Riešenia 2. kola zimnej časti

2.1 Kam Miláčikov Skryl? ($\kappa \leq 1$)

opravovala **Ivka**

Zadanie. *Jožo sa balil do Belgicka a ako obvykle, si chcel zbaliť jeho obľúbené prirodzené čísla. Tie však, ako obvykle, zapatrošil. Pomôžte Jožovi nájsť jeho obľúbené prirodzené čísla a, b a c také, že sú všetky rôzne a žiadne z nich nie je druhou mocninou celého čísla, avšak čísla ab, bc a ac sú všetko druhé mocniny celých čísel a súčet a + b + c je najmenší možný. Ktoré čísla Jožo hľadá?*

Hľadáme 3 čísla, ktoré samy o sebe nie sú druhou mocninou, no súčin ľubovolných dvoch z nich už druhou mocninou bude. Pre každú druhú mocninu platí, že má v prvočíselnom rozklade každé prvočíslo párny počet krát (vďaka tomu vychádza odmocnina celé číslo). Na to, aby žiadne z daných čísel nebolo druhou mocninou celého čísla, je potrebné, aby sa v ich prvočíselnom rozklade nachádzalo aspoň jedno prvočíslo nepárny počet krát (potom druhá odmocnina už nebude celé číslo, keďže z tohto konkrétneho prvočísla nemôžeme zobrať polovicu jeho počtu). No pri ich súčine potrebujeme zaistiť párnosť všetkých početností, a preto musíme dodržať aj to, že ak sa už niektoré prvočíslo v niektorom prvočíselnom rozklade nachádza nepárny počet krát, bude sa musieť nepárny počet krát (teda aspoň raz) nachádzať aj v zvyšných prvočíselných rozkladoch (keďže sa nám mocniny sčitujú a chceme mať v súčine vždy párny počet).

Nejaká taká trojica čísel a, b, c môže vyzerať napríklad takto:

$$a = \underbrace{2 \cdot 5 \cdot 7}_{n} \cdot \underbrace{3^2 \cdot 5^2}_{k}, \qquad b = \underbrace{2 \cdot 5 \cdot 7}_{n} \cdot \underbrace{5^4 \cdot 11^2 \cdot 13^6}_{l}, \qquad c = \underbrace{2 \cdot 5 \cdot 7}_{n} \cdot \underbrace{1}_{m}.$$

Pri tejto trojici čísel sa prvočísla 2, 5 a 7 vyskytujú nepárny počet krát v prvočíselnom rozklade každého z čísel. Súčin týchto prvočísel, ktoré sa vyskytujú v každom čísle nepárny počet krát, si označíme n. Keďže sa tieto prvočísla vyskytujú v rozkladoch každého z čísel a, b, c, vieme si ich zapísať ako $a = n \cdot k$, $b = n \cdot l$ a $c = n \cdot m$. Tie prvočísla, ktoré boli v rozklade čísla a v párnej mocnine, prešli v rovnakom počte aj do prvočísleného rozkladu čísla k. Z prvočísel, čo boli v rozklade čísla a v nepárnej mocnine, sme jedno ubrali a zvyšok, teda párny počet, išiel do rozkladu čísla k. Teda číslo k má vo svojom prvočíselnom rozklade všetky prvočísla v párnej mocnine. Preto je druhou mocninou celého čísla. Z rovnakého dôvodu sú aj čísla l, m druhými mocninami celých čísel.

Avšak ďalšou podmienkou v zadaní je, aby súčet $a + b + c$ bol čo najmenší. Poďme sa pozrieť, ako vieme naše čísla $a = n \cdot k$, $b = n \cdot l$ a $c = n \cdot m$ pozmenšovať. Ako sme spomenuli, čísla a, b, c musia mať aspoň jedno prvočíslo vo svojich rozkladoch v nepárnej mocnine. Keďže najmenším prvočíslom je 2, tak číslo n musí byť aspoň 2. Ďalej vieme, že čísla a, b, c musia byť rôzne. Aby sa tak stalo, tak aj čísla k, l, m musia byť rôzne. Najmenšími druhými mocninami kladných celých čísel sú 1, 4 a 9. Keď si zvolíme $k = 1$, $l = 4$, $m = 9$ a $n = 2$, dostaneme trojicu čísel

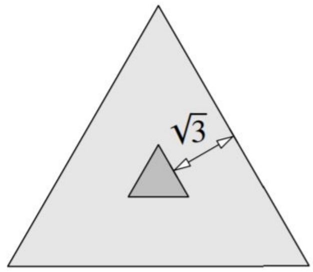
$$a = \underbrace{2}_{n} \cdot \underbrace{1}_{k} = 2, \qquad b = \underbrace{2}_{n} \cdot \underbrace{2^2}_{l} = 8, \qquad c = \underbrace{2}_{n} \cdot \underbrace{3^3}_{m} = 18,$$

ktoré nie sú druhými mocnimai celých čísel, ale ich súčiny ab, ac a ca sú druhými mocnimai celých čísel. Keďže sme zvolili najmenšie možné čísla a, b, c, tak aj ich súčet je najmenší možný. Sú to teda čísla, ktoré Jožo hľadá.

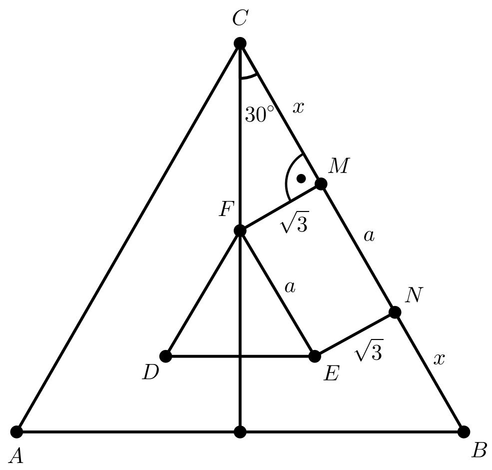
2.2 Krásny Medzinárodný Symbol ($\kappa \leq 2$)

opravovali **Kika V.** a **Marcel**

Zadanie. *Jožo na letisku narazil na zaujímavý amulet ako na obrázku. Pozostával z dvoch rovnostranných trojuholníkov. Predavačka mu prezradila, že vzdialenosť každého bodu obvodu malého trojuholníčka k najbližšiemu bodu obvodu veľkého trojuholníka je $\sqrt{3}$. Určte rozdiel medzi dĺžkami strán malého a veľkého trojuholníka.*



Pri riešení geometrických úloh je dobré nakresliť si obrázok a uvedomiť si všetky informácie, ktoré máme k dispozícii. Zo zadania vieme, že vzdialenosť každého bodu obvodu malého trojuholníka je vzdialená od veľkého trojuholníka $\sqrt{3}$. V praxi to znamená, že ak spravíme kolmicu, z ktoréhokoľvek bodu malého trojuholníka na najbližšiu stratnu veľkého trojuholníka, tak jej dĺžka bude $\sqrt{3}$. Ďalšia dôležitá vec, ktorú vieme zo zadania, je, že oba trojuholníky sú rovnostranné. Takže ich vnútorné uhly majú veľkosti 60°, a teda tieto dva trojuholníky sú podobné podľa vety *uuu*. Keďže, vzdialenosť malého trojuholníka od veľkého je na všetky smery rovnaká, nachádza sa presne uprostred veľkého trojuholníka, a teda majú tieto trojuholníky aj spoločné ťažisko (bod, v ktorom sa pretínajú ťažnice, pri rovnostrannom trojuholníku aj výšky). Označme si veľký trojuholník písmenami ABC a malý DEF. Dĺžku strany malého trojuholníka označíme písmenom a. Urobíme kolmý priemet strany EF malého trojuholníka na stranu BC veľkého trojuholníka, túto úsečku si označíme písmenami M a N a jej dĺžka je rovná a. Zvyšné dve časti strany BC veľkého trojuholníka, ktoré nám vznikli, teda úsečky CM a NB, majú rovnakú veľkosť, ktorú si označíme x.



Teraz si treba uvedomiť, čo chceme vypočítať. Chceme rozdiel dĺžky strany veľkého trojuholníka od dĺžky strany malého trojuholníka. Vidíme, že obe strany obsahujú dĺžku strany a, takže po odčítaní sa tieto dĺžky vyrušia a ostane nám len dvakrát dĺžka x. A to teraz potrebujeme vypočítať. Ak spravíme výšku na stranu AB z bodu C nášho veľkého trojuholníka, rozdelí sa nám uhol pri vrchole C na polovicu, a teda na dva 30° uhly. Platí to vďaka tomu, že trojuholník je rovnostranný. Táto výška prechádza rovnako aj cez vrchol F (vďaka spoločnému ťažisku trojuholníkov). Vznikol nám pravouhlý trojuholník FMC, s pravým uhlom pri vrchole M (keďže z vrcholu F sme viedli kolmicu) a s 30° uhlom pri vrchole C. Rovnako tento postup vieme aplikovať aj na ostatné vrcholy trojuholníka vďaka symetrii. Ukážeme si teraz dva možné postupy výpočtu, prvý čo využíva goniometrické funkcie a druhý s použitím Pytagorovej vety.

Riešenie cez goniometrické funkcie

Keďže máme pravouhlý trojuholník, vieme použiť goniometrické funkcie na výpočet dĺžky x. Máme zadanú dĺžku jednej odvesny trojuholníka FMC a potrebujeme zistiť dĺžku druhej odvesny. Takže môžeme využiť goniometrickú funkciu tangens alebo kotangens. Tangens uhla je definovaný ako pomer protiľahlej a priľahlej odvesny. Vezmeme si uhol FCM. Protiľahlá odvesna k nemu má dĺžku $\sqrt{3}$ a priľahlá odvesna je naša neznáma x. Dostaneme rovnicu:

$$\tan(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{x}.$$

Po úprave:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{\tan(30^\circ)},$$
$$x = 3.$$

Riešenie cez Pytagorovu vetu

Ak preklopíme trojuholník FMC v osovej súmernosti podľa úsečky MC na opačnú stranu, dostaneme trojuholník, ktorého základňa bude mať dvojnásobok dĺžky strany FM, teda dĺžku $2 \cdot \sqrt{3}$. Uhol CFM, ktorý ma 60°, sa prenesie rovnako na druhú stranu. V tomto našom vzniknutom trojuholníku majú teda všetky uhly 60°, takže trojuholník je rovnostranný. Z toho vyplýva, že aj strana FC má dĺžku $2 \cdot \sqrt{3}$ rovnako ako základňa. Keďže teraz poznáme dĺžky dvoch strán v pravouhlom trojuholníku FMC, pomocou Pytagorovej vety si ľahko dopočítame aj tretiu stranu. Prepona FC má dĺžku $2 \cdot \sqrt{3}$ a odvesna FM dĺžku $\sqrt{3}$. Dostaneme rovnicu:

$$|MC|^2 = |FC|^2 - |FM|^2,$$
$$|MC|^2 = (2 \cdot \sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2,$$
$$|MC|^2 = 4 \cdot 3 - 3,$$
$$|MC|^2 = 9,$$
$$|MC| = 3.$$

Takže dĺžka časti x je teda 3 jednotky dĺžky a keďže máme také dve časti na strane tak náš rozdiel bude $2 \cdot x$, čo je 6. Rozdiel dĺžky strany väčšieho trojuholníka od dĺžky strany menšieho trojuholníka je 6 jednotiek dĺžky.

2.3 Konvexne Mysliaci Skalpel ($\kappa \leq 3$)

opravovali **Adam** a **Kubo P.**

Zadanie. *Na letenke mal Jožo zaujímavý útvar, trojuholník. Pri svojom čakaní na lietadlo sa zamyslel, či ho možno rozrezať na štyri konvexné[1] útvary: trojuholník, štvoruholník, päťuholník a šesťuholník. Zodpovedajte mu túto otázku.*

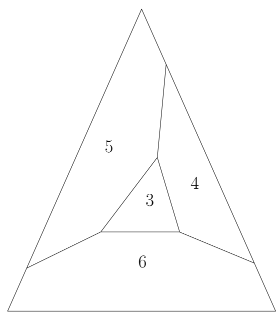
Trojuholníkový lístok delíme na štyri časti ktoré budú medzi sebou zdieľať niektoré strany. Prvá vec, ktorú si potrebujeme uvedomiť, je, že dva konvexné útvary nemôžu mať spoločnú viac ako jednu stranu. Uvedomiť si, prečo je to tak, by nemal byť problém (ak neviete, zamyslite sa nad tým).

Táto informácia je celkom zaujímavá hneď pri šesťuholníku. Ten má šesť strán a niektoré z nich budú vnútri lístka, teda spoločné s inými mnohouholníkmi. V lístku budeme mať ešte tri ďalšie mnohouholníky, a s každým môže mať náš šesťuholník spoločnú najviac jednu stranu. Ostávajú nám tak tri strany ktoré nemôžu byť spoločné so žiadnym iným mnohouholníkom, musia teda ležať na vonkajšom okraji lístka. Trojuholníkový lístok má tri vonkajšie hrany a na každej môže ležať najviac jedna strana konvexného mnohouholníka. Toto nám nedáva veľmi na výber, v šesťuholníku máme šesť strán, najviac tri z nich môžu ležať na okraji lístka a najviac tri vo vnútri. Jeden zo spôsobov, ako to dosiahnuť, je umiestnenie dvoch jeho vrcholov do vnútra lístka, dvoch do vrcholov lístka, a dvoch na hrany lístka. Sú aj iné spôsoby umiestnenia, dostaneme pri nich však viac ako jeden kus zvyšku lístka o čom po ďalšom skúmaní zistíme, že neumožňuje splniť zadanie.

Poďme ďalej, na rade je päťuholník. Znovu môžu najviac tri jeho strany ležať vo vnútri lístka (kvôli zdieľaniu strán), a zároveň najviac dve ležať na okraji lístka (lebo lístok má tri hrany, ale jednu celú už zabral šesťuholník). Zase teda nemáme na výber a jeden vrchol päťuholníka musí ležať v poslednom vrchole lístka, dva musia ležať na hranách lístka (jeden z nich spoločný s šesťuholníkom) a dva vo vnútri lístka (jeden znovu spoločný s šesťuholníkom).

Kto by to čakal, dostávame sa k štvoruholníku, kde sa deje presne to isté. Najviac jedna strana leží na hrane lístka (už nám ostala len jedna voľná, aj to nie celá) a zvyšné tri musia ležať vo vnútri, dve z nich zdieľané s už existujúcimi mnohouholníkmi. Ostáva nám umiestniť už len trojuholník, a presne to je aj útvar ktorý nám na lístku zostal, máme teda hotovo.

Nižšie môžete vidieť obrázok jedného možného riešenia, dostať sa k nemu sa dalo práve postupom z tohto vzoráku.



2.4 Kustomeri Míňajú Syr ($\kappa \leq 4$)

opravovali **Aňa** a **Dávid**

Zadanie. *Jožo prišiel ráno do obchodu so syrom a zaradil sa do radu ako osemnásty zákazník. V obchode bolo pred otvorením 20 kilogramov syra. Predavačka po každom vybavenom zákazníkovi prehlásila, že ak si každý nasledujúci zákazník kúpi presne toľko, koľko bol priemerný nákup všetkých predošlých zákazníkov, zostane ešte presne pre ďalších 17 zákazníkov. Môže sa stať, že po každom zo 17 prvých zákazníkov bude toto tvrdenie pravdivé? Ak áno, koľko syra zostane, keď sa Jožo dostane na rad?*

[1] konvexný útvar je taký, ktorý má všetky vnútorné uhly menšie ako 180°

Aby sa nám lepšie pracovalo so zadaním, chceli by sme si prepísať to, čo predavačka prehlásila, ako rovnicu. K tomu nám pomôže, keď sa najskôr pozrieme na situáciu v obchode po prvom zákazníkovi. Označme si množstvo syra, ktoré kúpil ako x_1. Po jeho nákupe teda ostane pre ďalších zákazníkov $20 - x_1$ kilogramov syra. Toto množstvo sa musí rovnať $17x_1$, keďže pri jednom zákazníkovi je množstvo, ktoré kúpil aj do teraz priemerné množstvo. Dostali sme nasledujúcu rovnicu:

$$20 - x_1 = 17x_1.$$

Nasleduje druhý zákazník, ten si kúpi množstvo syra x_2. Priemerný nákup sa zmení na $\frac{x_1 + x_2}{2}$ a my dostávame rovnicu:

$$20 - (x_1 + x_2) = 17\frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Takto nasledujú ďalší zákazníci, pre ktorých sa bude naša rovnica meniť. Označme si súčet prvých n nákupov S_n. Keď rovnicu napíšeme po prvých n zákazníkoch, dostávame:

$$20 - S_n = 17\frac{S_n}{n}.$$

Táto rovnica hovorí presne to, čo predavačka prehlásila po n-tom zákazníkovi. Ľavá strana vyjadruje, koľko syru ostalo po vybavení n zákazníkov, pravá strana hovorí, že je to presne toľko, čo treba pre 17 ďalších, ak si každý z nich kúpi presne doterajší priemer.

Ostáva nám ešte ukázať, že naozaj existuje takáto postupnosť nákupov. To spravíme tak, že vyjadríme hodnotu n-tého nákupu a ukážeme, že je to kladné číslo. Množstvo syra, ktoré si kúpil n-tý zákazník, budeme označovať ako x_n.

Najprv vyjadríme z rovnice S_n:

$$S_n = \frac{20n}{17 + n}.$$

Prepíšeme rovnicu pre $n + 1$:

$$S_{n+1} = \frac{20(n + 1)}{17 + n + 1}.$$

Zároveň vieme, že $S_{n+1} = S_n + x_{n+1}$, preto x_{n+1} vyjadríme ako $S_{n+1} - S_n$ a po niekoľkých úpravách dostaneme:

$$x_{n+1} = \frac{340}{n^2 + 35n + 306}.$$

Teraz vidíme, že pre každé nezáporné n vieme z rovnice vyjadriť x_n a jeho hodnota bude kladná. Preto takáto postupnosť nákupov existuje (dokonca predavačka môže obslúžiť aj ľubovoľné množstvo zákazníkov).

Keď dosadíme $n = 17$ dostaneme, že $S_{17} = 10$. To znamená, že kým sa Jožo dostane na rad, sa minie 10 kg syra, a teda aj ostalo 10 kg syra.

2.5 Korešpondenčný Matematický Seminár ($\kappa \leq 7$)

opravovali **Kika P.** a **Marián**

Zadanie. *Po Jožovi ostalo v KMS veľa roboty, medzi iným rozdeliť vedúcim opravovanie riešení. Máme n úloh, z každej k riešení na opravovanie a k vedúcich KMS. Jožo pred odchodom, nestíhajúc, dal každému vedúcemu n náhodných riešení. Vedúci by chceli, aby to bolo rozdelené spravodlivo, t. j. nech každý z nich opravuje práve jedno riešenie z každej úlohy. Preto sa rozhodli, že si budú meniť riešenia. Dvaja vedúci sú ochotní vymeniť riešenie za riešenie, ak každý z nich dostane riešenie úlohy, z ktorej riešenie ešte nemá. Dokážte, že bez ohľadu na to, ako boli na začiatku rozdané riešenia, si takýmito výmenami môžu prerozdeliť riešenia spravodlivo.*

Nazvime stavom nejaké konkrétne rozdelenie riešení medzi vedúcich také, že každý vedúci má n riešení. Uvedomme si, že počet rôznych stavov, ktoré môžu nastať, je konečný, pretože vedúcich, riešení a úloh je konečný počet.

Náš cieľový stav je taký, že každý vedúci má 1 riešenie z každej úlohy. Označme si číslom Z_i, počet zlých riešení ktoré má i-ty vedúci, teda rozdiel počtu riešení (n) a počtu rôznych úloh, ktoré má i-ty vedúci. Číslom Z označíme počet zlých riešení, ktoré majú vedúci dokopy ($\sum_{i=0}^{n} Z_i$). Cieľový stav si vieme zadefinovať tak, že $Z = 0$ (rozmyslite si). Chceme dokázať, že v každom necieľovom stave existuje výmena, ktorá zmenší Z, čím ukážeme, že vždy vieme dosiahnuť cieľový stav.

Zoberme si vedúceho, ktorého Z_i je najväčšie, teda toho, ktorý má najviac zlých riešení a nazvime ho *smoliar*. Smoliar má najviac zlých riešení, čo znamená, že má najmenší počet rôznych úloh. Z nejakej úlohy má smoliar aspoň 2 riešenia, povedzme si, že je to úloha 1 (nezáleží na tom, ktorá je to presne). Keďže má aspoň 2 riešenia úlohy 1, tak existuje vedúci (volajme ho *antismoliar*), ktorému chýba riešenie úlohy 1. Vieme, že $Z_{smoliar} \geq Z_{antismoliar}$. Z toho vyplýva, že antismoliar má riešenie nejakej úlohy (nech je to úloha 2), ktoré smoliarovi chýba (keďže má aspoň toľko rôznych úloh, koľko smoliar a úlohu 1 nemá). Výmenou medzi smoliarom a antismoliarom úloh 1 a 2 sa $Z_{smoliar}$ zmenší o 1 a $Z_{antismoliar}$ sa buď zmenší o 1 (ak úlohu 2 mal viac krát) alebo zachová (ak úlohu 2 mal len raz). Teda sa Z zmenší o 1 alebo 2. Keďže v každom necieľovom stave existuje vedúci, ktorý má Z_i najväčšie, tak vždy vieme spraviť výmenu tak, aby sa Z zmenšilo, a teda postupne výmenami dosiahnuť cieľový stav.

2.6 Konečne Môžem Spať

opravovali **Beata** a **Slavo**

Zadanie. *Keď Jožo v noci nevie zaspať, počíta svoje obľúbené prvočísla. Prvočíslo p sa nazýva* Jožovo obľúbené, *ak preň existuje prirodzené číslo k, pre ktoré platí, že p delí* $k^3 + 6$. *Ukážte, že nech by sa Jožo snažil ako chcel, všetky svoje obľúbené prvočísla by sa mu spočítať nepodarilo. Inak povedané, dokážte, že Jožovych obľúbených prvočísel je nekonečne veľa.*

Zamyslime sa, akým smerom môže dôkaz úlohy postupovať. Môžeme sa pokúsiť nájsť spôsob, ako systematicky nachádzať obľúbené prvočísla a ukázať, že budeme dostávať nové a nové prvočísla. Ďalšia z možností, čo prichádza do úvahy je postupovať sporom – predpokladať, že obľúbených prvočísel je konečne veľa (teda si ich môžeme vypísať do zoznamu) a ukázať, že existuje neoznačené obľúbené prvočíslo.

Poďme dokázať úlohu sporom. Nech sú všetky obľúbené prvočísla $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Aby sme dostali spor, chceme nájsť k také, že výraz $k^3 + 6$ má (prvočíselného) deliteľa rôzneho od $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Ako vieme zabezpečiť, aby p_i nedelilo $k^3 + 6$? Zvolíme k také, aby bolo deliteľné p_i. Ak p_i delí k^3 a nedelí 6, tak p_i nedelí $k^3 + 6$ (rozmyslite si).

Teda, ak zvolíme $k = p_1 p_2 \ldots p_n$ (vynechajme odtiaľ $p_i = 2, 3$), tak $k^3 + 6$ nebude deliteľné žiadnym prvočíslom p_i rôznym od 2 a 3. Ostáva nám doriešiť deliteľnosť dvomi a tromi. Môžeme si všimnúť, že keďže 2, 3 delia 6 a nedelia k, tak nedelia ani $k^3 + 6$. Tým pádom $k^3 + 6$ je deliteľné inými prvočíslami ako $p_1, p_2, \ldots, p_n$, čo je spor. Ukázali sme, že Jožových obľúbených prvočísel je nekonečne veľa.

2.7 Kubisti Modelovali Siluety

opravoval **M&M**

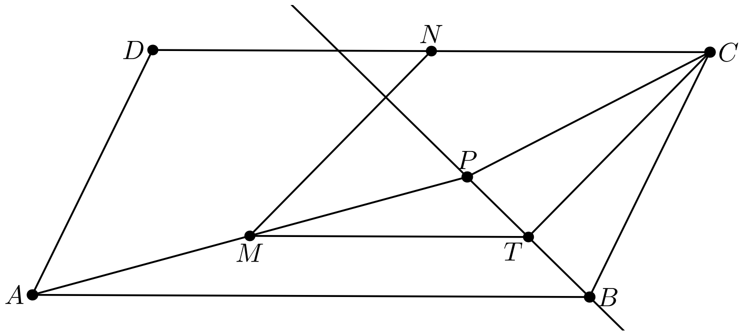
Zadanie. *Keď sa Kika s úžasom pochválila Jožovi o svojom zistení o rovnoramenných a rovno bežiacich Dánoch, rozhodol sa Jožo, že preskúma aj Belgičanov. Zistil, že Belgičania tiež rovno bežia, tiež majú ramená rovnako dlhé, ale čo viac, ich ramená sú dokonca kolmé na ich krk!*

Vnútri rovnobežníka ABCD leží bod P tak, že $|PC| = |BC|$. *Stredy úsečiek AP a CD označme postupne M, N. Ukážte, že priamky BP a MN sú na seba kolmé.*

Ukážeme si dva možné spôsoby riešenia tejto úlohy. Máme dokázať, že nejaký uhol je pravý, to spravíme napríklad tak, že sa ho pokúsime vyjadriť pomocou niektorých základných uhlov v rovnobežníku a uhlu PCB. To sa však robí ťažšie, nakoľko si môžme všimnúť, že máme pracovať s polovičnými dĺžkami. Preto sa pokúsime nájsť fintu ako obídeme takéto zdĺhavé a nepríjemné vyjadrovanie uhlov. Známymi spôsobmi ako dostať polovičné dĺžky sú stredné priečky, rovnoľahlosť a určite mnohé ďalšie.

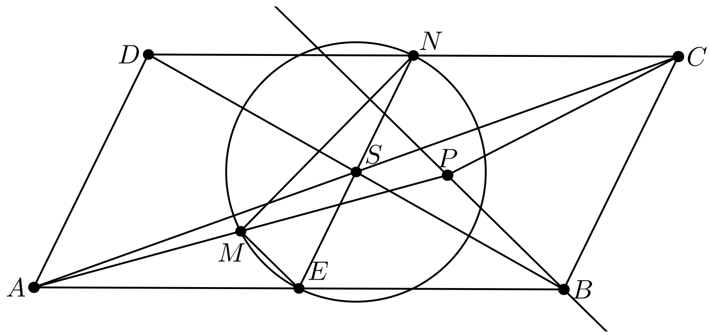
Riešenie cez strednú priečku.

Tu sa dá vybrať viacero stredných priečok s ktorými vieme pracovať. Ak by sme napríklad vybrali strednú priečku ME tak sa dostaneme na riešenie cez rovnoľahlosť, ktoré je spomenuté nižšie. Mnohý z vás pracovali so strednou priečkou MT, kde T je stred úsečky PB, preto ju použijeme aj vo vzorovom riešení. Keďže trojuholník BCP je rovnoramenný tak TC je určite výška. Pripomeňme si, že platia tieto vzťahy: $2 \cdot |MT| = |AB| = |CD| = 2 \cdot |CN|$ a súčasne $MT \parallel CN$ preto je $MTCN$ rovnobežník. Keďže $TC \perp PB$ tak z rovnobežnosti TC a MN platí aj $PB \perp MN$. Čo sme chceli dokázať.



Riešenie cez rovnoľahlosť.

Keďže bod M je stredom úsečky AP, dostávame prvú indíciu, kde rovnoľahlosť hľadať. *Pozn. síce bod N je stredom DC, ale rovnoľahlosť z bodu D alebo C by nám nepomohla uchopiť body M a P, kdežto rovnoľahlosť v bode A alebo P sa nemusí zapodievať bodom N lebo je stredom úsečky CD a s tým sa nám dobre počíta.* Skúsenejšie oko si všimne, že rovnoľahlosť z bodu A a koeficientom $\frac{1}{2}$ je výhodnejšia ako rovnoľahlosť z bodu P. Totiž bod P zobrazí do bodu M, bod C zobrazí do bodu S, čo je priesečník uhlopriečok, bod B zobrazí do bodu E, stredu úsečky AB, a zvyšné body nás nemusia trápiť, rozmyslite si prečo.



Keďže $|PC| = |BC|$, tak po zobrazení bude platiť $\frac{1}{2} \cdot |PC| = |MS| = |ES|$. Navyše, keďže S je priesečník uhlopriečok, tak $|ES| = |SN|$, a teda kružnica so stredom v bode S prechádza bodmi N, M a E. Dokonca vieme, že EN je priemerom tejto kružnice pretože S leží v strede úsečky EN. Preto obvodový uhol EMN má 90°. Keďže rovnoľahlosť je podobné zobrazenie tak úsečky PB a ME sú rovnobežné, a preto uhol medzi priamkami PB a MN je 90°.

2.8 Karty Musíme Spermutovať

opravovali **Juro** a **Tomáš S.**

Zadanie. *Počas dlhých zimných večerov hrajú Jožo s Kikou cez videohovor zaujímavú hru. Kika zamieša balík 52 kariet a uloží karty do kruhu lícom nahor, pričom jedno miesto v kruhu nechá prázdne. Jožo, ktorý na karty nevidí (keďže Kika si omylom zabudla odlepiť pásku z kamery), jednu menuje. Ak táto karta susedí s prázdnym miestom, Kika posunie kartu na prázdne miesto, bez toho, aby to povedala Jožovi. Ináč sa nič nestane. Potom Jožo menuje ďalšiu kartu atď. toľkokrát, koľko chce, kým nepovie „KMS“.*

a) Môže Jožo zaručiť, že po vyrieknutí „KMS“ nie je žiadna karta na svojom pôvodnom mieste?

b) Môže Jožo zaručiť, že po vyrieknutí „KMS“ nesusedí piková dáma s prázdnym miestom?

Časť a)

Časť a) je jednoduchá, stačí si zvoliť ľubovoľné pevné poradie kariet a povedať ho 52-krát (napr. Srdce 2, Srdce 3, …, Srdce Eso, Piko 2, …, Káro Eso), spolu 2704 slov. Čo sa stane? Prázdne miesto sa bude pohybovať stále jedným smerom a obkrúži takto celý kruh (možno niekoľko krát). Určite nemôže zmeniť smer, pretože ak sme akurát vyslovili kartu vedľa voľného miesta a presunuli ju tam, vyslovíme všetky ostatné karty skôr ako ju vyslovíme znova, teda už sa na to voľné miesto presunula iná karta v rovnakom smere.

- Každá karta sa posunie aspoň raz, pretože prázdne miesto sa posunie každé kolo aspoň raz, teda spolu aspoň 52-krát v jednom smere, teda sa posunie o celý kruh, a to znamená že sme sa s každou kartou posunuli aspoň raz.

- Žiadna karta sa nevráti na svoje pôvodné miesto, keďže jednu kartu vyslovíme práve 52-krát, a na vrátenie sa v smere hod. ručičiek potrebuje 53 presunov (keďže kruh je tvorený 53 miestami, jedno je voľné).

Preto žiadna karta neostane na svojom mieste.

Časť b)

Predstavme si poskladaný kruh a všetky možné polohy prázdneho miesta, teda kruh so 104 miestami a každé druhé je prázdne. Značí to, že na začiatku môže byť prázdne miesto medzi ľubovoľnými dvoma kartami. Jožo teraz povie jednu kartu. Kde môže byť prázdne miesto teraz? Nič sa nezmení s kartami a miestami mimo nej, jedine sa niečo stane s dvoma susediacimi. Čo sa ale stane? Ak je prázdne miesto napravo od vyslovenej karty, presunie sa od nej naľavo. Ak je prázdne miesto naľavo, presunie sa napravo. Teda po vyslovení nejakej karty môžu byť prázdne miesta stále na ľubovoľnom mieste. Pre každý krok teda platí, že prázdne miesto môže byť pri ľubovoľnej karte. Preto neexistuje žiadna postupnosť kariet taká, aby bolo zaručené že pri pikovej dáme nebude prázdne miesto.

Iné riešenie časti b)

Ďalej značíme $S + [t_1, ..., t_n]$ stav kariet, do ktorého sa dostaneme zo stavu S po vykonaní postupnosti ťahov $t_1, ...t_n$. Jožova sekvencia kariet musí byť univerzálna pre všetky začiatočné rozostavenia kariet. Pre spor teda predpokladajme, že taká existuje, označme ju $k_1, \ldots, k_n$. Uvažujme ľubovoľné konečné rozostavenie kariet také, pre ktoré Jožo prehrá, a označme ho P. Spravme reverznú sekvenciu ťahov, t. j. $k_n, \ldots, k_1$ a začnime hru v takomto začiatočnom rozostavení kariet $P + [k_n, \ldots, k_1]$. Keďže po dvoch vysloveniach rovnakej karty sa karta posunie tam a späť (prípadne sa nepohne vôbec) nič to nezmení. Jožo teraz povie jeho sekvenciu a stane sa toto: $P + [k_n, \ldots, k_2, k_1, k_1, k_2, \ldots, k_n] = P + [k_n, \ldots, k_2, k_2, \ldots, k_n] = \cdots = P + [k_n, k_n] = P$ Teda na konci ostane práve prehrávajúce rozpoloženie kariet. Preto neexistuje univerzálna sekvencia kariet zaručujúca prázdne miesto pri dáme.

2.9 Krádež Matematických Šperkov

opravovali **Jožo** a **Tomáš J.**

Zadanie. *Škandál! Z trezoru s prirodzenými číslami v Belgickej národnej banke zmizli všetky prirodzené čísla n také, pre ktoré možno číslo $36^n - 6$ zapísať ako súčin aspoň dvoch za sebou idúcich prirodzených čísel. Za nájdenie každého z nich vypísala banka zaujímavú odmenu. Pomôžte Jožovi zarobiť slušný balík a nájdite ich všetky! Možno sa s vami podelí o apanáž.*

Zrejme pre ľubovoľné 4 po sebe idúce prirodzené čísla platí, že ich súčin je deliteľný štyrmi. Číslo $36^n - 6 = 6(6^{2n-1} - 1)$ je zrejme deliteľné iba dvomi a štyrmi nie. Teda $6(6^{2n-1} - 1)$ je súčinom nanajvýš troch po sebe idúcich prirodzených čísiel. Z nich najviac jedno je párne.

Teraz sa úloha dala rozdeliť na dve časti, totiž na časť a), kde predpokladáme, že $36^n - 6 = (k+1)k$ pre nejaké prirodzené k, a na časť b), kde $36^n - 6 = (k-1)k(k+1)$. Obidve časti sa dali riešiť viacerými spôsobmi.

Časť a): súčin troch čísel

V časti a) má platiť $36^n - 6 = (k-1)k(k+1)$. Pri riešení rovníc s celými číslami nám veľmi vedia pomôcť zvyšky po delení. Otázkou je, že zvyšky po delení ktorým číslom chceme študovať. Dobré je vybrať také číslo, aby jednotlivé strany rovnosti dávali malé množstvo zvyškov. Na to sa dá prísť skúšaním rôznych čísel. Môžeme však skúsiť využiť, že číslo 36 dáva zvyšok 1 po delení číslami 5 a 7, a teda aj 36^n bude dávať zvyšok 1 po delení piatimi alebo siedmimi.

Pekne z toho vyjdú zvyšky po delení siedmimi. Ľavá strana $36^n - 6$ dáva pre každé prirodzené číslo n zvyšok 2 po delení siedmimi. Pravá strana sa dá upraviť na tvar $k^3 - k$. Pre k dávajúce zvyšok 0 až 6 po delení siedmimi dáva výraz $k^3 - k$ postupne zvyšky 0, 0, 6, 3, 4, 1, 0, (rozmyslite si to[2]). Pretože pravá a ľavá strana rovnice nemajú nikdy rovnaké zvyšky po delení siedmimi, rovnica $36^n - 6 = (k-1)k(k+1)$ nemá riešenie v prirodzených číslach.

Časť b): súčin dvoch čísel

Časť b) bola ľahšia. My si ukážeme dva spôsoby, ako sa s ňou dalo popasovať. Chceme v prirodzených číslach vyriešiť rovnicu $36^n - 6 = (k-1)k$. Na túto rovnicu sa môžeme pozrieť ako kvadratickú rovnicu

$$k^2 - k - 36^n + 6 = 0$$

s premennou k. Aby mala riešenie v celých číslach, musí byť jej diskriminant druhou mocninou celého čísla, skrátene povedané *štvorcom* (rozmyslite si). Ten je rovný $D = 4 \cdot 36^n - 23$. Pri bližšom pohľade je len o 23 menší od štvorca $4 \cdot 36^n = (2 \cdot 6^n)^2$. Štvorce majú medzi sebou čím ďalej väčšie rozostupy. Preto, ak chceme, aby D bol štvorcom, prichádza do úvahy až štvorec $(2 \cdot 6^n - 1)^2$ alebo nejaký menší. Teda musí platiť

$$D = 4 \cdot 36^n - 23 \le (2 \cdot 6^n - 1)^2 = 4 \cdot 36^n - 4 \cdot 6^n + 1,$$

$$6^n \le 6,$$

čo platí iba pre $n = 1$. Pre $n = 1$ dostaneme kladné riešenie $k = 6$ a naozaj $36^1 - 6 = 30$ sa dá zapísať ako $5 \cdot 6$.

[2] Pokiaľ máte s tým problémy, odporúčame si pozrieť o práci zo zvyškami po delení v Zbierke KMS

Druhým spôsobom, ako si poradiť v časti b), je šikovne rozložiť výrazy v rovnici na súčin. Pomôžeme si v tom tým, že pravú stranu $k^2 - k$ doplníme na štvorec:

$$36^n - 6 = k^2 - k,$$
$$4 \cdot 36^n - 23 = 4k^2 - 4k + 1,$$
$$(2 \cdot 6^n)^2 - (2k-1)^2 = (2 \cdot 6^n - 2k + 1)(2 \cdot 6^n + 2k - 1) = 23.$$

Zrejme ľavá zátvorka je menšia ako pravá a pravá je kladná. Obe zátvorky majú celočíslenú hodnotu, takže ak jedna je kladná, tak aj druhá musí byť kladná, pretože ich súčin je kladné celé číslo. Číslo 23 sa dá rozložiť na súčin kladných celých čísel len ako $1 \cdot 23$, teda $2 \cdot 6^n + 2k - 1 = 23$ a $2 \cdot 6^n - 2k + 1 = 1$. Tato sústava rovníc vedie opäť k riešeniu $k = 6, n = 1$.

Dostali sme tak, že bolo ukradnuté jediné číslo, a to $n = 1$.

2.10 Koho Máme Súdiť? opravovali **Ákos** a **Pedro**

Zadanie. *Slávny Belgický detektív Hercule Poirot sa rozhodol dolapiť zlodeja vzácnych prirodzených čísel. Ako prvé získal plán národnej banky a svojimi dedukčnými schopnosťami sa mu podarilo určiť trajektóriu úteku zlodeja. Všimol si, že zlodej počas úteku zabočil kolmo, čo mu dopomohlo usvedčiť vinníka (musel byť cudzinec, lebo Belgičania rovno bežia). Žiaľ, nemá dostatok dôkazov, že zlodej naozaj zabočil kolmo. Potrápte svoje šedé mozgové bunky a pomôžte Poirotovi jeho tvrdenie dokázať!*

Daný je trojuholník ABC. Body D, E ležia postupne v polrovinách opačným k ABC, ACB tak, že platí: $|AB| = |AD|$, $|AC| = |AE|$, $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle CAE|$. *Priesečník priamok CD a BE označme P. Označme O stred opísanej kružnice trojuholníku BCP. Dokážte, že priamky AO a DE sú na seba kolmé.*

Riešenie podľa Michala Staníka.

Všimnime si, že trojuholníky DAC a BAE sú zhodné podľa vety *sus*.[3] Z toho vyplýva: $|\sphericalangle CAE| = |\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle ABP|$, a teda z rovnosti uhlov ADP a ABP vyplýva, že body A, D, B, P ležia na kružnici. Analogicky sa dá prísť na to, že aj štvoruholník $APCE$ je tetivový. Ďalej v riešení budeme skrátene nazývať kružnicu opísanú mnohouholníku $A_1A_2\ldots A_n$ (o ktorom teda vieme, že je tetivocý) ako kružnicu $A_1A_2\ldots A_n$.

Označme X druhý priesečník priamky AE s kružnicou $ADBP$. Označme Y druhý priesečník priamky DA s kružnicou $APCE$. Po chvíľke nasledovného uhlenia: $|\sphericalangle DXA| = 180° - |\sphericalangle DBA| = 180° - |\sphericalangle ACE| = |\sphericalangle AYE|$, a teda z obvodových uhlov nad tetivou DE je jasné, že štvoruholník $DEYX$ je tetivový.

Teraz sa už konečne pozrime na nami dokazované tvrdenie. Využijeme, že uhlopriečky nejakého štvoruholníka sú na seba kolmé práve vtedy, keď sa rovnajú súčty štvorcov ich protiľahlých strán (rozmyslite si to). Preto, ak si vezmeme štvoruholník $DOEA$, tak nám stačí ukázať: $|DO|^2 + |EA|^2 = |OE|^2 + |AD|^2$.

Z mocnosti bodu D ku kružnici BPC platí: $|DO|^2 - r^2 = |DP||DC|$, kde r je jej polomer a z mocnosti bodu E ku kružnici BPC vyplýva $|EO|^2 - r^2 = |EP||EB|$. Vyjadrením $|DO|^2$ z prvej rovnosti a $|EO|^2$ z druhej a dosadením do tej, ktorú chceme ukázať dostaneme: $|DP||DC| + |EA|^2 = |EP||EB| + |AD|^2$. Ďalej z mocnosti bodu E ku kružnici $ADBP$ môžeme výraz $|EP||EB|$ nahradiť výrazom $|EA||EX|$ a analogicky výraz $|DP||DC|$ môzeme nahradiť výrazom $|DA||DY|$.

[3] Skúsený riešiteľ si všimne, že špirálna podobnosť so stredom v bode A zobrazuje trojuholník DAB na BAE. Keďže špirálka „chodí po dvoch", tak táto istá špirálna podobnosť zobrazuje aj trojuholník DAC na trojuholník BAE, takže tieto trojuholníky musia byť podobné. Viac o špirálovej podobnosti si môžete prečítať v seriáli PraSe o geometrických zobrazeniach od strany 22, ktorý je dostupný na https://mks.mff.cuni.cz/archive/31/9.pdf.

Dostaneme: $|EA|^2 - |EA||EX| = |AD|^2 - |DA||DY|$, a teda $|EA|(|EA| - |EX|) = |AD|(|AD| - |DY|)$, čo sa dá vzhľadom k vzájomnej pozícií vystupujúcich úsečiek upraviť na $|EA||AX| = |AD||AY|$.

Nakoľko ale už vieme, že štvoruholník $DEYX$ je tetivový, tak táto rovnica platí ako dôsledok mocnosti bodu A ku kružnici $DEYX$. Keďže všetky využité úpravy boli ekvivalentné, sme teda hotoví.

Na záver ešte doplníme, že toto riešenie platí len pre nejaké konfigurácie bodov zo zadania. Pri iných konfiguráciách sa niektoré detaily pozmenia, napr. niektoré uhly sa nahradia ich doplnkami do $180°$. To, ako presne sa riešenie pozmení, nechávame na usilovného riešiteľa.