Riešenia 1. kola zimnej časti

1.1 Kike Mešká Spoj ($\kappa \leq 1$)

opravovali **Čeky a Matúš**

Zadanie. *Kika čaká na lietadlo do Dánska. Z dlhej chvíle začala postupne písať do štvorčekovej siete prirodzené čísla. Začala od jednotky a vpisovala ich v protismere hodinových ručičiek tak, ako vidíte na obrázku. Ktoré číslo je napísané pod číslom 2018?*

					···	32	31	
	17	16	15	14	13	30		
	18	5	4	3	12	29		
	19	6	1	2	11	28		
	20	7	8	9	10	27		
	21	22	23	24	25	26		

Vypisovať všetky čísla až po 2018 sa nám určite nebude chcieť, preto by sme chceli objaviť vzťah medzi číslami napísanými na určitých pozíciách. Vypíšeme si niekoľko malých čísel a skôr či neskôr si všimneme postupnosť, ktorú sme už niekde videli. Vpravo dole od jednotky máme deviatku, vpravo dole od nej je číslo 25, potom 49, 81 a tak ďalej. Vidíme teda, že na tejto polpriamke sa postupne nachádzajú druhé mocniny nepárnych čísel. Aby sme si tým mohli byť istí a použiť to v riešení, musíme to ešte dokázať.

Predstavme si, že čísla si postupne vpisujeme do štvorčekov. Číslo na poslednom políčku vlastne hovorí, na koľkých štvorčekoch (vrátane jeho samého) je už napísané nejaké číslo, inými slovami, reprezentuje obsah časti, na ktorej sú napísané čísla. Keď teda budeme mať vyplnený práve štvorec, budeme sa nachádzať na polpriamke, ktorá ide od jednotky doprava dole a posledné napísané číslo bude obsah tohto štvorca, čiže druhá mocnina. Keď sa znovu dostaneme do situácie, že máme vyplnený štvorec, tak nový štvorec bude mať od predchádzajúceho o dva štvorčeky dlhšiu stranu, preto budú na našej polpriamke len nepárne druhé mocniny.

Aby sme vedeli kde sa nachádza číslo 2018, potrebujeme nájsť nepárnu mocninu, ktorá je najbližšie k nemu. Tou je $45^2 = 2025$. Vzdialenosť štvorčekov s číslami 2025 a 2018 je 7, čiže číslo 2018 sa nachádza o sedem štvorčekov vľavo od čísla 2025. Aby sme zistili aké číslo je pod ním, musíme ísť o riadok nižšie, čiže doprava dolu od 2025 na najbližšiu nepárnu druhú mocninu, teda $47^2 = 2209$ a potom už len o osem doľava aby sme sa dostali pod 2018. Čím sme sa dostali na číslo $2209 - 8 = 2201$

Pod číslom 2018 sa teda nachádza číslo 2201.

1.2 Klábosenie Medzi Spolupasažiermi ($\kappa \leq 2$)

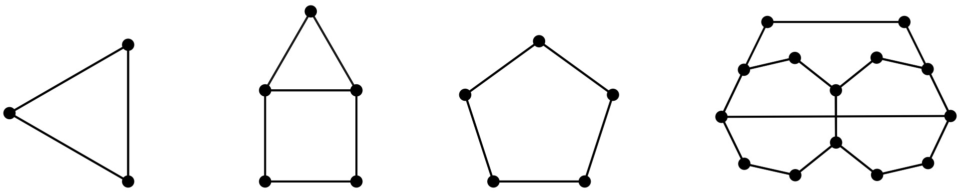
opravovali **Kika** a **Mixťo**

Zadanie. *Kika sedí v lietadle a keďže je zhovorčivá, už stihla vyzistiť o ostatných pasažieroch nasledovné: V lietadle je n pasažierov, niektorí sa poznajú (známosti sú vzájomné) a každý pasažier sa cez niekoľko známostí pozná s ľubovoľným iným. Ešte si všimla, že keď rozdelíme pasažierov na ľubovoľné dve neprázdne skupiny, tak určite aspoň v jednej z nich existuje dvojica pasažierov, ktorá sa pozná. Ukážte, že vieme nájsť aspoň troch ľudí, ktorých vieme postaviť do kruhu tak, že každý pozná svojich dvoch susedov.*

Úvod do problematiky

Celkom ťažké na tejto úlohe, obzvlášť pre nových riešiteľov, mohlo byť uvedomiť si, čo nám vlastne hovorí zadanie a čo vlastne máme v tejto úlohe spraviť. Pri ďalšom riešení KMS sa so zložitejšími zadaniami úloh ešte niekoľkokrát stretnete. Preto si ukážeme, ako sa s takýmto zadaním popasovať.

Zadanie nám opisuje nejakú situáciu, konkrétne ako sa pasažieri v lietadle poznajú. Dobrým začiatkom je si situáciu nakresliť. Pasažierov si môžeme zakresliť ako body. Keď sa nejaká dvojica pasažierov pozná, znázorníme to tak, že príslušné body spojíme čiarou.[1] Avšak, ako nám zadanie ďalej opisuje, medzi pasažiermi to nevyzerá len tak hocijako. Kika zistila nejaké vlastnosti toho, ako sa pasažieri poznajú. Prvou vlastnosťou je, že každý sa cez niekoľko známostí pozná s ľubovoľným iným pasažierom. Aby sme sa takto dlho už ďalej nerozpisovali, nazveme si túto vlastnosť tak, že pasažieri sú *súvislí*. Túto vlastnosť pekne vidno na obrázkoch – sú proste súvislé ;). Ďalšou vlastnosťou je, že nech akokoľvek rozdelíme pasažierov na dve neprázdne skupiny, tak v aspoň jednej skupine bude dvojica, čo sa pozná. Túto vlastnosť budeme nazývať *nerozdeliteľnosť*. Takže zadanie nám opisuje nejakých pasažierov, ktorí sú súvislí a nerozdeliteľní. Tak poďme si nakresliť niekoľko príkladov takejto situácie.



(a) (b) (c) (d)

Pri nachádzaní toho, ako sa pasažieri môžu poznať, narazíme na problém s nerozdeliteľnosťou. Nie je to totiž vlastnosť, ktorá by bola vidno z obrázku. Aby sme skontrovali, či naši pasažieri sú skutočne nerozdeliteľní, tak jedna možnosť je vyskúšať všetky možné rozdelenia na dve skupiny a overiť, že v každom rozdelení sa niekto v rámci jednej skupiny pozná. Môže nás ale napadnúť aj iných spôsob, ako nerozdeliteľnosť zaručiť. Napríklad, ak máme trojicu pasažierov, v rámci ktorej sa pozná každý s každým. Také trojice sa nachádzajú na obrázkoch (a) a (b). Taktiež to môžeme dosiahnuť tým, že medzi pasažiermi sa bude nachádzať skupina nepárneho počtu pasažierov, ktorej členovia sa poznajú do kolečka. Obrázok (c) je tvorený práve takouto 5-člennou skupinou. Na obrázku (d) sa nachádzajú viaceré 7-členné a aj 11-členné „kolečko“.

Tým sa dostávame k našej úlohe. Máme totiž ukázať, že existuje skupina aspoň troch ľudí, ktorých možno postaviť do kruhu tak, že každý pozná svojich dvoch susedov. To sú presne tie naše „kolečká“, o ktorých sme nedávno písali. Takéto skupiny ľudí budeme nazývať ako *cykly*. Našou úlohou teda je ukázať, že medzi pasažiermi existuje cyklus. Môžeme si všimnúť, že situácie, ktoré sme si načrtli, cykly obsahujú. Čo je ale potrebné si uvedomiť, našou úlohou nie je vyriešiť zopár konkrétnych prípadov, ale všetky. Inými slovami, máme ukázať, že ak dostaneme hocikoľko pasažierov, ktorí sa hocijako poznajú tak, že sú súvislí a nerozdeliteľní, tak je medzi nimi cyklus. Možností, ako sa pasažieri môžu poznať je strašne (dokonca nekonečne) veľa a my musíme ukázať, že v každej je cyklus.

Samotné riešenie

Keď sa snažíme nájsť nerozdeliteľných pasažierov, tak to vyzerá tak, že to bez cyklov nejde. Ak si skúsime nakresliť nejakých pasažierov bez cyklu, tak zistíme, že ich možno rozdeliť na dve skupiny, v rámci ktorých sa

[1] Podobné situácie sa v matematike často vyskytujú. Môžu to byť napríklad mestá pospájané cestami alebo kamaráti, ktorí niekedy boli u seba na návšteve a mnoho iného. Matematika pre prácu s takýmito situáciami vyvinula celú teóriu. Ide o teóriu grafov. Ak vás viac zaujíma, môžete si o nej prečítať napr. v Zbierke KMS.

nikto nebude poznať, teda sa nám pokazí nerozdeliteľnosť. Od týchto našich úvah sa odrazíme a pokúsime sa ich zovšeobecniť. Keď chceme skúšať nájsť pasažierov bez cyklu, tak vlastne skúšame dôkaz sporom. To presne aj spravíme. To znamená, že budeme predpokladať, že máme pasažierov, ktorí sú nerozdeliteľní, súvislí a bez cyklu. A ako naše úvahy naznačili, pokúsime sa dopracovať ku sporu s nerozdeliteľnosťou.

Poďme teda skúsiť pasažierov rozdeliť na dve skupiny. Na začiatok vyberme jedného človeka, nazvime ho Jano a dajme mu číslo 1. Všetkých jeho známych očíslujeme číslom 2. Všetkých známych dvojok očíslujeme jednotkami, opäť zas všetkých známych jednotiek očíslujeme dvojkami a takto to striedame ďalej, až kým neočíslujeme všetkých.

Teraz máme pasažierov rozdelených na dve skupiny: na tých s číslom 1 a tých s číslom 2. Čo by sa stalo, ak by sa poznali dvaja ľudia, nazvime si ich A a B, z tej istej skupiny? Pritom, ako sme pasažierov číslovali, sme sa dostali od Jana k pasažierovi A po nejakej postupnosti pasažierov a po nejakej inej sme sa dostali k pasažierovi B. V oboch postupnostiach sme používali známosti, v ktorých sa poznali dvaja ľudia z iných skupín. Preto známosť medzi A a B sme nemohli použiť. Poďme teraz späť po týchto postupnostiach smerom k Janovi, kým sa nestrenú v nejakom pasažierovi C (môže to byť aj Jano). Ak by sa A a B poznali, tak vieme nájsť cyklus: vyberieme sa od pasažiera A po známostiach smerom k C, potom od C k B a zakončíme to známosťou medzi A a B. Teda nemôže sa stať, žeby sa dvaja ľudia v rámci jednej skupiny poznali. To ale dostávame spor s tým, že pasažieri sú nerozdeliteľní. Preto musí medzi nimi existovať cyklus.

1.3 Kufre Medzi Súdeliteľnými ($\kappa \leq 3$)

opravoval **Dominik**

Zadanie. *Kika má* 10 *kufrov očíslovaných desiatimi po sebe idúcimi kladnými celými číslami. Všimla si, že jedno z nich je nesúdeliteľné s ostatnými. Pri tomto pozorovaní sa zamyslela, pre aké iné desatice po sebe idúcich čísel to platí. Dokážte, že jej desatica nie je špeciálna, pretože táto vlastnosť platí pre všetky desatice po sebe idúcich kladných celých čísel.*

Na úvod je dôležité, uvedomiť si, čo od nás úloha očakáva. Potrebujeme dokázať, že pre ľubovoľných 10 po sebe idúcich prirodzených čísel platí, že aspoň jedno z nich nemá žiadneho spoločného deliteľa s ktorýmkoľvek iným.

Mnohí z vás si uvedomili, že medzi takýmito desiatimi číslami v žiadnom prípade nebudú dva násobky čísla, ktoré je väčšie ako 9. Je to jednoducho preto, lebo rozdiel medzi najväčším a najmenším číslom je práve 9 a teda dve čísla s rozdielom väčším ako 9(a teda aj dva násobky čísla väčšieho ako 9) sa tam nenachádzajú. Taktiež je dobrým nápadom uvažovať medzi deliteľmi len prvočísla, pretože zložené čísla sú už sami násobkami niektorého menšieho čísla. Preto nás pri riešení bude zaujímať, či je každé z čísel deliteľné niektorým z prvočísel od 2 po 9. Týmito prvočíslami sú: $2, 3, 5$ a 7.

V ďalšej časti riešenia je potrebné spočítať, koľko čísel medzi týmito desiatimi môže byť násobkom jednotlivých prvočísel. Ako úloha hovorí, potrebujeme ukázať, že nech ide o akýchkoľvek 10 po sebe idúcich čísel, maximálne deväť z nich bude násobkom niektorého z uvedených prvočísel. Postupne uvážime každé z nich a tiež prekryvy, ktoré môžu nastať - napríklad číslo 10 by sme zaradili medzi násobky dvojky aj päťky, no stále ide len o jedno číslo.

Násobkov dvojky bude zjavne v ľubovoľnej takejto skupine čísel 5 - všetky párne čísla. Násobky trojky môžu byť v skupine nanajvýš štyri(napríklad $21, 24, 27, 30$ medzi číslami od 21 po 30). Spomedzi nich budú nepárne nanajvýš dva, pretože medzi ľubovoľnými dvomi po sebe idúcimi nepárnymi násobkami trojky musí byť párny násobok. Násobky päťky sú vždy v skupine dva, jeden končiaci cifrou 0 a druhý cifrou 5, nepárny je ten končiaci cifrou 5. Podobne môžete uvážiť, že sa v skupine bude nachádzať nanajvýš jeden nepárny násobok sedmičky.

V predošlom odseku sme nezvážili, že číslo môže byť nepárne a byť násobkom dvoch rôznych prvočísel. Môžeme si uvedomiť, že tieto čísla by nám pri hľadaní čo najvyššieho možného počtu čísel, ktoré sú násobkami daných prvočísel, s určitosťou nepomohli. Teraz nám už len stačí spočítať, že počet takýchto čísel bude najviac $5+2+1+1=9$ a teda sa nám pre každú skupinu desiatich za sebou idúcich čísel podarí nájsť jedno, ktoré je s ostatnými nesúdeliteľné.

1.4 Kika, Mince, Šarlatán ($\kappa \leq 4$)

opravovali **Kika Prš** a **Kubo**

Zadanie. *Newyorkskí stredoškoláci trávia svoj voľný čas streetballom. Nemajú tam totiž KMS. Najlepšie sa hrá takej partii, ktorá sa vie rovnomerne rozdeliť.*
Nájdite všetky šestice po sebe idúcich prirodzených čísel, ktoré je možné rozdeliť do dvoch skupín (nie nutne rovnako veľkých) s rovnakým súčinom.Kika narazila na letisku na šarlatána. Ten mal na stole dve kôpky po n mincí. Kika sa rozhodla, že šarlatána niečo naučí, a preto sa s ním pustila do nasledujúcej hry.

Kika a šarlatán hrajú proti sebe hru. Na stole majú položené dve kôpky, na každej je n mincí. Kika začína a následne sa so šarlatánom striedajú v ťahoch. Hráč na ťahu musí vykonať práve jednu z nasledujúcich akcií:

- *vyberie si jednu kôpku a zoberie z nej ľubovoľný kladný celočíselný počet mincí,*
- *zoberie po jednej minci z oboch kôpok (ak je na oboch kôpkach aspoň 1 minca).*

Hráč, ktorý zoberie svojím ťahom zo stola poslednú mincu, vyhráva. Zistite v závislosti od kladného celého čísla n, ktorý hráč má víťaznú stratégiu.[2]

Najprv sa zamyslíme, ako to v takomto type hier funguje. V týchto hrách sa hráči striedajú v ťahoch, neexistuje v nich prvok náhody, majú konečný počet pozícií a nemôže nastať remíza. Takéto hry sú známe aj ako kombinatorické hry.

Keďže hra má konečný počet pozícií (pre ľubovoľné n), tak to znamená, že pre každú pozíciu musí byť jednoznačne určené, či je prehrávajúca (P), alebo vyhrávajúca (V). Zamyslime sa teraz, čo to znamená, ak je pozícia V, alebo P.

1. Ak je pozícia V, tak to znamená, že vieme urobiť aspoň jeden ťah, ktorým súpera dostaneme do P pozície.
2. Ak je pozícia P, tak to znamená, že ľubovoľným z našich ťahov dostaneme súpera do V pozície.

Vráťme sa späť k našej úlohe. Na začiatok je pre ľubovoľnú pozíciu ťažké rozhodnúť, či je V, alebo P. Preto si túto hru trochu rozanalyzujeme pre malé počty mincí. Tým si vieme urobiť základný prehľad o hre a dopracovať sa k nejakým hypotézam. Ešte si však uvedomme, že nakoľko vieme brať z ľubovoľnej kôpky, nezáleží nám na poradí kôpok.

Vieme, že pozícia $(0;0)$ je P, lebo hráč, ktorý by mal byť na ťahu v tejto pozícií už vlastne prehral. Pozície $(1;1),(1;0),(2;0),(3;0),\dots,(n;0)$ sú teda V, lebo z nich svojím ťahom dokážeme dostať súpera do P pozície $(0;0)$. Pozícia $(2;1)$ je už ale prehrávajúca, lebo každý z našich ťahov dovedie súpera do V pozície. Takýmto postupom ďalej dostaneme:
(0;0) - P, $(1;1)-V,(1;0)-V,(2;0)-V,(3;0)-V,\dots,(n;0)-V$
(2;1) - P, $(3;1)-V,(4;1)-V,(5;1)-V,\dots,(n;1)-V$
(1;2) - P, $(2;2)-V,(3;2)-V,(4;2)-V,\dots,(n;2)-V$
(3;3) - P, $(4;3)-V,(5;3)-V,(6;3)-V,\dots,(n;3)-V$

Skôr či neskôr si asi všimneme, že pozície tvaru $(3k;3k)$ a $(3k+2;3k+1)$ sú P. Hypotézu konečne máme, stačí to už len dokázať.

[2] Hráč má víťaznú stratégiu, ak si vie svojimi ťahmi zaručiť výhru bez ohľadu na to, ako hrá jeho súper.

Pozície tvaru $(3k; 3k)$ a $(3k+2; 3k+1)$ si označme ako pozície typu A a všetky ostatné pozície si označme ako pozície typu B. Rozmyslite si, že aby naozaj platilo, že pozície A sú prehrávajúce a pozície B sú vyhrávajúce stačí, aby platili tieto tri predpoklady:

1. Konečná pozícia $(0; 0)$ musí byť pozíciou typu A.
2. Z ľubovoľnej pozície typu B vieme dostať súpera do pozície typu A.
3. Z ľubovoľnej pozície typu A vieme súpera dostať iba do pozícií typu B.

Pre predpoklad 1 je zrejmé, že platí. Pre predpoklad 2 si stačí premyslieť všetky možnosti. V prípade $(3x, y)$, kde $y > 3x$, stačí vytvoriť dve kôpky po $3x$ mincí. Ak je $y < 3x$, tak je buď tvaru $3z+1$ alebo $3z+2$. Ak je tvaru $3z+1$, tak z druhej kôpky odoberieme toľko mincí aby na nej zostalo $3z+2$ mincí. Podobne ak je tvaru $3z+2$. Vtedy odoberieme z druhej kôpky toľko mincí aby na nej zostalo $3z+1$ mincí. Už nám zostáva len možnosť, že máme $(3x+1, 3y+2)$ mincí, pričom $x \neq y$. V tom prípade zoberieme z niektorej kôpky toľko mincí, aby sme dostali možnosť $(3k+1, 3k+2)$, pričom k je menšie z dvojice x, y. Tým máme dokázané, že z týchto pozícií vieme dostať súpera do pozície typu A.

Pre predpoklad 3 vidíme, že z pozície $(3k; 3k)$, ani z pozície $(3k+2; 3k+1)$ naozaj nevieme dostať súpera do pozícií typu A.

Keďže všetky tri predpoklady naozaj platia, pozície tvaru $(3k; 3k)$ a $(3k+2; 3k+1)$ sú naozaj prehrávajúce a všetky ostatné sú vyhrávajúce. Čiže pre $n = 3k$ má víťaznú stratégiu šarlatán a pre $n = 3k+1$ a $n = 3k+2$ má víťaznú stratégiu Kika.

1.5 Koláč Mojich Spoluvedúcich ($\kappa \leq 7$)

opravovali **Ivka** a **Marcel**

Zadanie. *Betka na rozlúčku s Kikou a Jožom napiekla štvorcový perník. Jožo a Kika sa o neho podelia nasledujúcim spôsobom. Najprv Jožo umiestni sviečku na perník, potom Kika spraví rez od sviečky niekam po okraj perníka. Následne Jožo spraví druhý rez od sviečky po okraj perníka tak, aby bol kolmý na Kikin rez. Ako výsledok máme perník rozdelený na dve časti, z ktorých Kika dostane menšiu časť. Ukážte, že Kika si môže vhodným rezom zabezpečiť získanie aspoň štvrtiny perníka bez ohľadu na to, čo spraví Jožo.*

Sviečku si označme ako bod K. Najprv ho Jožo umiestni niekam do štvorca $ABCD$ (koláča). Rozdeľme si tento štvorec na 4 zhodné časti dvoma, na seba kolmými, priamkami prechádzajúcimi cez jeho stred a stredy jeho strán. Bod K (sviečka) sa po umiestnení môže nachádzať v ľubovoľnej štvrtine koláča, alebo v jeho strede. Predpokladajme, že sa nachádza v **pravej hornej** štvrtine alebo v strede. Ak by bola v ktorejkoľvek inej, stačí si koláč otočiť. Teraz je na rade Kika a reže od bodu K ku kraju koláča. V tejto chvíli jej odporúčame rezať k najvzdialenejšiemu bodu štvorca ktorým je bod A, lebo tak zaručene dostane aspoň štvrtinu koláča. Hneď si ukážeme prečo.

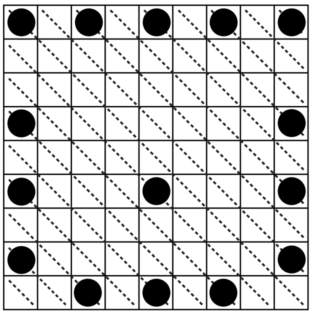
Jožo má teraz dve možnosti ako viesť svoj rez. Ešte predtým ako si jednu vyberie však do štvorca dokreslime dva trojuholníky obsahujúce Kikin rez a jednu stranu štvorca. Konkrétne trojuholníky ABK a AKD. Obsah týchto trojuholníkov bude zaručene väčší alebo rovnaký ako štvrtina štvorca. To môžeme vidieť z trojuholníkov ABS a ASD, ktoré majú s danými trojuholníkmi spoločnú základňu. Výšky trojuholníkov ABK a AKD sú väčšie alebo rovnaké ako výšky trojuholníkov ABS a ASD. Trojuholníky ABS a ASD majú obsahy rovné jednej štvrtine, takže obsahy ABK a AKD budú väčšie alebo rovné jednej štvrtine (to že obsahy trojuholníkov ABS a ASD sú rovné štvrtine obsahu štvorca by ste mali vidieť celkom ľahko).

Vráťme sa teraz k Jožovi, ktorý sa rozhoduje na ktorú stranu od Kikinho rezu bude viesť svoj kolmý rez. Nech ale spraví rez na ktorúkoľvek stranu, obe časti takto predeleného koláča budú obsahovať práve jeden z trojuholníkov ABK a AKD, o ktorých sme si práve ukázali, že sú väčšie alebo rovnaké ako štvrtina štvorca. Obe časti koláča majú teda aspoň jednu štvrtinu a Kika môže byť v kľude.

1.6 Koľko Magnificentných Strelcov? opravovali **Adamko** a **Jerry**

Zadanie. *Jožo nedávno objavil Japonský šach (šógi). Šógi sa hrá na šachovnici* 9 × 9 *políčok. Figúrka* povýšený strelec *ohrozuje políčka, ktoré sa nachádzajú v rovnakej uhlopriečke (ako strelec v bežnom šachu) a navyše aj políčka, ktoré majú spoločnú hranu s políčkom, na ktorom povýšený strelec stojí. Koľko najviac povýšených strelcov môže Jožo umiestniť na šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?*

Pri tomto type úloh začneme väčšinou skúšaním. V našom prípade sa snažíme uložiť na šachovnicu čo najviac strelcov. Vyskúšame napríklad na začiatok každej druhej uhlopriečky položiť strelca (aby spolu nesusedili) a následne pokračujeme po obvode a položíme strelcov na koniec každej, ešte neohrozenej, uhlopriečky. Metódou pokus-omyl skôr či neskôr zistíme, že viac ako 15 strelcov sa nám nepodarí uložiť. Teraz prichádza čas zamyslieť sa nad tým, koľko najviac strelcov vieme umiestniť na šachovnicu.



Pozrime sa na uhlopriečky v jednom smere, napríklad zľava doprava (viď obrázok). Je ich tam 17. Ak položíme strelca na niektorú uhlopriečku, je ohrozená celá a už na ňu nemôžeme položiť ďalšieho. Z toho môžeme usúdiť, že viac ako 17 strelcov určite umiestniť nevieme. Avšak naši strelci sa ohrozujú nie len na uhlopriečkach, ale aj na susedných políčkach. To je problém napríklad v ľavom dolnom rohu. Ak dáme strelca na políčko v rohu, tak ohrozuje obe políčka susednej uhlopriečky, a teda na ňu nevieme položiť strelca. Ak miesto toho dáme strelca na druhú uhlopriečku, bude ohrozovať políčko v rohu a nebudeme môcť naň položiť ďalšieho. Na tieto dve rohové uhlopriečky vieme teda položiť iba jedného strelca, nie dvoch. Celkový počet strelcov sa nám zníži na 16. Keďže tento problém je aj v opačnom rohu, bude to len 15. Rozloženie 15 strelcov na šachovnici sme našli už na začiatku, takže sme úlohu vyriešili.

1.7 Kodaňčania Majú Symetrie opravovali **Marek** a **Tomáš**

Zadanie. *Kika si v Dánsku všimla zaujímavú vec – všetci Dáni majú ľavé rameno rovnako dlhé ako pravé a navyše, všetci Dáni rovno bežia.*

Označme bod X na základni BC rovnoramenného trojuholníka ABC a body P a Q postupne na stranách AB a AC také, že $APXQ$ je rovnobežník. Bod Y je obraz bodu X v osovej súmernosti podľa priamky PQ. Dokážte, že bod Y leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC.

Chceme dokázať, že štyri body A, B, C, Y ležia na jednej kružnici. To sa dá robiť rôznymi spôsobmi, jeden z najčastejšie používaných spôsobov je pomocou obvodových uhlov.[3] Stačí nám teda dokázať rovnosť obvodových uhlov BAC a BYC. Ukazujeme rovnosť pretože A a Y sú určite v rovnakej polrovnie vymedzenej priamkou BC, inak by sme ukazovali, že ich súčet je 180°. O uhle BYC na prvý pohľad nevieme veľa povedať, preto si ho rozdelíme na uhly BYX a XYC a pokúsime sa zistiť veľkosti oboch týchto uhlov.

[3] O obvodovom a stredovom uhle sa môžete viac dozvedieť v tomto článku https://old.kms.sk/ mazo/matematika/pocitanieUhlov.pdf, hlavne v 2. príklade.

Ďalej môžeme uvažovať nasledovne. Keďže priamky PX a AQ sú rovnobežné, trojuholníky PBX a ABC sú podobné podľa vety *uu*, lebo majú spoločný uhol pri vrchole B a uhly BPX a BAC sú súhlasné. Trojuholník ABC je rovnoramenný, takže aj trojuholník PBX je rovnoramenný, čiže $|PB| = |PX|$.

V osovej súmernosti podľa priamky PQ sa úsečka PX zobrazila na úsečku PY, takže $|PX| = |PY|$. Zistili sme, že všetky tri body B, X, Y ležia rovnako ďaleko od bodu P, $|PB| = |PX| = |PY|$, takže ležia na jednej kružnici l so stredom P a polomerom $r = |PB|$.

Teraz už vieme určiť veľkosť uhla BYX. Uvažujme tetivu BX na kružnici l. Uhol BYX je obvodový a uhol BPX je stredový, takže platí $|\sphericalangle BYX| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BPX| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BAC|$.

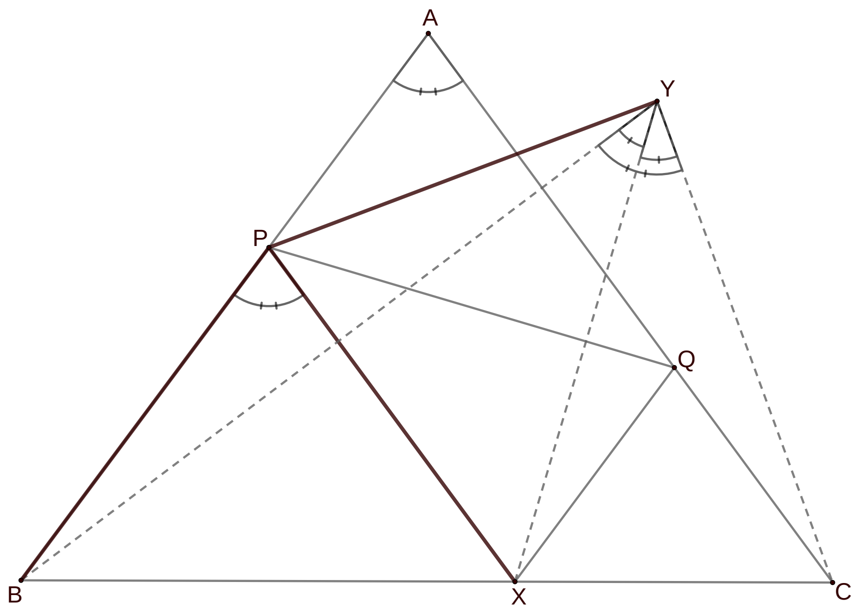
Zo symetrie situácie vzhľadom na výmenu bodov B a C vyplýva, že aj $|\sphericalangle XYC| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BAC|$. (Ak vám to nie je celkom jasné, môžete si to skúsiť dokázať úplne rovnako ako sme dokázali, že $|\sphericalangle BYX| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BAC|$, s tým že body B, P vymeníte za body C, Q a naopak.)

Ešte spravme posledné miniuhlenie:

$$|\sphericalangle BYC| = |\sphericalangle BYX| + |\sphericalangle XYC| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BAC| + \frac{1}{2}|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BAC|.$$

Vidíme, že uhly BAC a BYC majú naozaj rovnakú veľkosť, teda sú obvodové nad tetivou BC, čiže bod Y leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC.

Hlavné myšlienky tohto riešenia sú zobrazené na nasledujúcom obrázku. Zvýraznené úsečky majú rovnakú dĺžku a dvojprúžkový uhol je dvakrát väčší ako jednoprúžkový. Kružnice opísané trojuholníkom ABC a BXY som zámerne nenakreslil aby bol obrázok viac prehľadný. Lepšie je si ich len predstaviť.



1.8 Krutá Matematická Skúška

opravoval **Pedro**

Zadanie. *Pri vstupe do matematicko-fyzikálnej fakulty majú Dáni zaujímavý systém. Namiesto voľného prechodu alebo predkladania ISIC-ov dostanú študenti matematickú úlohu, ktorú musia vyriešiť. Kika sa pri úvodnom vstupe musela popasovať s touto nerovnosťou:*

Nech $a_1, a_2, \ldots, a_{25}$ sú nezáporné celé čísla a k je hodnota najmenšieho z nich. Dokážte, že

$$\lfloor\sqrt{a_1}\rfloor + \lfloor\sqrt{a_2}\rfloor + \cdots + \lfloor\sqrt{a_{25}}\rfloor \geq \left\lfloor\sqrt{a_1 + a_2 + \cdots + a_{25} + 200k}\right\rfloor.$$

Samozrejme, Kika úlohu hravo zvládla. A čo vy?

Poznámka. *Označenie $\lfloor x\rfloor$ znamená dolná celá časť x, teda najväčšie celé číslo neprevyšujúce x.*

Úvodné myšlienky

Zdala sa vám táto úloha škaredá? Ak áno, tak to podľa mňa len znamená, že ste ju nevyriešili. ;) Poďme si ukázať riešenie a spoločne sa nadchnúť viacerými peknými zákonitosťami, ktoré v sebe táto úloha skrýva.

Pri dokazovaní nerovností sa často oplatí zamyslieť sa nad tým, kedy je rozdiel medzi väčšou a menšou stranou nerovnosti najmenší – inak povedané, kedy sa nerovnosť dosahuje najtesnejšie. Ak sa nám podarí dokázať nerovnosť pre akési „najtesnejšie" prípady a preukážeme, že ostatné prípady sú „menej tesné", tak sme vyhrali.

Prečo sa nám také niečo oplatí? Sťažovať si situáciu? Nuž, keď sa nad tým zamyslíme, tak si situáciu v skutočnosti nesťažujeme. Tie tesné prípady by sme museli dokázať aj tak. Naopak, situácia sa nám zjednoduší, lebo budeme úlohu dokazovať pre menej možných hodnôt premenných, čím sa nám môže často podariť premenné vyjadriť v špeciálnom tvare.

Predstavme si napríklad, že pre $0 \leq b \leq a \leq 2$ chceme dokázať nerovnosť $2a - \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq 0$. Hoci v tomto prípade sa jedná o veľmi jednoduchú nerovnosť, nejako musíme využiť danú podmienku, že $b \leq a$, lebo bez nej nerovnosť neplatí. Všimnime si, že v našej nerovnosti platí, že čím je b väčšie, tým je hodnota ľavej strany menšia a teda nerovnosť tesnejšia. Ak sa nám teda nerovnosť podarí dokázať pre najväčšiu možnú hodnotu b, tak tým automaticky dokážeme nerovnosť pre všetky možné hodnoty b. Avšak b je zo zadania ohraničené zhora a. Preto ho v nerovnosti môžeme nahradiť za a a dostaneme: $2a - \frac{1}{2}(a^2 + a^2) = 2a - a^2 = a(2 - a) \geq 0$. Vidíme, že uvažovaním najtesnejšieho možného prípadu sme sa zbavili jednej premennej, čím sme si výrazne zjednodušili situáciu. Niečo podobné spravíme aj v našej úlohe.

Dôkaz

Posvieťme si najprv na ľavú stranu našej nerovnosti. Vystupujú tam dolné celé časti z odmocnín. To nám po chvíľkovej úvahe napovie, že hodnota takýchto výrazov závisí od toho, medzi ktorými dvoma štvorcami (druhými mocninami celých/prirodzených čísel) sa naše a_i nachádza. Napríklad, ak $a_1 = 42$, potom toto číslo sa nachádza medzi štvorcami 36 a 49, jeho odmocnina bude teda medzi číslami 6 a 7, a teda $\lfloor\sqrt{a_1}\rfloor = 6$. Skok v hodnote tohto výrazu nastane, ak hodnotu a_1 budeme zvyšovať až na hodnotu 49. Vtedy hodnota nášho výrazu skočí o 1.

Naopak, výraz $\left\lfloor\sqrt{a_1 + a_2 + \cdots + a_{25} + 200k}\right\rfloor$ sa zväčšovaním a_i minimálne nezmenšuje. Teda pokiaľ zvýšime všetky hodnoty a_i až na level $(c_i + 1)^2 - 1$ pre nejaké c_i také, že $c_i^2 \leq a_i < (c_i + 1)^2$, ostane hodnota výrazu na ľavej strane nezmenená, kým hodnota výrazu na pravej strane sa buď nezmení, alebo sa zväčší. Preto pre takéto hodnoty a_i je nerovnosť dosahovaná najtesnejšie. Stačí nám teda dokázať úlohu pre takéto hodnoty a_i.

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme (vďaka tomu, že premenné majú v našej úlohe rovnaké postavenie) predpokladať $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{25}$. Keďže hodnota $200k$ robí v úlohe veľkú šarapatu, budeme úlohu dokazovať pre každú možnú hodnotu a_1 zvlášť.

Ako budeme pri našom dôkaze postupovať? Využijeme pri ňom ďalšiu zaujímavú myšlienku, nazvime ju „princíp postupného nastavenia hodnôt". Uvažujme, že chceme overiť, či platí nerovnosť pre nejaké konkrétne hodnoty $a_1, a_2, \ldots, a_{25}$. Budeme vychádzať zo stavu $a_1 = a_2 = \cdots = a_{25} = a_1$ (t.j. „nastavíme" hodnoty všetkých premenných na hodnotu a_1) a postupne budeme od poslednej premennej (a_{25}) nastavovať hodnoty premenných na tie, ktoré chceme. Popri tom budeme sledovať, či sa nám pri tomto procese zachováva naša nerovnosť.

Potrebujeme teda na začiatok dokázať, že nerovnosť platí pre všetky hodnoty $a_1 = a_2 = \cdots = a_{25} = (c_1 + 1)^2 - 1$ pre nejaké c_1 nezáporné. Potom zrejme ľavá strana nerovnosti má hodnotu presne $25c_1$. Pravá strana nerovnosti bude mať hodnotu $\left\lfloor 15\sqrt{(c_1+1)^2-1}\right\rfloor$. Zrejme $\left\lfloor 15\sqrt{(c_1+1)^2-1}\right\rfloor < \left\lfloor 15(c_1+1)\right\rfloor = 15(c_1+1)$. Pre $c_1 \geq 2$ je teda nerovnosť triviálne splnená. Takisto ak sú všetky hodnoty a_i nulové, tak je nerovnosť splnená. Ostáva nám overiť už iba prípad, keď $a_i = 3$ pre všetky i. Po dosadení dostaneme: $25 \geq \left\lfloor\sqrt{675}\right\rfloor \doteq \left\lfloor 25{,}98\right\rfloor = 25$. Tu sme narazili na ďalšiu peknú časť našej úlohy a tou je neuveriteľná tesnosť nami dokazovanej nerovnosti práve v hodnotách $a_i = 3$. Totiž, už $676 = 26^2$.

Teraz teda predpokladajme, že overujeme platnosť nerovnosti pre hodnoty $a_1, a_2, \ldots, a_{25}$ (nie nutne rovnaké). Nastavíme na začiatok všetky hodnoty a_i na hodnotu a_1 a postupne od a_{25} zväčšujeme hodnoty na nami požadované. Keďže predpokladáme, že všetky a_i majú hodnoty o jedna zmenšených štvorcov, budeme tento proces robiť nasledovne – na začiatku je hodnota a_{25} inicializovaná na hodnotu $a_1 = (c_1 + 1)^2 - 1$. V každom kroku zvýšime hodnotu a_{25} tak, aby $a_{25} = (c_1 + 1 + k)^2 - 1$, kde k vyjadruje poradie kroku, ktorý robíme. Takýmto spôsobom postupne dosiahneme až hodnotu a_{25}.

Napríklad, ak $a_1 = 8$ a $a_{25} = 48$, budeme hodnotu a_{25} zvyšovať po hodnotách $8, 15, 24, 35, 48$. Počas tohto procesu budeme sledovať, čo sa nám bude diať s jednotlivými stranami nerovnosti. Po dokončení procesu s a_{25} prejdeme na a_{24}, potom a_{23} atď. až a_2. Hodnotu a_1 meniť nemusíme, lebo predpokladáme, že tá je už od začiatku nastavená správne.

Čo sa teda deje so stranami nerovnosti pri postupnom zväčšovaní a_{25}? Ľahko si premyslíme, že v jednom kroku sa hodnota ľavej strany zvýši práve o 1. Stačí teda ukázať, že hodnota pravej strany sa zvýši nanajvýš o 1. Ak sa nám to podarí ukázať pre všetky kroky nastavovania a_{25} a potom aj ostatných a_i, vyhrali sme, lebo sme neporušili našu nerovnosť a dosiahli sme hodnoty, pre ktoré sme našu nerovnosť overovali (a tieto hodnoty mohli byť ľubovoľné).

Pri dokazovaní toho, že hodnota pravej strany sa v jednom kroku nezvýši viac ako o 1 využijeme ďalšiu zaujímavú myšlienku. Tou je, že vzdialenosť po sebe idúcich štvorcov s ich rastúcou hodnotou narastá. Konkrétne, rozdiely po sebe idúcich štvorcov tvoria aritmetickú postupnosť 1, 3, 5, 7, … (skúste si dokázať).

Pri prechode a_{25} medzi dvomi hodnotami o jedna zmenšených po sebe idúcich štvorcov sme toto číslo zvýšili presne o rozdiel týchto štvorcov. Hodnota pod odmocninou na pravej strane nerovnosti nám pri tomto kroku vzrástla o rovnakú hodnotu. Aby sa $\left\lfloor\sqrt{a_1 + a_2 + \cdots + a_{25} + 200k}\right\rfloor$ zvýšila aspoň o dva, musela by hodnota výrazu pod odmocninou „prejsť“ aspoň cez dva štvorce. Lenže keďže zrejme $a_1 + a_2 + \cdots + a_{25} + 200k \geq a_{25}$, musí byť rozdiel medzi po sebe idúcimi štvorcami na týchto hodnotách aspoň taký veľký (alebo vo väčšine prípadov väčší) ako rozdiel medzi po sebe idúcimi štvorcami na hodnotách a_{25}. Preto aj hodnota a_{25} by pri jednom kroku musela prejsť cez dva štvorce, čo je spor s tým, že prešla iba cez jeden (tu sme ešte implicitne využili, že a_{25} je iba o jedna menšie ako štvorec. Inak povedané, stačí ju zväčšiť o viac ako rozdiel po sebe idúcich štvorcov, ktoré sú nad ňou a už automaticky prejde cez dva štvorce).

Ak sa vám toto zdôvodnenie zdalo príliš neformálne, alebo málo algebraické, skúste si ho dokázať algebraicky. Je to pomerne jednoduché. Pre účely nášho vzoráku som takýto dôkaz považoval za nepotrebný, nakoľko by nás to stálo iba ďalšie zbytočné označenia.

Takýmto spôsobom vieme argumentovať aj pre všetky ostatné a_i. Pri postupnom nastavovaní hodnôt na nami požadované a_i sme teda neporušili nerovnosť (naopak, v každom kroku sa rozdiel medzi ľavou a pravou stranou buď nezmenil, alebo o 1 zväčšil).

No a to je, prosím pekne, úspešný koniec nášho dôkazu.

1.9 Koláče Maťko Spapá

opravovali **Jožo** a **Marián**

Zadanie. *Keďže Betke je za Kikou smutno, upiekla jej ďalších* 20 *perníkov s váhami postupne* 10, 20, …, 200 *gramov, ale nevie, ktorý perník koľko váži. Keď prišla na poštu zistila, že môže Kike poslať len dva perníky. Chvalabohu, Vodka je po ruke a je skúsený vážič jedla. Betka môže dať Vodkovi ľubovoľné dva perníky a Vodka jej povie, ktorý je ťažší. Žiaľbohu, Vodka to nerobí zadarmo. Zakaždým, keď dáva Betka Vodkovi vážiť perníky, musí mu dať spolu s nimi tretí perník, ktorý Vodka zje. Výsledok váženia Vodka povie až po zjedení perníka.*

a) Vie Betka týmto spôsobom zaručene nájsť dva perníky, ktoré spolu vážia aspoň 280 *gramov?*

b) Vie Betka týmto spôsobom zaručene nájsť dva perníky, ktoré spolu vážia aspoň 300 *gramov?*

Úvodné pozorovania

Prvá vec, ktorú si môžeme všimnúť, je, že pri prvom vážení Betka nevie o perníkoch nič, takže si nevšimne, ak Vodka zje najväčší perník, vážiaci 200 gramov. Takže tento perník sa nám s istou nájsť nepodarí.

Ďalej si môžeme všimnúť, že vážení máme k dispozícii 17. Totiž po 17. vážení nám ostanú tri perníky. Ak dva z nich porovnáme, tak ich už musíme aj poslať Kike a dopadlo by to rovnako, ako keby sme ich poslali bez toho posledného váženia.

Podúloha a)

Pozrime sa najprv na časť a). Vie Betka zaručene nájsť dva perníky, ktoré spolu vážia aspoň 280 gramov? Vie Betka nájsť 190-gramový perník? Na začiatok porovnáme dva ľubovoľné perníky a tretí dáme Vodkovi zjesť. Potom v každom ďalšom vážení dáme Vodkovi zjesť perník, ktorý bol v predchádzajúcom vážení ľahší, a porovnáme aktuálne najťažší perník s jedným ešte neváženým. To opakujeme, kým nám neostanú dva perníky. Ten ťažší z nich je ťažší od 18-tich perníkov, preto musí vážiť aspoň 190 gramov.

Uvedený postup vieme vlastne zovšeobecniť. Keď máme nejakú skupinu perníkov a jeden perník bokom, tak vieme nájsť najťažší perník z tejto skupiny. V prvom vážení dávame Vodkovi perník, čo máme bokom a pokračujeme ako vyššie. Dokonca nám potom zostane z tejto skupiny jeden perník, ktorý z posledného váženia vyšiel ako ľahší. Zišiel by sa však nájsť aj druhý perník, ktorý bude dostatočne ťažký.

To môžeme spraviť tak, že našich 19 perníkov rozdelíme do dvoch skupín. Do jednej dáme 9, do druhej 10 perníkov a jeden zvyšný perník odložíme na prvé váženie. Vyššie uvedeným postupom nájdeme najťažší perník z prvej skupiny a najťažší perník z druhej skupiny. Vieme o nich, že víťaz prvej skupiny má aspoň 90 gramov a víťaz druhej aspoň 100. Z nich je ale jeden ťažší a ten je dokonca z našich 19 perníkov najťažší, teda má aspoň 190 gramov. Spolu teda majú aspoň 280 gramov. Takto sme ukázali, že odpoveď na otázku a) je kladná.

Podúloha b)

Teraz sa ale pozrieme na tú ťažšiu časť. Vie Betka týmto spôsobom zaručene nájsť dva perníky, ktoré spolu vážia aspoň 300 gramov? Aj keď sa to možno na prvý pohľad nezdá, aj to dokáže. V predchádzajúcej časti sme vždy kŕmili Vodku perníkmi, ktoré prehrali posledné váženie. Tento výsledok ale môžeme zlepšiť, ak nebudeme lakomí a pre Vodku odložíme ďalší perník. Tým nám ostane len 18 perníkov vážiacich 10, 20, …, 180 gramov, ale dostaneme tým k dobru o jedno váženie viac.

Samozrejme, stále potrebujeme nejako nájsť perníky, ktoré budú ťažšie od dostatočného množstva perníkov. Najťažšie perníky z nejakej skupiny sa nám osvedčili v podúlohe a). Skúsime teda tento nápad potiahnuť ďalej tým, že skúsime namiesto dvoch skupín mať tri.

Rozdelíme si teda 18 perníkov do troch skupín, v každej po 6 perníkov. Zvyšné dva si necháme bokom. V týchto troch skupinách vyberieme predtým popísaným spôsobom najťažší perník, pričom v prvej skupine dáva Vodkovi zjesť perník, čo má bokom a v ďalších dvoch ľahší perník z posledného váženia v predošlej skupine. Potom nám ostanú tri víťazné perníky, jeden porazený z posledného váženia a jeden odložený na boku. Medzi víťaznými perníkmi váži najľahší perník aspoň 60 gramov, druhý najľahší aspoň 120 gramov a najťažší aspoň 180 gramov. Ak Betka vyberie dva najťažšie perníky, zaručene pošle Kike aspoň 300 gramov. To vie však spraviť tak, že nájde najľahší z nich. Ten dokáže nájsť pomocou dvoch vážení jednoducho tak, že ľubovoľné dva z nich odváži, a ten ľahší odváži s tým tretím. Vodkovi dáva pritom dva zvyšné perníky, ktoré ešte má k dispozícii.

Komentár

Mnoho z vás si myslelo, že Betka nedokáže nájsť dva perníky vážiace spolu 300 gramov a snažili ste sa zdôvodňovať, prečo to nie je možné. Keďže opak je pravdou, tak všetky takéto dôkazy sú nesprávne. Objavili sa v nich časté chyby, ktoré sa vyskytujú pri úlohách podobného typu, kde zdôvodňujeme, že niečo nemôže byť väčšie. Častým problémom bolo, že sa tento dôkaz moc opieral o konštrukciu nájdenú v časti a) a neuvažoval iné spôsoby váženia. Napr. situáciu, keď dva perníky dáme Vodkovi bez toho, aby sme ich niekedy porovnali; alebo keď dávame vážiť perník, ktorý z niektorého váženia vyšiel ako ľahký. Pokiaľ ste vo svojom riešení mali „dôkaz“, že b) nejde, skúste sa nad ním zamyslieť a nájsť v ňom chybu. Veríme, že vám to pomôže podobným chybám predísť.

1.10 Koniec Mikroténovým Sáčkom! — opravoval **Slavo**

Zadanie. *Dáni sú veľkí ochrancovia prírody, a preto používajú výlučne rozložiteľné materiály.*

Dokážte, že neexistuje kladné celé číslo n, pre ktoré je číslo

$$10^{10^{10^n}} + 10^{10^n} + 10^n - 1$$

prvočíslom.

Poznámka. Zápis a^{b^c} *sa chápe uzátvorkovaný ako* $a^{(b^c)}$. *Napr.* $2^{2^3} = 2^8 = 256$. *Pozor,* $2^{2^3} \neq (2^2)^3 = 4^3 = 64$.

Označme si $V = 10^{10^{10^n}} + 10^{10^n} + 10^n - 1$. Ak chceme ukázať, že V nie je prvočíslo, tak ako jednoduché spôsoby sa nám priamo núkajú rozloženie na súčin a nájdenie deliteľa.

Nájsť deliteľa znamená pre dané n nájsť d také, aby $10^{10^{10^n}} + 10^{10^n} + 10^n - 1 \equiv 0 \pmod{d}$.[4] Skúsme ho nájsť tak, aby čísla $10^{10^{10^n}}, 10^{10^n}, 10^n$ mali pekné zvyšky po delení d. Ako vhodní kandidáti sa naskytujú $d_1 = 10^k, d_2 = 10^k + 1, d_3 = 10^k - 1$. Zrejme pri deliteľovi d_1 bude mať $V \pmod{d_1}$ jednotku na mieste jednotiek, teda nevyhovuje.

Pozrime sa na $d = d_2$. Po troche skúšania môžeme prísť na to, že vieme docieliť, aby zvyšky členov V boli ± 1. Takto možno zistiť, že pre $n = 2^a b$ (kde b je nepárne) je $d = 10^{2^a} + 1$ je deliteľ V. Inak napísané $-1 \equiv 10^{2^a} \pmod{d}$.

Pozrime sa na zvyšky členov V po delení d.

- $-1 \equiv -1 \pmod{d}$.
- $10^n = 10^{2^a b} = (10^{2^a})^b \equiv (-1)^b \equiv -1 \pmod{d}$.
- $10^{10^n} = 10^{2^a 5^a (10^{n-a})} = (10^{2^a})^{5^a 10^{n-a}} \equiv (-1)^{5^n 10^{n-a}} = 1 \pmod{d}$, keďže $5^n 10^{n-a}$ je párne (rozmyslite si).
- $10^{10^{10^n}} = 10^{2^a 5^a (10^{10^n - a})} = (10^{2^a})^{5^a 10^{10^n - a}} \equiv (-1)^{5^a 10^{10^n - a}} = 1$, keďže $5^a 10^{10^n - a}$ je párne (rozmyslite si).

[4] Pokiaľ ste sa s takýmto zápisom ešte nestretli, pozrite si kapitolu 4.6 Kongruencie v Zbieke KMS.

Teda $10^{10^{10^n}}+10^{10^n}+10^n-1 \equiv 1+1-1-1 = 0 \pmod{d}$, našli sme teda deliteľa d_2 výrazu V. Keďže $1 < 10^{2^a}+1 < V$, V nie je prvočíslo. Týmto je dôkaz hotový.