníkov, tým viac je oblastí. Táto úloha nám môže znieť povedome. Vzťah medzi počtom oblastí a počtom priesečníkov je zachytený Eulerovým vzorcom. Ten hovorí, že

počet hrán (úsečiek medzi vrcholmi a priesečníkmi) − počet vrcholov (priesečníkov) = počet oblastí − 2.

(Ak ste o ňom nepočuli, pozrite si to tu `https://sk.wikipedia.org/wiki/Rovinn%C3%BD_graf`.) No a teda prečo by sme mali chcieť, aby sme mali čo najviac priesečníkov? Pretože ak sa nejaké dve strany trojuholníka pretnú, tak za každú dvojicu pretnutých strán dostaneme síce jeden nový priesečník, ale zároveň dve nové hrany (úsečky). Teda za jeden nový priesečník dostávame navyše jednu oblasť.

Keďže každý priesečník pridáva 2 hrany, počet hrán sa dá vyjadriť ako $3n + 2$(počet priesečníkov). Po dosadení do Euklidovho vzorca dostávame, že: ($3n$ + 2(počet priesečníkov)) − (počet priesečníkov + počet vrcholov) = (počet oblastí) − 2, teda počet oblastí = $3n + 2 +$ (počet priesečníkov) − (počet vrcholov). Keďže vrcholov je $3n$, dostávame, že počet oblastí = 2 + počet priesečníkov. Stačí nám teda docieliť maximálny počet priesečníkov.

Dva trojuholníky sa môžu pretnúť najviac 6-krát (rozmyslite si). Ak by sa nám podarilo vymyslieť takú konštrukciu, že každá dvojica trojuholníkov sa pretína práve 6-krát a žiadne tri trojuholníky sa nepretínajú v jednom bode, dostaneme najväčší možný počet priesečníkov a teda aj oblastí. To, že to je naozaj možné vyplýva z konštrukcie, ktorá je rovnaká ako v predchádzajúcom riešení.

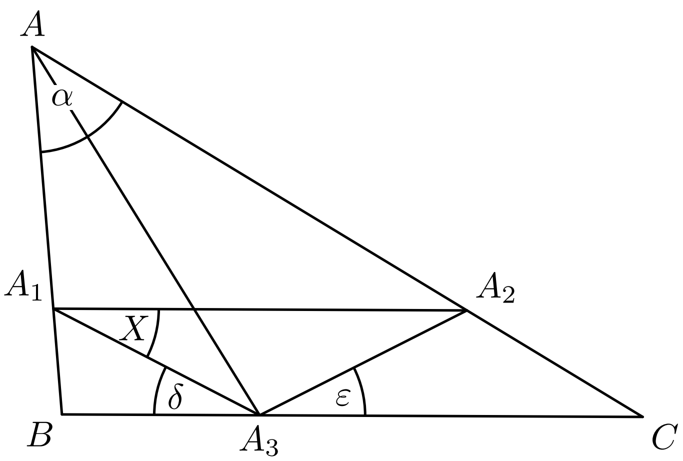
Vezmeme si rovnostranný trojuholník a ten n-krát otočíme okolo svojho ťažiska tak, aby trojuholníky spolu nesplynuli. (Rozmyslite si, že priesečníky dvoch rôznych dvojíc trojuholníkov nemôžu splynúť.) Ľahko overíme, že pre n vieme dostať najviac $n(n-1)3 + 2$ oblastí.

2.6 Krotiteľ Mystických Šeliem

opravovali **Marek** a **Tatiana**

Zadanie. *Cirkusový krotiteľ šeliem chová mystickú šelmu – trojuholník ABC. Body A_1, A_2 ležia postupne na stranách AB a AC tak, že priamky A_1A_2 a BC sú rovnobežné. Navyše, kružnica opísaná trojuholníku AA_1A_2 sa dotýka strany BC v bode A_3. Podobným spôsobom definujme body B_3 a C_3. Dokážte, že priamky AA_3, BB_3, CC_3 sa pretínajú v jednom bode.*

Treba dokázať, že tri priamky sa pretínajú v jednom bode. Akým štýlom sa to dá ukázať? Napríklad možno ukázať, že tam kde sa dve pretnú, sa pretína aj tretia. Ďalší postup je to previesť na problémy, ktoré sú už vyriešené, napríklad, že osi uhlov, osi strán, ťažnice alebo výšky trojuholníka sa pretínajú v jednom bode. Ak by naše priamky v skutočnosti reprezentovali niektorý zo spomínaných prípadov, boli by sme vyhrali. Na zistenie, či môžeme niečo také využiť, potrebujeme zistiť čosi viac o bodoch A_3, B_3 a C_3. Keď sa však zamyslíme, tak vieme vylučovaním možností prísť na to, že spomedzi vyššie uvedených je jediný vhodný kandidát priesečník osí uhlov. Môžete sa zamyslieť, prečo sme tie ostatné možnosti rýchlo zavrhli. Keďže by sme radi ukázali, že AA_3 je os uhla BAC, tak by sa patrilo ukázať rovnosť uhlov BAA_3 a A_3AC. Preto sa budeme ďalej zapodievať uhlami. Samozrejme, ak by sa nám nepodarilo ukázať, že je to os uhla, tak musíme skúsiť niečo iné (ale netreba sa vzdávať moc skoro).



Označme si uhly ako na obrázku. Ak by naša úsečka AA_3 bola v skutočnosti os uhla, tak uhly ε a δ by mali oba veľkosť $\frac{\alpha}{2}$. Tento poznatok máme z toho, že δ je úsekový uhol k uhlu A_1AA_3 a ε je úsekový uhol k uhlu A_3AA_2. [1] To by ale znamenalo, že $\varepsilon + \delta = \alpha$. Keď sa zamyslíme, tak toto tvrdenie je v skutočnosti pravdivé. Naše zamyslenie bude nasledujúce: Keďže body A, A_1, A_2, A_3 ležia na kružnici, tak $|\sphericalangle A_2A_3A_1| = 180° - \alpha$. A doplnok tohto uhla je α, ale zároveň aj súčet uhlov δ a ε. Čo podporuje naše podozrenie, že máme čo dočinenia s osou uhla. Avšak stále treba ukázať rovnosť uhlov δ a ε.

Rovnosť ukážeme prenášaním uhlov. Keďže uhol ε je úsekový uhol aj ku uhlu X tak sa veľkosti týchto dvoch uhlov rovnajú, $\varepsilon = X$. Lenže BC a A_1A_2 sú rovnobežky, takže vieme povedať, že $X = \delta$. Teda $\delta = X = \varepsilon$. Čo sme potrebovali dokázať.

Takže zhrňme si to. Keďže $\delta = \varepsilon$ a vieme, že $\delta + \varepsilon = \alpha$, vieme aj, že $\delta = \varepsilon = \frac{\alpha}{2}$. Vďaka úsekovosti δ či ε k uhlom A_1AA_3 či A_3AA_2 máme $|\sphericalangle A_1AA_3| = \delta = \frac{\alpha}{2} = \varepsilon = |\sphericalangle A_3AA_2|$. Teda máme čo dočinenia s osou uhla. Analogicky to spravíme pre priamky BB_3 a CC_3 a máme, že tri osi uhlov sa majú pretínať v jednom bode (v strede kružnice vpísanej trojuholníku ABC). A to je známe tvrdenie, na ktoré sa môžeme odvolať.

[1] Pokiaľ ti úsekový uhol nič nevraví môžeš si o ňom niečo prečítať v Zbierke KMS.

2.7 Kúzelníkove Magické Stĺpce

opravovali **Jožo** a **Maťo**

Zadanie. *Kúzelník predvádza nasledovné kúzlo. Ukáže publiku štvorčekovú tabuľku $n \times n$ políčok, ktorej dve políčka v protiľahlých rohoch sú zafarbené načierno a zvyšné políčka sú biele. Kúzelník si vie vyberať buď jeden riadok, alebo jeden stĺpec tabuľky a mávnutím paličky zmeniť farbu všetkým políčkam v ňom. V závislosti od celého čísla $n \geq 2$ určte, koľko najmenej ďalších políčok (t. j. okrem dvoch protiľahlých rohových, ktoré už sú zafarbené) musí kúzelník pred začiatkom kúzlenia zafarbiť načierno, aby potom mohol svojim kúzlením zafarbiť celú tabuľku nabielo.*

Celé riešenie bude spočívať v tom, že nájdeme taký spôsob používania kúziel, aby počet políčok, ktoré sa zmenia, bol minimálny. Teda do zmenených políčok budeme rátať aj tie dve, ktoré sú od začiatku čierne (ktoré musíme potom na konci odpočítať). Samozrejme, musíme tieto dve zafarbené políčka nejako zapojiť do našich úvah, aby sme vylúčili nulu ako minimálny počet zmenených políčok. Ak ukážeme, že najmenší počet políčok, ktoré kúzelník dokáže zmeniť, je m, tak budeme vedieť, že na začiatku potrebuje zafarbiť aspoň $m-2$ ďalších políčok načierno. Potom nám už len bude stačiť ukázať, že tabuľka s vhodnými $m-2$ dofarbenými políčkami ide vybieliť.

Na začiatku si všimnime, že ak použijeme kúzlo na ten istý riadok alebo stĺpec dvakrát, tak to má rovnaký efekt, ako keby sme ho ani nepoužili. Čiže môžeme to zúžiť na situáciu, kedy kúzlo použijeme na každý riadok maximálne raz.

Ak použijeme kúzlo na nejaké políčko dvakrát, tak ostane nezmenené. Z hľadiska počtu zmenených políčok nezáleží, či kúzlo použijeme na štvrtý alebo tretí riadok. Počet bude rovnaký, len ich pozícia bude iná. Čiže záleží akurát iba na počte zmenených riadkov (ktorý budeme označovať a) a stĺpcov (b).

Teraz využijeme, že na začiatku máme už dve políčka tabuľky čierne. Bez ujmy na všeobecnosti nech sú to ľavé horné a pravé dolné rohové políčko. Keďže ľavé horné políčko musíme zmeniť, tak vieme povedať, že z dvojice najvyšší riadok a najľavejší stĺpec musí byť použitý práve jeden. To isté platí aj pre pravý dolný roh, z čoho vyplýva $2 \leq a+b \leq 2n-2$.

V každom z a zmenených riadkov b políčok nezmenilo farbu a $n-b$ zmenilo farbu. Analogicky to platí aj pre stĺpce. Čiže počet zmenených políčok môžeme vyjadriť pomocou výrazu $a(n-b)+b(n-a)$. A tento výraz musíme minimalizovať za podmienky $2 \leq a+b \leq 2n-2$.

Ak si to upravíme do tvaru $n(a+b)-2ab$, tak môžeme jednoducho pozorovať, čo sa stane s počtom zmenených políčok. Ak a zväčšíme o jedna, tak počet sa zväčší o $[n(a+1+b)-2(a+1)b]-[n(a+b)-2ab]$, čo sa rovná $n-2b$. Podľa tohto úlohu prirodzene rozdelíme na 3 možnosti $b < n/2$, $b = n/2$ (len pre párne n), $b > n/2$. Ak $b < n/2$, tak zväčšovaním a sa celkový počet zväčšuje. Ak $b = n/2$, tak na a nezáleží, a ak $b > n/2$, tak sa zväčšením a sa počet zmenšuje. Z toho vyplýva, že chceme :

b:	$b < n/2$	$b = n/2$	$b > n/2$
a:	minimálne	nezáleží	maximálne

A keď opäť použijeme tú istú úvahu pre b, tak dostaneme ďalší riadok tabuľky :

b:	$b < n/2$	$b = n/2$	$b > n/2$
a:	minimálne	nezáleží	maximálne
b:	minimálne	n/2	maximálne

Čo presne znamená, že a a b majú byť minimálne? Hovorí nám to to, že ak vieme jedno z nich zmenšiť, tak dostaneme menší počet zmenených políčok. Preto sa určite najmenší počet zmenených políčok nachádzda v takých prípadoch, kde a ani b nevieme zmenšiť. Podobný význam má aj slovíčko maximálne. Teraz sa pozrime na prípady, ktoré sme dostali:

1. **b aj a sú minimálne.** Keďže $2 \leq a + b$, tak máme dve možnosti: $b = 2$, $a = 0$ kedy celkový počet prefarbených políčok bude $2n$ alebo $b = 1$, $a = 1$ celkový počet bude $2n - 2$.
2. **$b = n/2$ a $0 \leq a \leq n$.** Počet v tomto prípade bude $n^2/2$.
3. **b aj a sú maximálne.** Keďže $a + b \leq 2n - 2$, tak máme opäť dve možnosti: $b = n$, $a = n - 2$, kedy celkový počet prefarbených bude $2n$ alebo $b = n - 1$, $a = n - 1$ celkový počet bude $2n - 2$.

Čiže celkovo sme dostali, že môžeme zmeniť minimálne $2n-2$ políčok. A túto situáciu vieme naozaj dosiahnuť. Napríklad tak, že zafarbíme všetky políčka v prvom riadku a poslednom stĺpci okrem ľavého dolného rohu. A keďže dve políčka už sú zafarbené, tak kúzelník musel ofarbiť ešte minimálne $2n - 4$ políčok.

Iné riešenie

Prísť na spôsob, ako tabuľku vybieliť s dofarbením $2n - 4$ políčok na čierno je celkom jednoduché. Ukážeme si ešte iný spôsob, ako možno ukázať, že s menším počtom dofarbených políčok to nie je možné. Nebudeme pracovať so žiadnymi výrazmi (veď toto je úloha z kombinatoriky a nie algebry ;)), ale použijeme úvahy, ktoré sa často používajú pri úohách s tabuľkami (a aj inde). Tabuľku sa pokúsime rozdeliť na niekoľko častí tak, aby sme o každej časti vedeli povedať, že v nej musíme ešte zafarbiť aspoň jedno políčko. Potom pre všetky oblasti sčítame naše odhady (musíme si dať pozor na prekrývanie) a dostaneme dolný odhad na počet zafarbených políčok. Naše úvahy budú fungovať len pre $n \geq 4$. Pre $n \leq 3$ ľahko zvládneme získať sprvány dolný odhad (napr. vyskúšaním všetkých možností).

Políčko v r-tom riadku a s-tom stĺpci označíme ako (r, s). Uvažujme nasledovných $2n - 4$ štvoríc políčok:

- pre každé $i \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ štvoricu $(1,1)$, $(i,1)$, (i,i), $(1,i)$ ($n - 2$ štvoríc);
- pre každé $j \in \{2, 3, \ldots, n-2\}$ štvoricu $(j+1, j)$, (n, j), (n, n), $(j+1, n)$ ($n - 3$ štvoríc)
- a štvoricu $(2, n-1)$, $(n, n-1)$, (n, n), $(2, n)$.

Rozdelenie políčok do štvoríc pre $n = 7$ ilustruje nasledovný obrázok.

■	1	2	3	4	5	
1	1				10	10
2	6	2				6
3		7	3			7
4			8	4		8
5				9	5	9
	6	7	8	9	10	■

Keďže $n \geq 4$, okrem políčok $(1,1)$ a (n,n) nemajú tieto štvorice žiadne spoločné políčka. Každá štvorica pozostáva zo štyroch políčok tvoriacich prienik dvoch riadkov a dvoch stĺpcov. Každé mávnutie paličkou mení práve dve políčka z tejto štvorice alebo žiadne. Preto v každej tejto štvorici políčok sa partia počtu čiernych políčok nemení (premyslite si to). Na konci, v bielej tabuľke, má byť v každej štvorici nula čiernych políčok, čo je párny počet. Preto aj na začiatku musí byť v každej štvorici párny počet čiernych políčok. Avšak na začiatku sa v každej štvorici nachádza práve jedno čierne políčko. Teda kúzelník musí v každej štvorici zafarbiť ešte aspoň jedno políčko načierno. Vzhľadom na to, že okrem čiernych políčok $(1, 1)$ a (n, n) už štvorice nemajú ďalšie spoločné políčka, potrebuje kúzelník zafarbiť ešte aspoň $2n - 4$ políčok.

2.8 Konkurz Menejcenného Štvorca

opravoval **Pedro**

Zadanie. *Vystupujúci cirkusu majú zaujímavé vlastnosti, napr. vedia hltať meče. Prirodzené číslo a by tiež chcelo vystupovať v cirkuse. Chváli sa nasledovnou vlastnosťou: Pre ľubovoľné kladné celé číslo $n > 1$ má číslo $n^2a - 1$ deliteľa väčšieho ako 1, ktorý dáva zvyšok 1 po delení číslom n. Žiaľ, až taká zaujímavá vlastnosť to nie je. Dokážte, že číslo a je štvorec, t. j. druhá mocnina celého čísla.*

Pozrime sa najprv, či tvrdenie platí, keby sme ho sformulovali naopak... t. j. nech $a = s^2$ pre nejaké s prirodzené. Potom $n^2s^2 - 1 = (ns - 1)(ns + 1)$, kde $ns + 1 > 1$ spĺňa nami požadované vlastnosti. Vďaka tomuto zároveň máme lacno získaných nekonečno príkladov na čísla spĺňajúce zadanie.

Našou úlohou je však dokázať opačnú implikáciu. Nech teda pre všetky $n > 1$ existuje taký deliteľ $d > 1$ výrazu $n^2a - 1$, ktorý dáva zvyšok 1 po delení n. To ale znamená, že existuje také $k \in \mathbb{N}$, že $d = nk + 1 \mid n^2a - 1$. Z tejto deliteľnosti zároveň vidíme, že $k < na$.

Jednou zo základných vlastností deliteľnosti je, že ak pre celé čísla platí $x \mid y$, tak aj $x \mid y + zx$, kde z je ľubovoľné celé číslo. Toto viackrát aplikujeme na našu deliteľnosť:

$$nk + 1 \mid n^2a - 1 \Rightarrow nk + 1 \mid n^2a - 1 + nk + 1 = n(na + k) \Rightarrow nk + 1 \mid na + k$$

(lebo čísla n a $nk + 1$ sú nesúdeliteľné).

Potom ďalej

$$nk + 1 \mid na + k \Rightarrow nk + 1 \mid na + k - k(nk + 1) = n(a - k^2) \Rightarrow nk + 1 \mid k^2 - a.$$

Toto má platiť pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Zvoľme n „rádovo väčšie" ako a (to znamená niečo v zmysle $n > 100a + 1000$, ale pre účely tejto úlohy bude stačiť slovný popis, rozmyslite si, ako by ste potrebné odhady dokázali presne).

Na pravej strane máme výraz, ktorý kvadraticky závisí od k, kým na ľavej máme lineárnu závislosť. Aby platila deliteľnosť, musí platiť: $a - k^2 = 0$ alebo $|nk + 1| \leq |k^2 - a|$. Predpokladajme, že tá prvá možnosť neplatí. Pre $k = 1$ je hodnota výrazu $|nk + 1|$ rovná $n + 1$, kým hodnota $|k^2 - a|$ je rovná $a - 1$. Hodnota $|k^2 - a|$ bude s rastúcim k klesať až do chvíle, kým $k^2 > a$, potom začne rásť. Hodnota $nk + 1$ rastie s rastúcim k stále. Po dosadení $k = n$ dostávame na ľavej strane $n^2 + 1$ a na pravej strane $n^2 - a$, čo evidentne ešte stále nespĺňa nami požadovanú nerovnosť. Preto sme dostali aj dolné aj horné ohraničenie pre k, konkrétne: $n < k < na$, a ako uvidíme, bude sa nám hodiť.

Deliteľnosť $nk + 1 \mid k^2 - a$ musí byť realizovaná nejakým konkrétnym celým číslom. Keďže n aj k sú rádovo väčšie ako a, naskytá sa nám dosť úzke ohraničenie pre celé číslo z, pre ktoré $z(nk + 1) = k^2 - a$. Na prvý pohľad vidíme $z \cong k/n$. Vyskúšajme teda vynásobiť $nk + 1$ číslom k/n (aby sme dostali nejaké ohraničenie pre z). Dostaneme $k^2 + k/n > k^2 - a$. Nevyšlo. Skúsme $(nk + 1)(k/n - 1) = k^2 - nk + k/n - 1$. Lenže k/n neprevyšuje a, kým nk je mimoriadne veľké: $k^2 - nk + k/n - 1 < k^2 - a$.

Máme teda interval o veľkosti jedna, vnútri ktorého sa musí nachádzať celé číslo z. Lenže potom vieme z jednoznačne určiť. Nech $k \equiv c \pmod{n}$. Potom $z = (k - c)/n$. Teda dostávame $(nk + 1)(k/n - c/n) = k^2 + k/n - ck - c/n = k^2 + (k - c)/n - ck$. Toto má byť presne rovné $k^2 - a$. Teda $ck - (k - c)/n = a$. Vieme, že $c \geq 1$, lebo ak by sa rovnalo nule, dostávame jasnú nerovnosť. Lenže potom ck je mimoriadne veľké, kým $(k-c)/n$ je zhora ohraničené a. Takýmto spôsobom teda nemôže byť dosiahnutá rovnosť.

Možno sme už aj zabudli, čo sme týmto dosiahli. Dosiahli sme spor, ktorý sme si na začiatku piateho odseku vytvorili… predpokladali sme, že $k^2 - a \neq 0$. Nuž teda $a = k^2$ pre nejaké prirodzené k, čo o a prezrádza, že je štvorcom.

2.9 Koľko Miestenka Stojí?

opravoval **Juro**

Zadanie. *Lístok na cirkusové predstavenie pozostávajúce z $n \geq 2$ čísel stojí C_n. Cena C_n je určená ako najmenšie kladné reálne číslo, pre ktoré existuje postupnosť reálnych čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pre ktorú platí:*

1. $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$,
2. $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$,
3. *pre každé celé číslo i také, že $1 \leq i \leq n$, platí $x_i \leq x_{i+1}$ alebo $x_i \leq x_{i+1} + C_n x_{i+2}$ (indexy členov postupnosti berieme modulo n, teda x_{n+1} považujeme za x_1, x_{n+2} považujeme za x_2 a pod.).*

Dokážte, že pre každé celé číslo $n \geq 2$ platí $C_n \geq 2$ a že $C_n = 2$ práve vtedy, keď n je párne.

Po prvých skúšaniach rôznych postupností ľahko nájdeme pre párne n postupnosť -1, $+1$, -1, $+1$, …, -1, $+1$. Táto postupnosť zjavne spĺňa nerovnosti zo zadania a $C_n = 2$. Pre nepárne n ale už nenájdeme takú postupnosť, aj keď sa postupnosť 1, 1/2, 1/4, …, $1/2^{(n-2)}$, -2 veľmi blíži.

Ako prvé pozorovanie si uvedomme, prečo v žiadnej postupnosti nemôžu byť dve nekladné čísla za sebou. Ak by to tak bolo, nazveme si tieto čísla x_i, x_{i+1} . Potom číslo x_{i-1} musí byť ale tiež nekladné, pretože musí byť menšie buď ako x_i alebo ako $x_i + C_n x_{i+1}$, no obe tieto čísla sú nekladné. Rovnakým postupom ale aj x_{i-2} bude nekladné, atď… Preto budú všetky nekladné, čo ale byť nemôžu.

Môžeme si preto úlohu „rozkúskovať" podľa nekladných čísel. Medzi dvoma nekladnými číslami bude buď jedno, alebo aspoň dve kladné čísla. Tieto skupiny kladných čísel medzi dvoma nekladnými nazvime *cyklus*. Označme si A súčet všetkých samotných kladných čísel, t.j. takých x_i, že obe čísla x_{i-1}, x_{i+1} budú nekladné. Podobne, pre väčší cyklus, kde x_i a x_j sú nekladné, si označme B súčet všetkých x_{i+1} a písmenom C označme súčet všetkých x_{j-1}. Písmenom D označme súčet súčtov $x_{i+2} + x_{i+3} + \ldots + x_{j-2}$. Písmenom E označme súčet všetkých nekladných čísel. Získali sme tak disjunktný rozklad postupnosti, teda každé číslo v nej prispelo do súčtu práve raz do jedného písmena. Podľa druhej podmienky v zadaní musí $A + B + C + D + E = 0$.

Všetky prvky, ktoré sú vľavo (o 1 menší index) od nekladného čísla, spĺňajú: $x_{j-1} \leq x_j + x_{j+1}$ Sčítajme takto cez všetky prvky, ktoré sú naľavo od nekladných čísel (teda aj tých samostatných). Dostaneme tak $C + A \leq E + C_n(B + A)$. Dosaďme za $E = -A - B - C - D$, získavame $2C \leq A(C_n - 2) + B(C_n - 1) - D$.

Predpokladajme pre spor, že $C_n \leq 2$. Vezmime si teda jeden cyklus, kde x_i a x_j sú nekladné, a medzi nimi sú iba kladné čísla. Platia pre ne nerovnosti: $x_{i+1} \leq x_{i+2} + 2x_{i+3}$. Tiež platí $x_{i+3} \leq x_{i+4} + 2x_{i+5}$. Po dosadení do prvej nerovnosti získame $x_{i+1} \leq x_{i+2} + x_{i+3} + x_{i+4} + 2x_{i+5}$. A znova vieme, že $x_{i+5} \leq x_{i+6} + 2x_{i+7}$, dosadíme a pokračujeme rovnako až do konca cyklu, získame tak pre nepárny počet čísel v cykle $x_{i+1} \leq x_{i+2} + x_{i+3} + \cdots + x_{j-3} + 2x_{j-1}$. Pre párny počet v cykle získame iba $x_{i+1} \leq x_{i+2} + x_{i+3} + \cdots + x_{j-3} + 2x_{j-2}$, kam dosadíme nerovnosť $x_{j-2} \leq 2x_{j-1}$, ktorá platí (dokonca je ostrá, čo bude dôležité neskôr) pretože nutne musí platiť zo zadania $x_{j-2} \leq x_{j-1}$. Každopádne platí $x_{i+1} \leq x_{i+2} + x_{i+3} + \cdots + x_{j-3} + 2x_{j-1}$. Sčítajme túto nerovnosť cez všetky cykly s aspoň dvoma prvkami, získame tak $B \leq D + 2C$.

Spojením $2C \leq A(C_n - 2) + B(C_n - 1) - D$ a $B - D \leq 2C$ získavame $0 \leq (C_n - 2)(A + B)$. Keďže ale A, B sú nekladné čísla a nemôžu byť obe nulové, tak nutne musí byť $C_n \geq 2$.

Na dokončenie dôkazu nám stačí ukázať, že pre nepárne n nemôže rovnosť nastať. Pre nepárne n musí byť v niektorom cykle párny počet kladných čísiel (pretože ak spojíme každý cyklus s jeho nekladným prvým číslom, tak v prípade samých nepárnych cyklov získame celkový počet čísiel párny). Uvedomme si, že na to, aby nastala rovnosť $0 = (C_n - 2)(A + B)$, musí platiť rovnosť aj vo všetkých nerovnostiach, z ktorých sme ju dostali. Teda konkrétne, pre nepárne n musí platiť v cykle s párnym počtom kladných čísel aj $x_{j-2} = 2x_{j-1}$. To je ale problém, keďže z podmienky zo zadania musí platiť $x_{j-2} \leq x_{j-1}$. Tieto nerovnosti ale spolu nutne dávajú $x_{j-2} = x_{j-1} = 0$. To sme si ale na začiatku uvedomili, že nemôžu dve nekladné čísla nasledovať po sebe, preto pre nepárne n rovnosť nastať nemôže.

2.10 Krotenie Monštra Skazy

opravoval **Vodka**

Zadanie. *Jedna starodávna legenda hovorí o monštre skazy, ktorú sa už niekoľko krotiteľov pokúsilo skrotiť do svojho cirkusu. Žiaľ, neúspešne. Podarí sa vám skrotiť monštrum a vyliezť mu na rovnako dlhé ramená?*

Daný je trojuholník ABC s opísanou kružnicou k a so stredom vpísanej kružnice I. Označme J obraz bodu I v osovej súmernosti podľa priamky BC. Nech $Š$ je priesečník kružnice k s priamkou AI. Ďalej nech P je druhý priesečník kružnice k s priamkou $ŠJ$. Dokážte, že $|PI| = |AI|$.

Máme dokázať, že nejaký trojuholník je rovnoramenný. Najjednoduchšie to ukážeme tak, že dokážeme rovnosť jeho dvoch uhlov. Preto budeme v riešení počítať uhly. No budeme musieť použiť aj pár netriviálnych vecí okrem štandardného uhlenia. Tak poďme na to.

Zjavne bod $Š$ je Švrčkovým bodom oblúku BC. V riešení využijeme niektoré jeho vlastnosti. Ak ich nepoznáte, je dobré sa s nimi zoznámiť, napr. tu: `https://mks.mff.cuni.cz/library/SvrckuvBodMV/SvrckuvBodMV.pdf`.

Označme si K priesečník priamky $JŠ$ s priamkou BC. Predpokladajme, že bod P leží na oblúku AB. Využitím Shooting lemma vieme, že $|ŠB|^2 = |ŠK||ŠP|$. Taktiež vieme, že bod $Š$ je stred kružnice opísanej trojuholníku BIC, a preto $|ŠB| = |ŠI|$. Spojením týchto dvoch vzťahov dostávame, že $|ŠK||ŠP| = |ŠI|^2$. Z tohto vzťahu vyplýva podobnosť trojuholníkov $ŠKI$ a $ŠIP$ podľa vety *sus*, a preto $|\sphericalangle ŠKI| = |\sphericalangle ŠIP|$.

Pre jednoduchšie vyjadrovanie označujme pre body X, Y na opísanej kružnici $\widehat{XY}$ veľkosť obvodového uhla nad oblúkom XY. Ak ste nikdy nepočítali uhly pomocou oblúkov, tak sa to skúste naučiť, je to vážne rýchlejšie :). Pri ňom je ešte veľmi nápomocná nasledujúca lema:

Lema. Ak body X, Y, Z, W ležia v tomto poradí na kružnici a T je priesečník XZ a YW, tak $|\sphericalangle XTY| = \widehat{XY} + \widehat{ZW}$.

Dôkaz. Ak to nepoznáte, tak si to vyuhlite za domácu úlohu a zapamätajte.

Tak a teraz poďme na to: Vieme, že

$$|\sphericalangle PAŠ| = \widehat{PŠ} = \widehat{PB} + \widehat{BŠ} = \widehat{PB} + \widehat{CŠ} = |\sphericalangle ŠKC|.$$

Pri poslednej rovnosti sme využili lemu. My vieme, že $|\sphericalangle ŠKC| = |\sphericalangle IKC|$, lebo J, leží na $ŠK$ a je to obraz I v osovej súmernosti. Teraz už len dáme všetky pozorovania dokopy:

$$2|\sphericalangle PAI| = 2|\sphericalangle ŠKC| = |\sphericalangle ŠKI| = |\sphericalangle ŠIP| = |\sphericalangle PAI| + |\sphericalangle API|$$

Keď sa na toto poriadne pozrieme, tak si uvedomíme, že trojuholník PAI je naozaj rovnoramenný, čo sme chceli dokázať.

Pre úplnosť by sme mali dodať, že naše riešenie funguje, aj ak P leží na inom oblúku – zo symetrie stačí uvažovať už len prípad, že leží na oblúku $BŠ$. Tam sa akurát niektoré oblúky a uhly odčítajú, ale inak to funguje rovnako (premyslite si). A tak isto to funguje aj v dementnom prípade, ak $P \equiv B$.

Samozrejme úloha sa dala vyriešiť aj bez počítania pomocou oblúkov v strednej časti, a to prostým vyuhlením. Chcel som však túto techniku ukázať, lebo si myslím, že je dobré ju poznať. A tiež je dobré poznať vlastnosti Švrčkovho bodu.