Korešpondenčný matematický seminár
XXXIX. ročník, 2017/2018
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Riešenia 3. kola letnej časti

3.1 Kapitán Modrobrada Súperí (κ ≤ 1) opravovala **Čeky**

Zadanie. *Kapitán Modrobrada sa plaví za kolonizáciou Ameriky. Jeho posádka sa rozhola skrátiť si dlhú plavbu turnajom v pretláčaní sa.*

Posádka lode má 32 námorníkov. Prvý deň hral každý námorník práve 1 zápas (každý zápas hrajú vždy dvaja námorníci proti sebe). Druhý deň takisto hral každý námorník práve 1 zápas. Ukážte, že po týchto dvoch dňoch vieme vybrať 16 námorníkov tak, že žiadni dvaja z nich proti sebe ešte nezápasili, a to bez ohľadu na to, ako námorníci zápasili v prvé dva dni.

Našou úlohou je nájsť skupinu 16 námorníkov, ktorí proti sebe ešte nezápasili, bez ohľadu na to, ako vyzerali zápasy počas prvých dvoch dní. Keďže každý námorník odohral zápasy s práve dvomi rôznymi námorníkmi, môžeme si všetkých námorníkov usporiadať akoby do kruhu tak, že vedľa námorníka sa budú nachádzať námorníci, s ktorými zápasil (jeden vpravo a druhý vľavo). Takto budú všetci námorníci rozdelení na niekoľko (môže byť aj jeden) samostatných kruhov.

Teraz sa budeme snažiť ukázať, že v každom z týchto kruhov je párny počet námorníkov. Ukážeme si, prečo v jednom kruhu nemôže byť nepárny počet námorníkov. Predstavme si, že máme kruh s nepárnym počtom námorníkov. Očíslujme si námorníkov číslami 1 až $2k + 1$ (kde k je jedno z čísel 1 až 15) v takom poradí, v akom sú v kruhu, pričom námorník 1 má vpravo od seba svojho súpera z prvého dňa (jemu dáme číslo 2 a pokračujeme v číslovaní v tomto smere). Námorník, s ktorým námorník číslo 1 súperil počas druhého dňa bude mať teda číslo $2k+1$. Môžeme si všimnúť, že každý námorník s nepárnym číslom má vľavo od seba súpera z druhého dňa. Námorníci 1 a $2k + 1$ majú obaja nepárne čísla, takže by obaja mali mať vľavo od seba svojho súpera z druhého dňa. To ale znamená, že námorník $2k + 1$ musel počas druhého dňa odohrať dva zápasy. To je ale spor so zadaním, a preto vedľa seba nemôžu stáť dvaja námorníci s nepárnymi číslami. A z toho už vyplýva, že v každom z kruhov je párny počet námorníkov.

Ak z každého kruhu zoberieme každého druhého námorníka, budeme ich mať presne polovicu zo všetkých, čiže 16. Títo námorníci proti sebe určite nezápasili, lebo každý zápasil len s tými, čo sú v cykle hneď vedľa neho. Našli sme teda 16 námorníkov, ktorí vyhovujú zadaniu, čím sme dokázali to, čo sme mali.

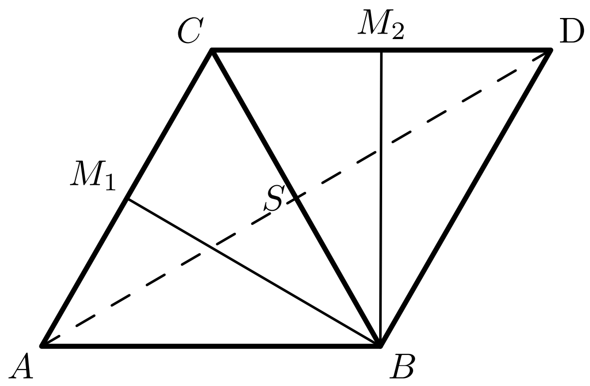
3.2 Kde Miznú Stopy (κ ≤ 2) opravovali **Aňa** a **Marcel**

Zadanie. *Posádku čaká náročná plavba Bermudským trojuholníkom. Aby v ňom nezmizli, potrebuje kapitán Modrobrada o ňom niečo zistiť.*

Nech ABC je rovnoramenný trojuholník so základňou AB. Označme obraz bodu A v stredovej súmernosti podľa stredu úsečky BC ako D. Stred úsečky AC označme M_1 a stred úsečky CD označme M_2. Vieme tiež, že $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle M_1BA|$. Zistite súčet $|\sphericalangle M_1BM_2| + |\sphericalangle ACB|$.

Zo zadania úlohy vieme, že uhly ACB a M_1BA majú rovnakú veľkosť. My potrebujeme zistiť súčet uhlov M_1BM_2 a ACB. Keďže uhly M_1BA a M_1BM_2 majú spoločné rameno BM_1, tiež vieme, že výsledkom hľadaného súčtu bude veľkosť uhla ABM_2. Označíme si stred úsečky BC ako S. Bod D je obrazom bodu A v stredovej súmernosti podľa bodu S. Stredová súmernosť zachováva vzdialenosti, takže úsečky AS a SD sú rovnako dlhé. Inak povedané, bod S je stredom úsečky AD. Bod S je aj stredom úsečky BC, z čoho vieme, že aj úsečky BS a SC majú rovnakú dĺžku.

Zistili sme, že stred úsečiek AD a BC je v tom istom bode, bode S a tieto úsečky sa navzájom sa rozpoľujú. To znamená, že štvoruholník $ABCD$ je rovnobežník a úsečky AD a BC sú jeho uhlopriečky. Z definície rovnobežníka vyplýva, že protiľahlé strany sú rovnobežné a rovnako dlhé. V našom prípade je rovnobežná strana AB so stranou CD a strana BD so stranou AC. Zo zadania vieme, že trojuholník ABC je rovnoramenný so základňou AB. Takže úsečky AC a BC majú rovnakú dĺžku. Vieme už, že aj úsečka BD má takú istú dĺžku. Takže trojuholník CDB je rovnoramenný, so základňou CD. Bod M_2 je stred úsečky CD a v rovnoramennom trojuholníku je päta výšky na základňu v strede základne. V našom prípade v bode M_2. Výška trojuholníka je kolmá na stranu, takže úsečka BM_2 je kolmica na stranu CD a vďaka rovnobežnosti aj na stranu AB. Z daného tvrdenia vieme, že uhol ABM_2 je pravý a teda má 90°.



3.3 Kompletne Magický Štvorec ($\kappa \leq 3$)

opravovali **Kika** a **Kika**

Zadanie. *Po úspešnom zdolaní Bermudského trojuholníka však posádku zastihol Bermudský štvoruholník. Ide o štvorcovú tabuľku, do ktorej musí námorník správne povpisovať čísla, aby sa mohol plaviť ďalej.*

Doplňte do tabuľky 3×3 *navzájom rôzne kladné celé čísla tak, aby sa súčet čísel v každom riadku, stĺpci aj uhlopriečke rovnal* 47.

Je viacero podobných riešení, ako sa dala táto úloha spraviť. Vždy sa budeme snažiť nájsť všetky konkrétne tabuľky, ktoré vyhovujú zadaniu. Väčšina bude začínať tak, že si nakreslíme tabuľku a dáme do nej nejaké premenné, ktoré nám budú reprezentovať čísla v jednotlivých bunkách.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Vieme, že súčet čísel v riadku aj v stĺpci, aj po diagonále má byť rovný 47. Tieto čísla sú rôzne, celé a kladné. Vedeli by sme si teraz vytvoriť 8 rovníc, v ktorých by na ľavej strane bol súčet troch čísel a na pravej strane 47. Pozrime sa však len na niektoré a z každej vyjadrime E

$$A + E + I = 47 \implies E = 47 - A - I,$$

$$B + E + H = 47 \implies E = 47 - B - H,$$

$$C + E + G = 47 \implies E = 47 - C - G.$$

Sčítame rovnice, v ktorých máme vyjadrené E a dostaneme: $3 \cdot E = 3 \cdot 47 - (A + I + B + H + C + G)$. Teraz tú rovnicu len napíšeme trošku krajšie: $3 \cdot E = 3 \cdot 47 - ((A+B+C)+(G+H+I))$. $A+B+C$ je súčet čísel v prvom riadku, čiže 47 a podobne $G+H+I$ je súčet čísel v treťom riadku, a teda 47. Dostávame $3 \cdot E = 3 \cdot 47 - (47+47)$. Z čoho $E = 47/3$. Avšak my sme mali v zadaní, že čísla v bunkách tabuľky sú celé kladné čísla a 47 nie je deliteľné tromi, takže to nebude celé číslo. Naša úloha nemá riešenie.

Iné riešenie

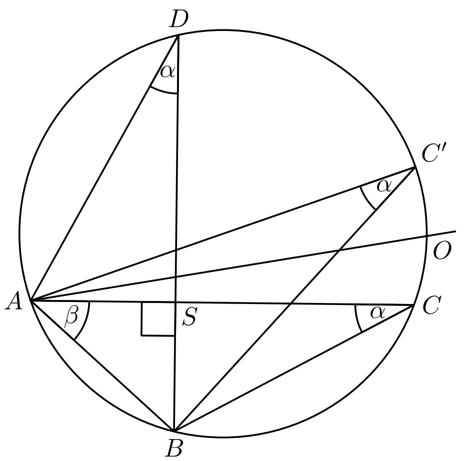
Toto riešenie je také viac drevorubačské. Všetky bunky tabuľky vyjadríme len pomocou A, B a D na základe toho, že vieme že súčet každého riadka, stĺpca a diagonály je 47. Teda namiesto C budeme mať $47 - A - B$. Namiesto G máme $47 - A - D$. Teraz, keď už máme vyjadrené C a G, tak E vieme vyjadriť z diagonály ako $47 - (47 - A - B) - (47 - A - D) = 2 \cdot A + B + D - 47$. Keď už máme E, tak si z druhého riadka vyjadríme F ako $47 - D - (2 \cdot A + B + D - 47) = 94 - 2 \cdot A - B - 2 \cdot D$. Podobne z druhého stĺpca máme: $H = 47 - B - (2 \cdot A + B + D - 47) = 94 - 2 \cdot A - 2 \cdot B - D$. Bunku I si vyjadríme dvoma spôsobmi a to z tretieho stĺpca a z diagonály. Z tretieho stĺpca dostávame $I = 47 - (47 - A - B) - (94 - 2 \cdot A - B - 2 \cdot D) = 3 \cdot A + 2 \cdot B + 2 \cdot D - 94$. Z diagonály $I = 47 - A - (2 \cdot A + B + D - 47) = 94 - 3 \cdot A - B - D$. Nakoľko sú obe ľavé strany I, tak sa musia rovnať aj pravé strany, teda $3 \cdot A + 2 \cdot B + 2 \cdot D - 94 = 94 - 3 \cdot A - B - D$ z čoho po úprave dostaneme $3 \cdot (2 \cdot A + B + D) = 188$. Číslo 188 nie je deliteľné tromi, z čoho vyplýva že $2 \cdot A + B + D$ nie je celé číslo, avšak zo zadania by to mal byť súčet celých čísel (čo je celé číslo), a teda dochádzame k sporu. Z čoho plynie, že úloha nemá riešenie.

3.4 Kapitán Manipuluje Súmernosťou ($\kappa \leq 4$)

opravoval **Ľubo**

Zadanie. *Kapitán sa zapozeral do lodného radaru, aby si pozrel, kde pristáť. Radar ohraničuje kružnica r, na ktorej ležia body A, B, C, D tak, že úsečky AC a BD sú na seba kolmé. Kapitán si zobral priamku AC a jej obraz v osovej súmernosti podľa osi uhla BAD označil g. Dokážte, že priamka g prechádza stredom kružnice r.*

Keďže sa jedná o geometrickú úlohu, skúsme začať tým, že si nakreslíme obrázok. Ten náš by mohol vyzerať napríklad nejak takto:



Vidíme, že niektoré uhly sme si už doplnili. V prvom rade nás budú zaujímať uhly α, ktoré sme doplnili pri bodoch C, C' a D. O tom, že tieto uhly majú rovnakú veľkosť sa presvedčíme veľmi jednoducho a síce tak, že všetky sú obvodovými uhlami k úsečke AB. Pomocou nich si vieme ľahko dopočítať z pravouhlých trojuholníkov, že $|\sphericalangle SAD| = 90^\circ - \alpha = |\sphericalangle CBS|$. Na obrázku ešte vidíme, že uhol $\sphericalangle BAC$ sme si označili β, pretože ho budeme často používať a zjednoduší nám to prácu.

Ďalej vidíme, že vcelku zaujímavú rolu bude zohrávať os uhla BAD. Skúsme si tento uhol preto vyjadriť. Hneď vidíme, aká bude veľkosť tohoto uhla a síce $|\sphericalangle BAD| = 90° - \alpha + \beta$. Keďže ho os delí na polovicu, bude platiť:

$$|\sphericalangle BAO| = \frac{90° - \alpha + \beta}{2}.$$

Uvedomíme si, že $|\sphericalangle CAO| = |\sphericalangle C'AO|$ (zo zadania z osovej symetrie). Tento uhol vieme teraz jednoducho zistiť ako: $|\sphericalangle CAO| = |\sphericalangle BAO| - |\sphericalangle BAC|$, teda:

$$|\sphericalangle CAO| = \frac{90° - \alpha + \beta}{2} - \beta = \frac{90° - \alpha - \beta}{2}.$$

Môžete sa skúsiť zamyslieť, ako by to vyzeralo v prípade, že by sa bod C nachádzal nad osou súmernosti AO (tento podobný prípad ako aj jeho pokračovanie nechávame na čitateľa). Vďaka tomuto všetkému si už vieme ľahko dopočítať aj veľkosť uhla BAC' ako:

$$|\sphericalangle BAC'| = |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CAO| + |\sphericalangle OAC'|,$$

$$|\sphericalangle BAC'| = \beta + 2 \cdot \frac{90° - \alpha - \beta}{2} = 90° - \alpha.$$

Teraz už vieme veľkosti dvoch uhlov v $\triangle BAC'$ a ľahko si dopočítame, že veľkosť posledného uhla je:

$$|\sphericalangle ABC'| = 90°.$$

V tomto momente je nám už všetko jasné. Keďže nám vyšiel uhol ABC' pravý, znamená to, že kružnica r je v skutočnosti Tálesovou kružnicou nad úsečkou AC' a teda úsečka AC' musí prechádzať stredom kružnice r, čo sme presne chceli dokázať.

3.5 Kladných Máme Silákov (κ ≤ 7)

opravovala **Dada**

Zadanie. *Kapitán Modrobrada sa pripravuje na pristátie. Na to si povolal svoju navigačnú jednotku. Tá sa skladá so štyroch kladne naladených námorníkov a, b, c, d. Avšak v ich silách sú značné nerovnosti.*

Nech a, b, c, d sú kladné reálne čísla spĺňajúce $a + b + c + d = 1$. Ukážte, že

$$\frac{2}{(a+b)(/c+d)} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{cd}}.$$

Máme ukázať, že platí nerovnosť

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{cd}} \geq \frac{2}{(a+b)(c+d)},$$

kde a, b, c, d sú kladné reálne čísla, ktoré spĺňajú podmienku $a + b + c + d = 1$. Na prvý pohľad môže dôkaz vyzerať zložito, ale my si ukážeme, že sa dá urobiť na pár riadkov a to pomocou **nerovnosti aritmetického a geometrického priemeru** (AG nerovnosti). AG nerovnosť platí pre kladné reálne čísla a jej všeobecný zápis je

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Podľa AG nerovnosti platí

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}.$$

Odtiaľ vyjadríme

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} \geq \frac{2}{(a+b)}$$

a analogicky

$$\frac{1}{\sqrt{cd}} \geq \frac{2}{(c+d)}.$$

Nerovnosti sčítame a upravíme:

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{cd}} \geq \frac{2}{(a+b)} + \frac{2}{(c+d)},$$

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{cd}} \geq \frac{2(a+b)+2(c+d)}{(a+b)(c+d)},$$

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{cd}} \geq \frac{2(a+b+c+d)}{(a+b)(c+d)}.$$

Zo zadania vieme, že $a+b+c+d=1$, a teda dostaneme nerovnosť, ktorú sme mali dokázať.

Na záver si ešte ukážeme, ako by sme nerovnosť $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ dokázali aj bez použitia AG nerovnosti. Vieme, že $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$, pretože druhá mocnina je vždy kladná alebo nulová. Dostaneme

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0,$$

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

a ďalej môžeme pokračovať, ako je ukázané vyššie.

3.6 Kolonizácia Morského Súostrovia

opravovali **Marek** a **Veronika**

Zadanie. *Modrobradova posádka obsadila súostrovie $n \geq 2$ ostrovov. Práve dva z týchto ostrovov sú obývané, každý jedným kmeňom, ktoré sú navzájom znepriatelené. Medzi ostrovmi nie sú žiadne mosty, preto sa kapitán Modrobrada spolu so svojím plukovníkom Zelenovlasom rozhodli vybudovať ich nasledovnou hrou.*

Modrobrada začína a následne sa so Zelenovlasom striedajú v ťahoch. Hráč na ťahu musí postaviť práve jeden most medzi dvoma ostrovmi O a P, medzi ktorými ešte most nie je postavený. Medzi ostrovmi O a P však môže postaviť most len vtedy, ak sa aspoň do jedného z nich dá dostať po mostoch z niektorého z dvoch obývaných ostrovov. Ak sa po ťahu hráča H vie dostať jeden domorodý kmeň po mostoch k druhému kmeňu, tak hráč H prehráva. Zistite v závislosti od celého čísla $n \geq 2$, ktorý z námorníkov má víťaznú stratégiu.[1]

Dobrý spôsob, ako skúmať takéto hry, je pozrieť sa na to, ako by malo vyzerať súostrovie, keď už niektorý námorník nemá inú možnosť ako prehrať. Takúto situáciu budeme nazývať *prehrávajúca pozícia*. Ďalej si nazveme *nekolonizovaný* ostrov taký, na ktorý nevedie cesta zo žiadneho obývaného ostrova, a zvyšné ostrovy *kolonizované*. Iste každý ostrov v prehrávajúcej pozícii je kolonizovaný, lebo ak by nebol kolonizovaný, tak

[1] Hráč má víťaznú stratégiu, ak si vie svojimi ťahmi zaručiť výhru bez ohľadu na to, ako hrá jeho súper.

hráč môže stavať most naň. Zároveň však už nevie postaviť žiaden most medzi žiadnymi ostrovmi jednej či druhej časti súostrovia, lebo inak by taký most postavil a neprehral by. Čo znamená, že v prehrávajúcej pozícii máme dve časti súostrovia, medzi ktorými nie sú mosty a vo vnútri častí sú samé mosty.

Všimnime si, že pred každým ťahom Modrobrady je postavený párny počet mostov a pred ťahom Zelenovlasa nepárny počet. Ak je v prehrávajúcej pozícii Modrobrada, musí byť postavený práve párny počet mostov. Ak Zelenovlas, tak nepárny. Pozrime sa, koľko mostov sa dá postaviť v časti súostrovia s k ostrovmi. To vieme zistiť následujúcou úvahou. Vyberieme ostrov a z neho postavíme všetky mosty, tých je $k-1$. Potom sa pozrieme na ďalší a vieme postaviť už len $k-2$ mostov. Takto pokračujeme a dostaneme súčet $1+2+3+4+\dots+k-1 = \frac{(k-1)k}{2}$.

Zoberme si prehrávajúcu pozíciu, v ktorej je v jednotlivých častiach súostrovia k a $n-k$ ostrovov. Počet mostov, ktoré sa dajú postaviť vnútri týchto častí je teda $\frac{(k-1)k}{2} + \frac{(n-k-1)(n-k)}{2}$. Nás zaujíma parita tohto výrazu, lebo ako sme ukázali, parita môže hrať dôležitú úlohu pri prehrávajúcich pozíciach. Výraz upravíme na $\frac{(n-1)n}{2} + k(k-n)$ a môžme sa pozerať na jednotlivé členy a ich parity v závislosti od n a k. Vidíme, že $\frac{(n-1)n}{2}$ je síce celé, lebo súčin dvoch po sebe idúcich čísel nutne obsahuje párne číslo, ale nemáme zaručenú párnosť celého výrazu. Taktiež nevieme moc povedať o parite výrazu $k(k-n)$, totiž nie je jednoznačná. Avšak v závislosti od n by sme mohli vedieť niečo povedať. Tak ako v prípade celočíselnosti zlomku $\frac{(n-1)n}{2}$, kde sme využili po sebe idúce čísla, tak keď zoberieme rozdiel dvoch čísel nepárny, tak dostaneme súčin párny. Teda ak n bude nepárne, tak súčin $k(k-n)$ bude párny, a keď n bude párne, tak nevieme zatiaľ nič viac povedať, lebo k môže byť stále párne alebo nepárne. Preto rozlíšime párne n a nepárne.

Pre nepárne n je výraz $k(k-n)$ párny, a teda jeho parita závisí už len na tom, či $n(n-1)$ je deliteľné štyrmi. Keď sa n dá zapísať ako $n = 4l+1$, tak dostávame párny výraz $\frac{(n-1)n}{2}$. V takom prípade je v každej prehrávajúcej pozícii postavený párny počet mostov. Preto sa Zelenovlasovi nikdy nestane, že by bol v prehrávajúcej pozícii. Teda zakaždým vie postaviť most tak, aby neprehral, čo mu prinesie výhru. Podobne pre $n = 4l+3$ dostaneme nepárny počet mostov v každej prehrávajúcej pozícii a podobným spôsobom vie vyhrať Modrobrada.

Pre párne n majú počty mostov v prehrávajúcich pozíciách rôzne parity. Preto nebude námorníkom stačiť hrať len tak, ale budeme musieť pre niektorého z nich nájsť sofistikovanejšiu stratégiu. My ukážeme, že víťaznú stratégiu má v tomto prípade Zelenovlas. Keďže je n párne, vieme ostrovy rozdeliť do párov, pričom ostrovy obývané kmeňmi A, B budú spolu v páre. Zelenovlasova stratégia bude spočívať v tom, že bude s využitím párov „kopírovať“ ťahy Modrovlasa. Ak teda Modrobrada postaví most medzi ostrovmi O a S, tak Zelenovlas si zoberie pár ostrova O a pár ostrova S a postaví most medzi nimi. Bude to však vždy možné?

Uvedomme si, že takéto hranie Zelenovlasa zanecháva pred každým Modrovlasovým ťahom pekne symetrickú situáciu. To znamená, že ak je niektorý ostrov nekolonizovaný, tak rovnako jeho pár je nekolonizovný (a naopak). Ak je niektorý ostrov kolonizovaný jedným kmeňom, tak jeho pár je kolonizovaný druhým kmeňom. Podobne to platí aj pre mosty: dva ostrovy sú spojené mostom práve vtedy, keď sú ich páry spojené mostom. Z týchto úvah dostávame, že ak Modrobrada môže postaviť most medzi ostrovmi O a S, tak aj Zelenovlas môže postaviť most medzi ich pármi. Takouto stratégiou si Zelenovlas zabezpečí, že po každom ťahu Modrovlasa bude môcť postaviť most a neprehrať. To bude opakovať, až raz Modrobrada bude nútený prepojiť dva kmene a prehrá. Takýto prístup využívajúci symetrickosť situácie je v problémoch s hrami celkom častý.

Takže Modrobrada vyhrá iba keď $n = 4l + 3$, inak vyhrá Zelenovlas.

3.7 Kapitán, Maršál, Stotník

opravoval **Dominik**

Zadanie. *Námorníci začali budovať svoju kolóniu. Prišiel čas, aby si rozdelili funkcie. Najprv ich však treba nájsť.*

Nájdite všetky funkcie f z kladných reálnych čísel do kladných reálnych čísel také, že pre všetky kladné reálne čísla a, b, c, d spĺňajúce $abcd = 1$ *platí*

$$(f(a) + f(b)) \cdot (f(c) + f(d)) = (a + b) \cdot (c + d).$$

Pri riešení úloh s funkcionálnymi rovnicami je dobrým začiatkom skúsiť dosadiť za premenné konkrétne hodnoty spĺňajúce zadanie a ak sme vybrali správne, dokáže nám to v mnohom pomôcť.

Začnime jednoducho $a = b = c = d = 1$. Dostávame, že $4f^2(1) = 4$. Z toho dostávame, že $f(1) = 1$, pretože podľa zadania je f funkcia z kladných čísel do kladných čísel. Teraz skúsime odsadiť $(a, b, c, d) = (1, 1, x, \frac{1}{x})$. Po tomto dosadení dostávame $2f(1) \cdot (f(x) + f(\frac{1}{x}) = 2(x + \frac{1}{x})$, čo môžeme predeliť 2-kou tak, že máme vzťah $f(x) + f(\frac{1}{x}) = (x + \frac{1}{x})$.

Zaujímať by nás ešte mohlo, čo sa bude diať, keď x a $\frac{1}{x}$ nebudú spolu v zátvorke, skúsme teda $(a, b, c, d) = (1, x, 1, \frac{1}{x})$. Máme $1 + f(x) \cdot 1 + f(\frac{1}{x}) = (1 + x)(1 + \frac{1}{x})$, čo nám po roznásobení a odčítaní 1 dá rovnosť $f(x) + f(\frac{1}{x}) + f(x)f(\frac{1}{x}) = 1 + x + \frac{1}{x}$. Ak sa teraz pozrieme na dve rovnosti, ktoré sme dostali a odčítame ich od seba, dostávame nový vzťah: $f(x)f(\frac{1}{x}) = 1$, teda $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{f(x)}$. Po dosadení do prvej z nich dostaneme navyše, že $f(x) + \frac{1}{f(x)} = x + \frac{1}{x}$, z čoho po prenásobení $f(x)$ dostávame kvadratickú rovnicu, ktorá má nanajvýš dve riešenia. Zároveň pomerne ľahko vidno, že $f(x) = x$ a $f(x) = \frac{1}{x}$ sú riešenia. Iné teda nebudú.

Ukážme ešte sporom, že neexistujú také $x, y \neq 1$, že $f(x) = x$ a $f(y) = \frac{1}{y}$: Skúsme dosadiť za (a, b, c, d) napríklad $(x, y, \frac{1}{x}, \frac{1}{y})$. Použitím rovností, ktoré sme si už ukázali dostávame rovnosť $(x + \frac{1}{y})(\frac{1}{x} + y) = (x + y)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})$. Po úpravách dostávame $(xy)^2 + 1 = x^2 + y^2$, z čoho dostávame $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0$. Tomu vyhovuje jedine $x = 1$ alebo $y = 1$. To je ale spor s predpokladom, že sú rôzne od jednotky. Prečo sme si dali taký predpoklad? Zjavne pre $x = 1$ je $x = \frac{1}{x}$, teda v tomto prípade nám rôzny predpis neprekáža. Z tohto všetkého nám vyplýva, že jediné dve možné riešenia sú $f(x) = x$ pre všetky kladné reálne x a $f(x) = \frac{1}{x}$ pre všetky kladné reálne x.

Na záver ešte treba urobiť skúšku správnosti pre obe riešenia, aby sme zistili, či naozaj vyhovujú. Pre $f(x) = x$ zjavne $(a + b)(c + d) = (a + b)(c + d)$. Pre $f(x) = \frac{1}{x}$ dostávame $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}) = \frac{(a+b)(c+d)}{abcd}$, keďže ale $abcd = 1$, skúška je hotová.

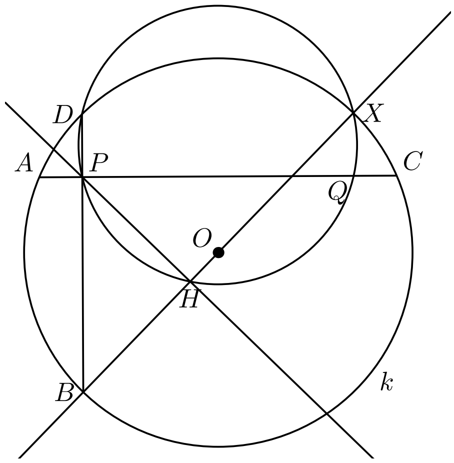
Jedinými možnými funkciami teda sú: $f(x) = x$ a $f(x) = \frac{1}{x}$.

3.8 Kolmice Môjho Štvoruholníka

opravovali **Peťo** a **Vodka**

Zadanie. *Štvoruholník ABCD je vpísaný do kružnice k so stredom O. Jeho uhlopriečky AC a BD sú na seba kolmé a pretínajú sa v bode P. Bod O leží vnútri trojuholníka BPC. Na úsečke BO je zvolený bod H tak, aby bol uhol BHP pravý. Kružnica opísaná trojuholníku PHD pretína úsečku PC po druhýkrát v bode Q. Dokážte, že* $|AP| = |CQ|$.

Najdôležitejší je asi poriadny náčrt. Jeden z pekných obrázkov nájdete tu:



Všimnite si na ňom priesečník BO a kružnice k (nazvime ho X). Ak rysujeme presne alebo používame Geogebru, tak vidíme, že leží na kružnici opísanej PHD. Poďme to dokázať. Keďže PHB je pravý uhol, tak aj XHP je pravý uhol. Tým pádom H leží na Tálesovej kružnici s priemerom PX.

Keďže X leží na priamke BO, tak BX je priemer kružnice k. Preto $\sphericalangle BDX$ je pravý. Potom ale aj $\sphericalangle PDX$ je pravý. Takže aj bod D leží na Tálesovej kružnici s priemerom PX. Preto body D, B, H, X ležia na jednej kružnici s priemerom PX. Podľa zadania aj Q leží na tejto kružnici.

Keďže uhlopriečky štvoruholníka $ABCD$ sú na seba kolmé, máme, že $|\sphericalangle CPD| = |\sphericalangle QPD| = 90°$. Preto aj DQ je priemer tejto kružnice. Z toho vyplýva, že aj $\sphericalangle DXQ$ je pravý . Preto je $DXPQ$ obdĺžnik. Z toho zase vyplýva rovnobežnosť AC a DX. Tým pádom $ACDX$ je lichobežník. Keďže leží na kružnici, musí byť rovnoramenný. (Z vety o obvodovom uhle majú dva uhly oproti sebe súčet 180° a z rovnobežnosti $|\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle ADX| = 180°$. Z toho vyplýva zhodnosť uhlov a teda aj zhodnosť dĺžok strán.) Keďže $|QX| = |PD|$, $|\sphericalangle XCQ| = |\sphericalangle DAP|$ (z rovnoramennosti $ACDX$) a $|\sphericalangle CQX| = 90° = |\sphericalangle APD|$, tak máme zhodnosť trojuholníkov APD a CQX. Preto $|AP| = |QC|$.

3.9 Káčka Množiny S

opravoval **Slavo**

Zadanie. *Označme $D(n)$ súčin deliteľov čísla n. Pre každé kladné celé číslo n vieme definovať postupnosť $a_1(n)$, $a_2(n)$,*
$a_3(n)$, … nasledovne: $a_1(n) = n$ a $a_k(n) = D(a_{k-1}(n))$ pre všetky $k \geq 2$. Dokážte, že pre každú podmnožinu $S \subseteq \{1, 2, \dots 2018\}$ vieme nájsť také kladné celé číslo n, aby platilo, že pre každé $1 \leq k \leq 2018$ je $a_k(n)$ druhou mocninou celého čísla práve vtedy, keď $k \in S$.

Našou úlohou je dokázať, že pre každú podmnožinu $\{1, 2, \dots, 2018\}$ existuje číslo n také, že $a_k(n)$ je štvorec len pre k z vybranej podmnožniny. Inak povedané, že existuje 2^{2018} čísel (pre každú podmnožinu jedno) n_1, n_2, …, $n_{2^{2018}}$ takých, že pozície, na ktorých sú štvorce v postupnostiach $a_1(n_i)$, $a_2(n_i)$, …, $a_{2018}(n_i)$ sú pre rôzne i rôzne. Chceme nájsť také n_i-ká.

Pozrime sa ešte raz na množinu $\{1, 2, \dots, 2018\}$. Je číslo 2018 niečím špeciálne? Pravdepodobne nie. Úloha zo zadania by asi mohla byť zadaná pre hocijakú množinu $\{1, 2, \dots, m\}$. Na dokázanie úlohy pre $m = 2018$ si môžeme skúsiť pomôcť dokázaním úlohy pre menšie hodnoty (pre ne by to mohlo ísť tiež dokázať). Inak povedané, môžeme skúsiť použiť matematickú indukciu[2]. Ako použiť indukciu zatiaľ netušíme, potrebujeme si najprv niečo o súčinoch deliteľov zistiť.

[2]Ak ste o matematickej indukcii ešte nepočuli, pozrite si to tu

Majme číslo n. Poďme zrátať súčin jeho deliteľov. Keď si vypíšeme deliteľov n, tak si môžeme všimnúť, že súčin najmenšieho a najväčšieho deliteľa je n, druhého najmenšieho a druhého najväčšieho deliteľa je n, tretieho najmenšieho a tretieho najväčšieho deliteľa je n… To platí aj všeobecne, ku každému deliteľovi d existuje aj deliteľ $\frac{n}{d}$ (teda okrem prípadu, že $n = x^2$, vtedy by deliteľ x mal tvoriť pár sám so sebou). Vynásobením párov dohromady dostávame

$$D(n) = n^{(\text{počet deliteľov n})/2}$$

(rozmyslite si, že to platí aj keď je n štvorec).

Teda pre dané n sa bude postupnosť $a_1(n)$, $a_2(n)$, …, $a_{2018}(n)$ skladať z nejakých mocnín čísla n. Aby sme našli čo najjednoduchšie n-ká, tak by sme ich mohli hľadať ako mocniny prvočísla. Akého prvočísla nám môže byť jedno (počty deliteľov to neovplyvní), preto si zoberme za prvočíslo 2, dostaneme čísla v tvare 2^t. Číslo 2^t má deliteľov 1, 2, 4, …, 2^t, ich súčin je $2^{t(t+1)/2}$, platí $a_2(2^t) = D(2^t) = 2^{t(t+1)/2}$.

To, či je 2^s štvorec závisí od parity s ($2^{2s'}$ je štvorec, ale $2^{2s'+1}$ nie). Pozrime sa na postupnosť $a_i(2^t)$:

- $a_2 = D(2^t)$ je štvorec práve vtedy, keď je číslo $t(t+1)/2$ párne. Kedy to nastáva, závisí od zvyšku t po delení 4.
- Kedy je $a_3 = 2^{a_2(2^t)(a_2(2^t+1))/2}$ štvorec, závisí od zvyšku $a_2(2^t)$ po delení 4.
- Kedy je $a_4 = 2^{a_3(2^t)(a_3(2^t+1))/2}$ štvorec, závisí od zvyšku $a_3(2^t)$ po delení 4.

Toto pozorovanie možno zovšeobecniť, ale to nám samo o sebe nepomáha hľadať n-ká. Napovedá nám to však, že by mohlo mať zmysel uvažovať zvyšky t po delení 2^s. Možno si uvedomiť, že ak t a t' rovnaký dávajú rovnaký zvyšok po delení 2^s, tak exponenty členov $a_2(2^t) = D(2^t)$ a $a_2(2^{t'}) = D(2^{t'})$ dávajú rovnaký zvyšok po delení 2^{s-1}, exponenty členov $a_3(2^t) = D(D(2^t))$ a $a_3(2^{t'}) = D(D(2^{t'}))$ dávajú rovnaký zvyšok po delení 2^{s-2}... Teda $a_i(2^t)$ aj $a_i(2^{t'})$ (pre i od 1 do s) sú štvorce buď obe súčasne, alebo ani jedno.

Toto tvrdenie by sme mohli použiť spolu s matematickou indukciu. Preto by sa nám hodilo tipnúť si vyhovujúce n_i-ká pre množinu $\{2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{2^m}\}$. Ak je $m = 1$, tak sú pozície štvorcov v postupnostiach $a_i(n)$ pre $n = 1, 2$ rôzne. Ak je $m = 2$, tak sú pozície štvorcov v postupnostiach $a_i(n)$ pre $n = 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ rôzne. Pre $m = 3$ sú vhodné n: 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8. Pre nejaké m by mohli byť vyhovujúce n_i: 2^1, 2^2, …, 2^{2^m}. Poďme to dokázať.

Budeme postupne dokazovať, že pozície štvorcov v postupnostiach $a_1(n)$, $a_2(n)$, …, $a_m(n)$ pre n z množiny $\{2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{2^m}\}$ sú rôzne. Prvý krok: pre $m = 1$ a množinu $\{2^1, 2^{2^1}\}$. Postupnosti $a_1(n)$, …, $a_m(n)$ sú jednoprvkové, číslu 2^1 prislúcha postupnosť 2 (čo nie je štvorec), číslu 2^2 prislúcha postupnosť 4 (čo je štvorec).

Indukčný krok: ideme dokázať, že postupnosti pre n z množiny $\{2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{2^m}\}$ sú rôzne. Z indukčného predpokladu vieme, že pozície štvorcov v postupnostiach $a_1(n), a_2(n), \dots, a_{m-1}(n)$ pre n z množiny $\{2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{2^{m-1}}\}$ sú rôzne. Indukčným krokom nám pribudli n-ká: $2^{2^{m-1}+1}$, $2^{2^{m-1}+2}$, $2^{2^{m-1}+3}$, …, 2^{2^m}. Keďže pribudnuté číslo $2^{2^{m-1}+x}$ má rovnaký zvyšok exponentu po delení 2^{m-1} ako exponent 2^x, pozície štvorcov na prvých $m-1$ miestach majú postupnosti $a_i(2^x)$ aj $a_i(2^{2^{m-1}+x})$ rovnaké, preto sú postupnosti čísel $2^{2^{m-1}+1}$, $2^{2^{m-1}+2}$, $2^{2^{m-1}+3}$, …, 2^{2^m} rôzne (líšia na prvých $m-1$ pozíciach). Potrebujeme ešte ukázať, že novo pribudnutým číslam n prislúchajú iné postupnosti $a_i(n)$ ako pôvodným číslam. T. j., ak sa pozície štvorcov dvoch čísel n_1 a n_2 zhodujú na prvých $m-1$ pozíciach, tak sa budú líšiť na m-tej. Z toho, čo sme doteraz ukázali musí platiť, že n_1 a n_2 sú postupne 2^t a $2^{t+2^{m-1}}$ (pre t do 2^{m-1}).

Dokázať dané tvrdenie je už jednoduché. Stačí sa pozrieť na exponenty $a_i(2^t)$, ktoré vieme dostať ako $\log_2 a_i(2^t)$. Napríklad možno ukázať:

$$\log_2 a_i(2^t) \equiv \log_2 a_i(2^{t'}) + 2^{x-1} \pmod{2^x} \implies \log_2 a_{i+1}(2^t) \equiv \log_2 a_{i+1}(2^{t'}) + 2^{x-2} \pmod{2^{x-1}}.$$

Viacnásobným aplikovaním dostaneme

$$\log_2 a_1(2^t) \equiv \log_2 a_1(2^{t'}) + 2^{m-1} \pmod{2^m} \implies \log_2 a_m(2^t) \equiv \log_2 a_m(2^{t'}) + 1 \pmod{2},$$

teda ozaj práve jedno z čísel $a_m(2^t)$ a $a_m(2^{t'}+1)$ je štvorec.

3.10 Kynoženie Mestských Snejkov

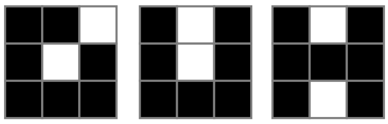
opravoval **Jožo**

Zadnie. *V hlavnom meste kolónie dokončujú námestie. Plochu $(2^n+1)\times(2^n+1)$ chcú vydláždiť bielymi a čiernymi dlaždicami rozmeru 1×1. Dláždiť musia tak, aby z čiernych dlaždíc nevznikol uzavretý hadík. V závislosti od kladného celého čísla n určte, koľko najviac čiernych dlaždíc môžu použiť?*

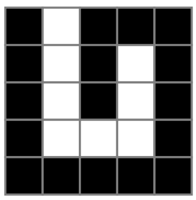
Poznámka. Uzavretý hadík je postupnosť $k \geq 4$ rôznych čiernych dlaždíc $a_1, a_2, \ldots, a_k$ takých, že dlaždice a_i a a_{i+1} pre $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ a taktiež dlaždice a_k a a_1 majú spoločnú hranu.*

Prvotné úvahy

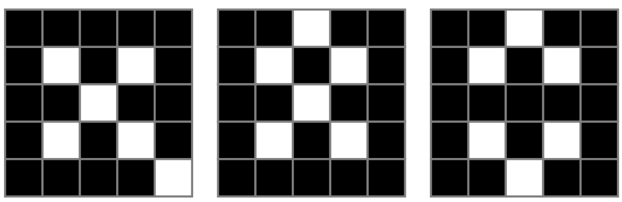
Na začiatok si môžeme vyriešiť úlohu pre prípad $n = 1$, teda pre námestie rozmerov 3×3. Ľahko prídeme na to, že najviac možno použiť 7 čiernych dlaždíc, napríklad nasledovnými spôsobmi:



Môžeme pristúpiť k vyšším rozmerom. Jeden spôsob, ktorý môžeme odpozorovať s prvých dvoch dláždení námestia 3×3, je skúsiť vytvoriť z čiernych dlaždíc jedného dlhého zamotaného hadíka. Pri námestí 5×5 tak použijeme 17 čiernych dlaždíc.



Ak sa trochu viac pohráme a skúsime sa inšpirovať tretím spôsobom, kde sa čierne dlaždice akoby „rozvetvujú“, môžeme objaviť vydláždenie využívajúce 19 čiernych dlaždíc.



Môžeme skúšať vydláždiť námestie 9×9, ale zatiaľ sa nám tu nerysuje žiaden očividný systém, ako najlepšie dláždiť. Môžeme sa skúšať hrať a nachádzať čo najlepšie spôsoby dláždenia. Ale pokiaľ chceme úlohu vyriešiť, tak raz budeme musieť ukázať, prečo nemôže byť čiernych dlaždíc viac. Preto sa pokúsime najskôr získať nejaký horný odhad, aby sme vytušili, kedy s našimi hrátkami skončiť.

Horný odhad

Ako môžeme získať nejaký horný odhad? Čo za vec sú uzavreté hadíky? Nepripomínajú nám nejaký známy matematický pojem? Podobné veci možno nájsť v teórii grafov. *Graf* sa skladá z *vrcholov* a *hrán*, kde niektoré dvojice vrcholov sú spojené hranou. V teórie grafov máme pojem *cyklus*, ktorý celkom dobre odpovedá uzavretému hadíkovi. O cykloch v grafe vieme povedať, že graf neobsahujúci cyklus má menej vrcholov ako hrán. Skúste si to dokázať.[3]

Takže nejaký odhad by sme vedeli získať porovnaním počtu vrcholov a hrán. Najprv však musíme prerobiť naše námestie na graf, ktorý si pomenujeme G. Zvolíme pri tom celkom priamočiary postup. Čierne dlaždice budú zodpovedať vrcholom grafu G a dva vrcholy spojíme hranou, ak im odpovedajúce čierne dlaždice majú spoločnú stranu. Ak označíme c počet čiernych dlaždíc, tak náš graf má c vrcholov. Teraz odhadneme zhora počet jeho hrán.

Označme si $m = 2^n+1$. Zoberme si graf H, ktorý zodpovedá námestiu rozmerov $m\times m$, ktoré je celé vydláždené načierno. Graf H má m vrcholov a $2m(m-1)$ hrán. Graf G z neho dostaneme tak, že odstránime $b = m^2 - c$ bielych políčok. Každé biele políčko odstráni najviac 4 hrany. Preto počet hrán grafu G bude aspoň $2m(m-1) - 4b = 2m(m-1) - 4m^2 + 4c = 4c - 2m^2 - 2m$. Keďže graf G je bez cyklu, tak musí obsahovať menej hrán ako vrcholov, teda

$$4c - 2m^2 - 2m < c,$$

$$c < \frac{2m(m+1)}{3}.$$

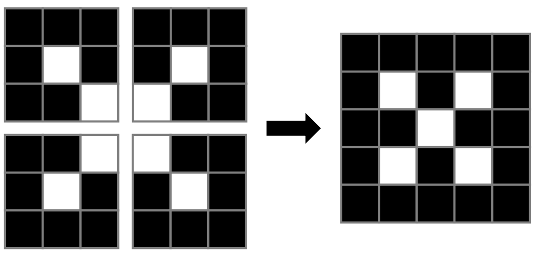
Dostávame tak, že počet použitých čiernych dlaždíc pri dláždení námestia $m \times m$ môže byť najviac

$$\frac{2m(m+1)}{3} - 1 = \frac{2(2^n+1)(2^n+2)}{3} - 1 = \frac{2\cdot 4^n + 6\cdot 2^n + 4 - 3}{3} = \frac{2\cdot 4^n + 1}{3} + 2^{n+1}.$$

Myšlienka konštrukcie

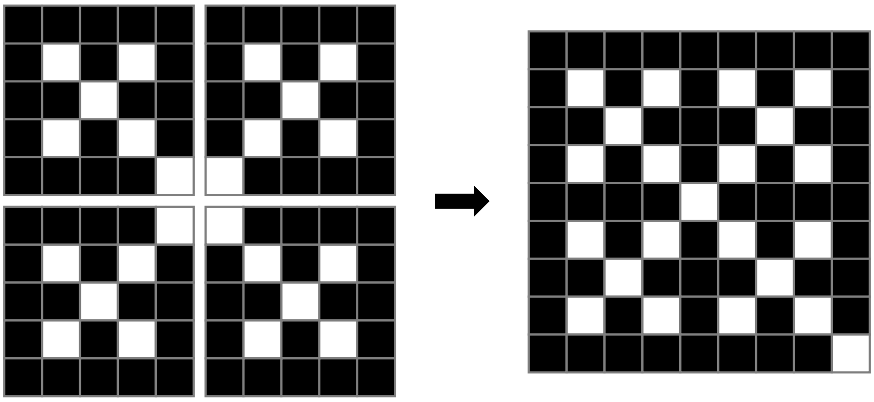
Odhad, ktorý sme získali, je super, lebo pre $n = 2$ (námestie 5×5) dostávame, že 19 je naozaj najväčší možný počet čiernych dlaždíc. Skúsme teda nájsť nejaký postup, ako vydláždime námestia všetkých možných rozmerov. Náš odhad nám aj môže pomôcť pri hľadaní riešenia. Aby sme ho dosiahli, musia takmer všetky biele dlaždice susediť so štyrmi čiernymi.

Môžeme si všimnúť, že dláždenie námestia 5×5 sa dá poskladať zo štyroch dláždení námestí 3×3 s tým, že ešte jednu dlaždicu prefarbíme nabielo.



Ak tento postup zopakujeme, vieme dostať námestie rozmerov 9×9 vydláždené 59 čiernymi dlaždicami, čo je z nášho odhadu najväčší možný počet. Vyzerá to teda sľubne, tak skúsme tento postup všeobecne opísať.

[3] O teórii grafov si môžete bližšie prečítať v Zbierke KMS.



Konštrukciu pôjdeme teda popisovať induktívne, tzn. pomocou dláždenia menších námestí vydláždime väčšie námestie.

Konštrukcia

Námestie rozmerov 3×3 vydláždime ako na prvom obrázku. Námestie rozmerov $(2^n+1)\times(2^n+1)$ vydláždime nasledovne: Prostredný riadok a prostredný stĺpec vydláždime načierno okrem ich spoločného políčka, kam dáme bielu dlaždicu. Takto sa nám námestie rozdelí na štyri *oblasti* rozmerov $(2^n+1)\times(2^n+1)$ vychádzajúce z jeho rohov. Každú oblasť vydláždime ako vhodne otočené námestie rozmerov $(2^n+1)\times(2^n+1)$. Nakoniec čiernu dlaždicu v pravom dolnom rohu vymeníme za bielu.

Všimnime si, že každé takto vydláždené námestie má na obvode len čierne dlaždice okrem jednej rohovej dlaždice, ktoré je biela.

Ak počet bielych dlaždíc vo vydláždení námestia $(2^n+1)\times(2^n+1)$ označíme p_n, platí $p_{n+1} = 4p_n - 3$ pre každé celé $n \geq 1$ a $p_1 = 2$. Tento počet vieme vyjadriť aj ako $p_n = (4^n+2)/3$, čo vieme ľahko ukázať matematikcou indukciou. Počet čiernych dlaždíc je teda

$$(2^n+1)^2 - \frac{4^n+2}{3} = 4^n + 2\cdot 2^n + 1 - \frac{4^n+2}{3} = \frac{2\cdot 4^n+1}{3} + 2\cdot 2^n,$$

čo presne zodpovedá nášmu hornému odhadu.

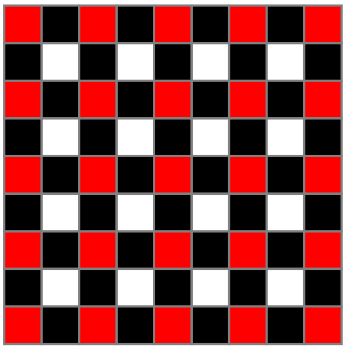
Ostáva nám teda len ukázať, že v takomto vydláždení nie je uzavretý hadík z čiernych dlaždíc. Pre spor predpokladajme, že ho tam máme a že bez ujmy na všeobecnosti prechádza ľavou hornou oblasťou. Z indukčného predpokladu vieme, že iba v jednej oblasti hadík nemôže byť. Musí teda vychádzať z ľavej hornej oblasti a vchádzať do nej. Ak by vychádzal aj vchádzal na tej istej strane, dostaneme hadíka v prvej oblasti. Preto hadík z ľavej hornej oblasti musí prechádzať aj pravou hornou, aj ľavou dolnou oblasťou. Aby sa uzavrel, musí prechádzať aj pravou dolnou oblasťou, teda všetkými oblasťami.

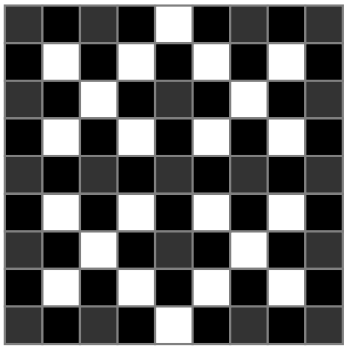
Každý hadík musí prechádzať všetkými štyrmi oblasťami. Pritom do každej oblasti vchádza a vychádza na iných stranách. Zoberme si pravú dolnú oblasť O, do ktorej vchádza hadík na kachličke X a vychádza na kachličke Y. Hadík neprechádza pravým dolným rohom, keďže sa tam nachádza biela kachlička. Keď ju však vymeníme za čiernu, dostaneme vyhovujúce dláždenie oblasti O. Avšak teraz sa možno z kachličky X dostať do kachličky Y aj po obvode oblasti O cez pravý dolný roh. Spojením týchto dvoch ciest vieme nájsť v oblasti O uzavretého hadíka (skúste si riadne dokázať, že taký existuje). To je však spor, lebo z indukčného predpokladu dláždenie tejto oblasti žiadneho neobsahovalo.

Ukázali sme teda, že naše dláždenie námestia $(2^{n+1}+1)\times(2^{n+1}+1)$ neobsahuje žiadnych hadíkov a taktiež, že používa najväčší možný počet čiernych dlaždíc.

Iná konštrukcia

Ilustrujeme ešte jeden spôsob, ako vydláždiť námestie $(2^n+1)\times(2^n+1)$ s najväčším možným počtom dlaždíc. Začne tým, že čierne dlaždice poukladáme šachovnicovo tak, že rohy nám ostanú voľné. Pozrime sa políčka v nepárnom riadku a zároveň v nepárnom stĺpci (ak máme riadky aj stĺpce očíslované od 1 po 2^n+1), ktoré si vyfarbíme načerveno.





Z červených políčok si vieme vytvoriť *červené námestie* rozmerov $(2^{n-1}+1)\times(2^{n-1}+1)$. Ak na červené políčka uložíme biele a čierne dlaždice, tak uzavretý čierny hadík v námestí $(2^n+1)\times(2^n+1)$ zodpovedá uzavretému čiernemu hadíkovi v červenom námestí. Preto ak červené políčka vydláždime najlepším dláždením námestia $(2^{n-1}+1)\times(2^{n-1}+1)$, v dláždení námestia $(2^n+1)\times(2^n+1)$ nám nevznikne žiaden uzavretý hadík. To, že takéto dláždenie obsahuje $(2\cdot 4^n+1)/3+2\cdot 2^n$ čiernych dlaždíc ponechávame na čitateľa.

Komentár

Vo väčšine úloh, kde hľadáme najväčší (príp. najmenší) počet niečoho, v kategórii BETA je jednoduchšia časť nájsť riešenie a spôsob, ako ho dosiahnuť. V tejto úlohe boli pomerne obtiažne obe časti. Preto hoci pre mnohých z vás je zdôvodňovanie, že viac dlaždíc nemožno použiť, tá menej obľúbená časť, bol tu priestor na hľadanie najlepšieho spôsobu dláždenia. Za nájdenie najväčšieho možného počtu čiernych dlaždíc a ukázanie spôsobu dláždenia, ako ho dosiahnuť vrátane dôkazu, že vyhovuje zadaniu, bolo možné získať až 5 bodov.