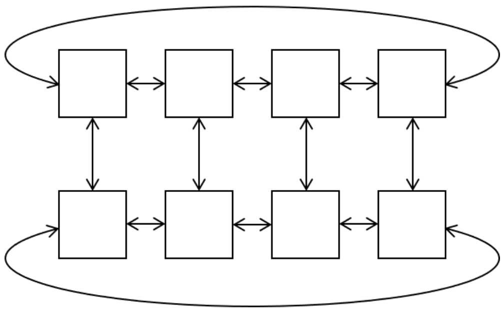
Riešenia 3. kola zimnej časti

3.1 Keď Miluješ Spomienky ($\kappa \leq 1$)

opravovala **Ivka**

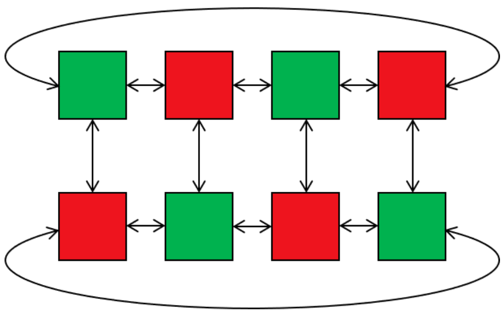
Zadanie. *Jožovi bolo v Belgicku smutno a tak si pospomínal na časy, keď išiel vedúcovať svoje prvé sústredenie. Organizoval tam hru, ktorá sa hrala v ôsmich miestnostiach. Na začiatku hry sa družinka šiestich účastníkov rozdelila do miestností, každý účastník do inej. Po každom kole sa každý účastník presunie do inej miestnosti. Pritom presúvať sa medzi miestnosťami sa dá len tak, ako je naznačené na obrázku. Dokážte, že bez ohľadu na to, ako sa družinka na začiatku rozdelí, nikdy sa nestretnú všetci jej účastníci v jednej miestnosti.*[1]



Uvedieme dva spôsoby riešenia.

1. spôsob riešenia

V schéme sa nachádza 8 miestností a každá je spojená cestou s práve 3 ďalšími. Pre lepšiu orientáciu v obrázku si vyfarbime miestnosti dvoma farbami ako je znázornené na obrázku:



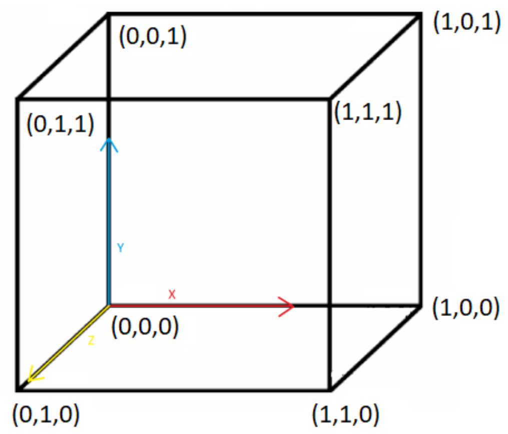
Pre toto ofarbenie platí, že každá miestnosť je cestičkami spojená s práve troma miestnosťami opačnej farby. Máme 4 miestnosti zelenej farby a 4 miestnosti červenej farby, do nich chceme umiestniť 6 účastníkov. Môžeme si všimnúť, že ich na začiatku nevieme všetkých umiestniť do miestností s rovnakou farbou (vždy budú aspoň 2 v miestnostiach s opačnou farbou). Po každom kole sa účastníci premiestnia do niektorej z iných miestností, ktoré sú s ich pôvodnou spojené cestičkou. Podľa spôsobu, akým sme miestnosti ofarbovali, vieme, že sa v nasledujúcom kole každý účastník ocitne v miestnosti s opačnou farbou ako v kole predtým. Preto sa v

[1] Bolo by blbé, keby sa takáto hra hrala na sústredení, obzvlášť ak by pre výhru bolo potrebné stretnúť sa jednej miestnosti. Našťastie si vedúci pomáhajú a Viťo pomohol odhaliť Jožovi túto chybičku.

každom kole ocitnú aspoň 2 účastníci v miestnosti s opačnou farbou ako zvyšní, a teda vieme zaručiť, že sa ani v jednom kole nestretnú v jednej a tej istej miestnosti všetci 6 (keďže sa nestretnú ani len v miestnostiach s rovnakou farbou).

2. spôsob riešenia

Na úlohu sa však môžeme pozrieť aj inak. Máme 8 miestností a z každej vedú práve 3 cesty. Situáciu teda vieme premeniť na pohyb medzi vrcholmi kocky (pre jednoduchosť nech má dĺžku strán rovnú 1). Vrcholy kocky budú predstavovať dané miestnosti a hrany nám budú určovať cesty medzi miestnosťami. Vrcholy si označíme pomocou súradnicového systému ako je na obrázku:



Vďaka tejto reprezentácii si vieme charakterizovať každý vrchol na základe súčtu jeho súradníc. Keď máme situáciu takto prekreslenú, poďme si ju lepšie rozobrať. Z každej miestnosti sa vieme dostať do práve 3 ďalších a to pohybom po jednej z osí. Teda pri presune z miestnosti do miestnosti sa vždy zmení práve jedna súradnica z 0 na 1 alebo naopak. Čiže sa súčtu zmení parita. Toto sa stane pri každom presune každého účastníka. Keď si vrcholy označíme pomocou súčtov, dostávame 4 vrcholy s párnym súčtom a 4 s nepárnym. Účastníkov máme v úlohe 6. To znamená, že ich nemôžeme umiestniť všetkých do vrcholov s rovnakou paritou ale aspoň dvaja budú v miestnostiach s opačnou paritou ako zvyšní. Po každom kroku sa bude parita miestnosti každého účastníka meniť a teda sa nikdy nemôže stať, že budú všetci účastníci naraz v miestnostiach s rovnakou paritou. Z toho dostávame, že sa nemôžu naraz nachádzať ani v rovnakej miestnosti.

3.2 Komprimácia Možných Súčtov ($\kappa \leq 2$) — opravoval **Dominik**

Zadanie. *Maťko napísal na papier čísla* $1, 2, \ldots, n$, *kde* $n \geq 2$. *V jednom kroku si vyberie dve čísla napísané na papieri a nahradí ich novým číslom podľa nasledujúcich pravidiel:*

- *Ak sú vybrané čísla obe párne, nahradí ich ich súčtom.*
- *Ak je práve jedno z vybraných čísel nepárne, nahradí ich tým nepárnym číslom.*
- *Ak sú obe vybrané čísla nepárne, nahradí ich nulou.*

Tento krok Maťko opakuje dovtedy, dokým mu neostane na papieri len jedno číslo. V závislosti od celého čísla $n \geq 2$ *určte najmenšiu a najväčšiu možnú hodnotu čísla, ktoré Maťkovi ostane.*

Keď riešime úlohu ako táto, je na úvod dôležité zamyslieť sa, akým spôsobom sa mení počet párnych a nepárnych čísel. Môže nám to napadnúť pomerne jednoducho – ak hrá parita rolu v tom, ako čísla mažeme, bude isto dôležitá aj pre číslo, ktoré nám napokon zostane.

Pozrime sa, ako sa zmení počet nepárnych čísel po niektorom z ťahov, pričom zatiaľ zanedbáme ich hodnotu. Zadanie nám hovorí, že ak máme dve nepárne čísla, nahradíme ich nulou. To znamená, že sme prišli o dve nepárne čísla. Ak si vezmeme jedno nepárne a jedno párne číslo, počet nepárnych čísel sa nezmení. Podobne sa nezmení ani v prípade, keď vezmeme dve párne čísla.

Zistili sme, že počet nepárnych čísel sa nám po každom ťahu buď zníži o dve alebo zostane rovnaký. To je veľmi dôležité, pretože ak je na začiatku počet nepárnych čísel nepárny, tak taký aj zostane, a teda ako posledné nám zvýši nepárne číslo. Podobne, ak je tento počet párny, zostávajúce číslo musí byť párne. Pozrime sa na to, pre aké n bude počet nepárnych čísel nepárny.

Ak si rozdelíme prirodzené čísla na štvorice tak, ako idú po poradí, zistíme, že v každej z nich sú práve dve nepárne čísla. Prvé z nich je v štvorici prvé, druhé z nich je tretie. Teda ak skončíme s písaním čísel na tabuľu v momente, keď má n zvyšok po delení štyrmi rovný 1 (má tvar $n = 4k + 1$, kde k je celé číslo) alebo 2, napíšeme na tabuľu nepárny počet nepárnych čísel. V opačnom prípade bude ich počet párny.

Pozrime sa teraz na to, aké najmenšie číslo nám na tabuli môže zostať v prípade, ak je počet nepárnych čísel párny. Vieme už, že tam zostane párne číslo. Číslo, ktoré na tabuli zostane, nemôže byť záporné, skúsme teda ukázať, že najmenšie číslo, ktoré vieme dostať bude 0. Dôležité je, že potrebujeme ukázať, že to pôjde vždy, nestačí nám konkrétny príklad. Získať nulu na konci je možné napríklad takto: Vieme, že z dvojice párne – nepárne, nám vždy zostane nepárne číslo. Takto sa môžeme zbaviť všetkých párnych čísel a zostane nám len párny počet nepárnych čísel. Tie môžeme dať do dvojíc a získať tak len nuly. Napokon sčítaním dvoch núl dostaneme vždy len nulu, a teda sa ostatných núl zbavíme a zvýši nám jedna.

Ak je počet nepárnych čísel na tabuli nepárny, naisto nám na konci zvýši nepárne číslo. Najmenšie, ktoré sa na tabuli môže objaviť je 1. Vieme čísla mazať tak, aby tam napokon zvýšila práve jednotka? Vieme. Podobne ako predtým sa najprv zbavíme párnych čísel a zostanú nám len nepárne. Tých je ale nepárny počet, takže môžeme všetky čísla okrem jednotky dať do dvojíc a spraviť z nich nuly. Takto dostávame niekoľko núl a jednu jednotku. Na konci nám takto vždy môže zostať len číslo 1.

Aké môžeme v takejto situácii(ak je počet nepárnych čísel nepárny) získať naopak čo najväčšie číslo? Vieme už, že na tabuli na konci zostane nepárne číslo. Na základe ťahov, ktoré máme k dispozícii môžeme vidieť, že väčšie nepárne číslo ako niektoré z pôvodných na tabuľu dostať nevieme. Dokážeme na tabuli udržať najväčšie z nepárnych čísel? Áno. Veľmi podobne, ako sme sa dopracovali k číslu 1 sa vieme aj k iným ostatným nepárnym číslam. Jednoducho ich nezaradíme do žiadnej z dvojíc nepárnych čísel. V závislosti od toho, či n bolo párne alebo nepárne tak dostávame buď číslo $n - 1$ alebo n.

Záverečnou časťou úlohy je nájsť najvyššie možné zostávajúce číslo, ak bol na tabuli na začiatku párny počet nepárnych čísel. Vieme, že číslo, ktoré nám zostane, bude párne. Z toho, aké môžeme robiť ťahy môžeme vidieť, že súčet párnych čísel na tabuli sa nám nemôže zväčšiť a zároveň, že nepárne čísla nám k zvyšovaniu najväčšieho čísla na tabuli nepomôžu. Najväčšie číslo, aké by sme teda mohli na tabuľu dostať je súčet všetkých párnych čísel. Stačí nám už len ukázať, že ho na tabuľu dostať vieme a tiež, že ho tam vieme udržať až do konca.

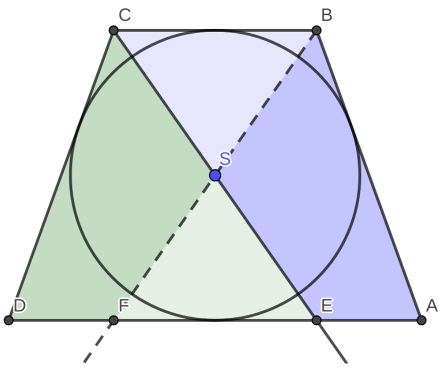
Súčet všetkých párnych čísel získame jednoducho: sčítame ich. Takto nám zostane párny počet nepárnych čísel a jedno veľké párne. Ako sme sa už naučili doteraz, z párneho počtu nepárnych čísel vieme spraviť nulu, keď ich dáme do dvojíc. A keďže nula je párne číslo, súčtu párnych čísel neublíži.

Ešte je otázka, aký bude súčet všetkých párnych čísel: Rozdeľme si situáciu podľa zvyškov po delení štyrmi, teda buď $n = 4k$ alebo $n = 4l + 3$. V prvom prípade sčítavame čísla $2, 4, \cdots 4k$. Môžeme vidieť, že ich je párny počet, nakoľko v každej štvorici sú dve a štvoríc je k. Súčet všetkých párnych čísel dostaneme napríklad tak, že si utvoríme dvojičky $(2, 4k), (4, 4k - 2), \cdots$. Týchto dvojičiek je k a súčet v každej z nich je $4k + 2$, celkový súčet je teda rovný $k(4k + 2) = \frac{1}{4}(n + 2)n$. V prípade $n = 4l + 3$ môžeme postupovať podobne, pribudlo nám totiž len číslo $4l + 2 = n - 1$. Okrem toho netreba zabudnúť, že $n = 4l + 3$, teda aj zlomok bude iný. Celkovo je teda súčet rovný $(4l + 2)l + (4l + 2) = (4l + 2)(l + 1) = \frac{1}{4}(n - 1)(n + 1)$.

3.3 Kohle Messen Synthetisch ($\kappa \leq 3$) opravoval **Dávid**

Zadanie. *Maťko po šokujúcich zisteniach Kiky a Joža o rovnobežiacich Dánoch a Belgičanoch, začal svoj výskum na Nemcoch. Vo štvoruholníku $ABCD$, ktorému vieme vpísať kružnicu, platí navyše, že $|AB| = |CD|$, $|BC| < |AD|$ a strany BC a AD sú rovnobežné. Dokážte, že os uhla BCD rozpoľuje plochu štvoruholníka $ABCD$.*

Štvoruholník zo zadania si nakreslíme, a dostaneme nasledujúci obrázok:



Aby sme naň mohli lepšie odkazovať, označme si stred vpísanej kružnice S, ďalej priesečník osi uhla BCD a úsečky DA označíme E, a vyznačme ešte os uhla ABC a jej priesečník s úsečkou DA označme F.

Chceme ukázať, že trojuholník DEC (zelená) a štvoruholník $EABC$ (modrá) majú rovnaký obsah.

Lichobežník, ktorý máme zo zadania, je rovnostranný. Preto uhly, pri vrcholoch A a B sú rovnaké ako uhly pri vrcholoch D a C. Lichobežník je teda osovo symetrický. Preto aj os uhla ABC ho delí rovnako ako os BCD. Keď máme nakreslené obe tieto osi a vieme že lichobežník je osovo symetrický, je ľahké všimnúť si, že štvoruholníky $EABS$ (tmavomodrá) a $DFSC$ (tmavozelená) majú rovnaký obsah. Keď sa teraz pozrieme na naše pôvodné oblasti, ktorých rovnosť chceme dokázať, a odmyslíme si tieto dva štvoruholníky, ostáva nám ukázať rovnosť obsahov trojuholníkov FES (bledomodrá) a SBC (bledozelená).

Bod S je v strede medzi rovnobežkami BC a AD, a teda úsečky CE a BF delí na polovicu. Okrem toho, uhly CSB a ESF sú vrcholové, a teda majú rovnakú veľkosť. Z toho už vidíme, že naše trojuholníky sú zhodné, a teda majú rovnaký obsah.

3.4 Konečná Mramorová Sieť ($\kappa \leq 4$) opravoval **Juro**

Zadanie. *Maťko a Vodička sa vydali do lokálneho múzea hornín. Tam našli mramorovú dosku so štvorčekovou sieťou. Maťko s Vodkom sa začali hrať nasledujúcu hru na štvorčekovom mramore*[2]*. Maťko otvorí hru tým, že nakreslí krížik do ľubovoľného štvorčeka. V každom svojom ďalšom ťahu musí nakresliť krížik do voľného štovrčeka, ktorý aspoň vrcholom susedí so štvorčekom, v ktorom je krížik. Vodka môže v jednom ťahu nakresliť tri koliečka do ľubovoľných voľných políčok. Ak Maťko môže nakresliť siedmy krížik, vyhráva. Inak vyhráva Vodička. Zistite, či existuje stratégia pre Vodičku taká, že Maťko zaručene nevie vyhrať.*

Zahráme si pár hier a zistíme, že ak nie je Vodka veľmi hlúpy, tak vie obkľúčiť Maťka tak, aby dal najviac 6 X-iek.

[2] Keďže ani Maťko ani Vodička nie sú vagabundi, celú hru odohrali v hlavách, na nekonečnej štvorčekovej sieti.

Aká bude Vodkova stratégia? Po Maťkovom prvom X, si nakreslí okolo tohoto X štvorec veľkosti 3×3 ako na obrázku (X je v ňom hore v strede) a nad X dá svoje tri O. Označíme si políčka, tak ako na obrázku. Vodka teraz dokáže Maťka "zatarasiť" a nechať ho hrať iba v tomto štvorci. Ako? Nech dá Maťko na hociktoré zo zvyšných 7 okrajových políčok svoje X, má na dosah iba tri políčka mimo štvorca. Prečo? Pretože jediné dve políčka v celom štvorci, ktoré susedia s viac ako tromi políčkami mimo štvorca, sú dolné rohové políčka C_1 a C_3. S nimi ale musí nejaké X-ko najprv susediť. To sa môže stať iba cez jedno z políčok A_2, S a B_2. Ak dá Maťko svoje X do stredu štvorca S, niekedy v priebehu hry (okrem siedmeho ťahu), tak môže Vodka dať všetky tri svoje O dovnútra štvorca. Ak nie sú zabraté rohové políčka C_1 a C_3, tak svoje O dá práve na ne.

O	O	O
A_1	X	B_1
A_2	S	B_2
C_1	C_2	C_3

Ostáva teda iba začať na A_2 (B_2). Ak ale najprv dáme X na A_2 (B_2), Vodkova stratégia, bude dať tri O na tie vonkajšie políčka, s ktorými susedí. Potom, ale rohovému políčku už skutočne ostanú iba tri vonkajšie políčka, s ktorými susedí. Preto nech robí Maťko čokoľvek, Vodka ho vie udržať vo štvorci.

Výborne, už nám stačí dokázať, že Vodka je vždy schopný okrem toho, že Maťka udrží vo štvorci, dostať aspoň tri svoje O dovnútra štvorca. Ako sme videli vyššie, Maťko nesmie nikdy dať svoje X (okrem 7meho) do stredu, lebo Vodka potom dá tri O dovnútra štvorca a vyhral.

Teraz trochu počítania. Za 6 kôl, v ktorých musí Vodka úplne zablokovať Maťka, stihne položiť 18 svojich O-čiek. Aby Maťko nemal kam dať siedme X, musia byť 3 z toho vo vnútri štvorca. Ostáva nám teda 15 O-čiek, na obkolesenie štvorca. Niečo tu však nesedí. Okolo štvorca je 16 políčok a my máme len 15 O-čiek. To však vôbec nevadí, keď si uvedomíme, že jeden z rohov sa nám určite podarí zablokovať priamo, a teda ho už nemusíme blokovať z vonka. Na obkľúčenie nám potom bude stačiť 15 O-čiek a všetko zrazu do seba zapadne.

Teraz už naozaj na záver, ukážeme, že Vodkovi ostane jeden "voľný" ťah pri obkolesovaní skôr, ako sa Maťkovi podarí zablokovať všetky rohy. Na zablokovanie troch rohov potrebuje Maťko aspoň 4 ťahy. Jednoduchou analýzou všetkých možností, ktorú prenecháme čitateľovi, však zistíme, že po štvrtom Maťkovom ťahu už Vodka určite nepotrebuje položiť všetky tri O-čka, lebo niektoré z vonkajších políčok už skôr zablokoval.

3.5 Konzultácia Machinelearningu Slava ($\kappa \leq 7$)

opravoval **Ľubo**

Zadanie. *Slavo sa rozhodol naučiť počítač hrať nasledovnú hru:*

Najprv Slavo nakreslí do roviny n bodov. Potom počítač ofarbí tieto body dvomi farbami, zelenou a červenou. Nakoniec Slavo nakreslí do roviny kruh. Pokiaľ sa všetky zelené body nachádzajú vnútri kruhu (alebo aj na obvode) a všetky červené body mimo kruhu, tak Slavo vyhrá. Inak vyhrá počítač.

Po chvíli učenia bol Slavo s výsledkom spokojný, preto sa rozhodol otestovať počítač proti skúsenému oponentovi – Maťkovi. Maťko to však vyhlásil za príliš informatickú úlohu a odmietol to rátať. Dokážete úlohu vyriešiť a pomôcť Slavovi? V závislosti od prirodzeného čísla n, určte, kto má vyhrávajúcu stratégiu.[3]

Keďže zadaná úloha sa značne mení podľa toho, aké n si Slavo zvolí, skúsme sa najprv pozrieť na nejaké prípady pre malé n. Začnime pre $n = 1$. V tomto prípade pre ľubovoľné ofarbenie počítačom vieme povedať, že určite vyhrá Slavo (premyslenie necháme na čitateľa). Pri $n = 2$ je pre ľubovolne ofarbenie ľahko dokázateľné, že Slavo určite vyhrá (tento dôkaz tiež necháme na predstavivosť čitateľa).

Pri prípade $n = 3$ to už začne byť zaujímavejšie. V prípade, ak by tieto body boli umiestnené na priamke, stačí počítaču len zafarbiť krajné body zelenou a stredný bod červenou farbou. V takomto prípade už Slavo určite nevie nakresliť kruh. V tomto prípade by vyhral počítač. Slavo je ale mladý šibal a môže si vybrať, ako nakreslí

[3] Hráč má víťaznú stratégiu, ak si vie svojimi ťahmi zaručiť výhru bez ohľadu na to, ako hrá jeho súper.

tieto body do roviny. Stačí mu nakresliť tieto body tak, aby tvorili vrcholy trojuholníka. V tomto prípade sa stáva znovu víťazom Slavo.

Zatiaľ nám vychádza, že Slavo vždy vyhrá. začína to preňho vyzerať sľubne. Pokračujme ale ďalej a pozrime sa aj na prípad pre $n = 4$. Ak chce mať Slavo šancu vyhrať, môže usporiadať body do roviny dvomi spôsobmi (ako už vieme, nechce aby nejaké 3 ležali na priamke).

Jedným spôsobom by bolo usporiadať body do nekonvexného štvoruholníka. To si vieme ľahko predstaviť ako tri body vo vrcholoch trojuholníka a štvrtý niekde vo vnútri trojuholníka. Hneď vidíme, že ak sa počítač rozhodne zafarbiť bod vo vnútri trojuholníka červenou farbou a vrcholy trojuholníka zelenou farbou, Slavo prehrá.

Druhým spôsobom by bolo usporiadať ich do konvexného štvoruholníka. Očividne problémový bude práve prípad, kedy sú vyfarbené body na jednej uhlopriečke zelenou farbou a body na druhej uhlopriečke červenou farbou (zvyšné teda radi prenecháme čitateľovi). Nakreslime si dva body do roviny a označme ich A a C a bez ujmy na všeobecnosti vyfarbíme tieto body zelenou farbou. Nakreslime si kružnicu k tak, že tieto body A a C ležia v kruhu ktorého hranicou je kružnica k. Ak Slavo chce vyhrať, musel by červené body B a D umiestniť mimo kruhu ohraničeného kružnicou k. Aby body B, D tvorili uhlopriečku konvexného štvoruholníka $ABCD$, tak sa musia nachádzať v opačných polrovinách určenými priamkou LR. Spravme si ešte priamku prechádzajúcu bodmi A a C a jej prieniky s kružnicou k označme L a R.

Poďme sa pozrieť, čo vieme povedať o uhloch v takomto útvare. To, že bod B leží vo vonkajšej oblasti kružnice k, vieme pekne uchopiť pomocou obvodových uhlov. V takejto situáii musí platiť

$$|\sphericalangle LSR| > |\sphericalangle LBR| \geq |\sphericalangle ABC|,$$

pričom $\sphericalangle LSR$ je obvodovým uhlom nad tetivou LR v polrovine LRB. Analogicky pre druhý bod dostávame:

$$|\sphericalangle LHR| > |\sphericalangle LDR| \geq |\sphericalangle ADC|.$$

Opäť platí, že $\sphericalangle LHR$ je obvodovým uhlom nad bodmi L a R. Vieme, že pre obvodové uhly zodpovedajúce rovnakej tetive, ale v opačných polrovinách, platí:

$$|\sphericalangle LHR| + |\sphericalangle LSR| = 180°.$$

Platí teda:

$$180° > |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ADC|.$$

Počítač si ale môže zvoliť, ktoré body zafarbí akou farbou. Stačí mu zafarbiť červenou farbou tie body na uhlopriečke, ktorých súčet prislúchajúcich vnútorných uhlov je aspoň 180°. Zvyšné dva body zafarbí zelenou farbou. Vtedy by pre súčet uhlov prislúchajúcich červeným bodom platil nasledovný vzťah:

$$180° > |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ADC| \geq 180°.$$

Dostávame jasný spor, teda Slavo by nevedel nakresliť pre tento prípad kruh tak, aby vyhral. Pre prípad $n = 4$ má teda už víťaznú stratégiu počítač.

Čo sa deje pre $n > 4$? Zoberme z týchto bodov ľubovoľné štyri. Počítač ich ofarbí tak, ako sme si ukázali pre $n = 4$. Na ofarbení a usporiadaní ostatných bodov potom už nezáleží, nakoľko či budú v kruhu alebo mimo kruhu zelené alebo červené body, už Slavovi nepomôže splniť podmienku na výhru.

Vyšlo nám teda, že pre $n \leq 3$ má víťaznú stratégiu Slavo a pre $n \geq 4$ má už víťaznú stratégiu počítač.

3.6 Kalorická Mľaskacia Seansa

opravovali **Tomáš** a **Tomáš**

Zadanie. *Počas obedovej prestávky išiel Maťko do jedálne a tam s hrôzou zistil, že jeho obľúbené jedlo je vypredané. Našťastie jedáleň robí pizzu, na ktorú si môžu zákazníci objednať prílohy, aké chcú. Maťko by rád dal na svoju pizzu niektorú z obľúbených postupnosti príloh, (prirodzených čísel)* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Za chvíľku sa od predavačky dozvedel, že každá postupnosť príloh musí spĺňať nasledujúcu podmienku*

$$a_{n-1} \le (a_{n+1} - a_n)^2 \le a_n$$

pre všetky celé čísla $n \ge 2$. *Zistite, či môže existovať nejaká Maťkova obľúbená postupnosť príloh, taká, že ju naservírujú v jedálni.*

Prvé, čo si môžeme všimnúť je, že Maťkova postupnosť musí byť neklesajúca, lebo $a_n \ge a_{n-1}$. Preto $(a_{n+1} - a_n)$ je nezáporné, čiže môžeme odmocniť nerovnosť v zadaní.

$$a_{n+1} - a_n \le \sqrt{a_n},$$
$$a_{n+1} \le a_n + \sqrt{a_n}.$$

Vidíme, že každý člen postupnosti je nejak zhora obmedzený podľa predchádzajúceho člena a postupnosť je neklesajúca. Medzi každými dvomi po sebe idúcimi členmi a_{n-1}, a_n musí byť nejaká druhá mocnina prirodzeného čísla (skrátene *štvorec*), lebo tam je $(a_{n+1} - a_n)^2$. Myšlienka nášho postupu bude, že druhé mocniny rastú rýchlejšie ako Maťkova postupnosť, preto sa niekde pokazí táto podmienka, a medzi nejakými dvomi nasledujúcimi členmi nebude štvorec.

Formálne, predpokladajme, že existuje vyhovujúca Maťkova postupnosť, a prídeme k sporu. Máme vzťah $a_{n+1} \le a_n + \sqrt{a_n}$, v ktorom môžeme člen a_n znovu odhadnúť podľa rovnakého spôsobu a pohrať sa s úpravou výrazu, ktorý dostaneme.

$$a_{n+1} \le a_n + \sqrt{a_n} \le a_{n-1} + \sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_{n-1}}} = a_{n-1} + \sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{\left(\sqrt{a_{n-1}} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} <$$
$$< a_{n-1} + \sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{\left(\sqrt{a_{n-1}} + \frac{1}{2}\right)^2} = a_{n-1} + 2\sqrt{a_{n-1}} + \frac{1}{2} < (\sqrt{a_{n-1}} + 1)^2$$

V intervale $\left\langle \sqrt{a_{n-1}}, \sqrt{a_{n-1}} + 1\right)$ leží len jedno celé číslo. Po umocnení na druhú dostaneme, že v intervale $\left\langle a_{n-1}, (\sqrt{a_{n-1}} + 1)^2\right)$ je najviac jeden štvorec. Keďže $a_{n+1} < (\sqrt{a_{n-1}} + 1)^2$, tak v intervale $\langle a_{n-1}, a_{n+1}\rangle$ leží najviac jeden štvorec.

Vieme, že v oboch intervaloch $A = \langle a_{n-1}, a_n\rangle$ a $B = \langle a_n, a_{n+1}\rangle$ je štvorec, ale v ich zjednotení $\langle a_{n-1}, a_{n+1}\rangle$ je najviac jeden štvorec, Čiže štvorec v A musí byť ten istý štvorec ako v B. Intervaly A, B majú len jeden spoločný bod a_n, čiže a_n je štvorec.

Pre všetky $n \le 3$ sme dokázali, že a_n je štvorec. Čísla a_3, a_4 musia byť rôzne štvorce, lebo $(a_4 - a_3)^2 \ge a_2 \ge 1$, ale zároveň v intervale $\langle a_2, a_4\rangle$ môže byť najviac jeden štvorec, a to je SPOR.

V jedálni neservírujú ani jednu z Maťkových obľúbených postupností príloh.

3.7 Keď Mokro Škodí

opravoval **Marek**

Zadanie. *Vodička sa nešiel do Nemecka flákať, ale seriózne študovať. Jedna z vecí, ktorou sa zaoberá, sú vodotesné čísla. Dvojica kladných celých čísel* (a, b) *sa nazýva* vodotesnou*, ak pre ňu existuje celé číslo* $d \geq 2$ *(nazývané* tesnenie*) také, že* $a^n + b^n + 1$ *je deliteľné číslom* d *pre všetky kladné celé čísla* n*. Nájdite všetky dvojice vodotesných čísel.*

Najprv sa zamyslime, že stačí, aby d bolo prvočíslo. Prečo? Pretože ak nejaké zložené číslo d delí $a^n + b^n + 1$, tak aj prvočíslo p, ktoré je deliteľom čísla d, delí $a^n + b^n + 1$. Takže, nám stačí uvažovať d prvočísla.

Ďalej sa môžme zamyslieť, že netreba uvažovať $n > d$. Prečo? Zoberme si nejaké číslo c a začnime ho umocňovať. $c^1, c^2, c^3, \ldots, c^n, \ldots$ Všimnime si, že zvyškov po delení d je iba d, to sú $0, 1, \ldots, d-1$. No a ak sa nájdu nejaké k, l také, že c^k a c^l majú rovnaký zvyšok po delení d, tak majú rovnaký zvyšok aj čísla c^{k+1} a c^{l+1} a tak ďalej. A keďže máme iba konečný počet zvyškových tried po delení d, tak určite raz nastane, že nejaké c^k a c^l majú rovnaké zvyšky. No a z Dirichletovho princípu to nastane najneskôr pre $n = d$. Dá sa rozmyslieť aj to, že ak $c^k \equiv c^l \pmod{d}$ tak $c^{k-1} \equiv c^{l-1} \pmod{d}$. *Poznámka: zápis* $a \equiv r \pmod{n}$ *znamená, že čísla* a *a* r *majú rovnaký zvyšok po delení číslom* n*.* Preto nám stačí uvažovať, že $k = 1$. A keď si takúto podmienku napíšeme $c^k \equiv c \pmod{d}$ a začneme skúmať, že pre ktoré k to bude platiť, tak sa dopracujeme k **Malej Fermatovaj vete**. Nám však stačí jej poznatok a ten je, že pre c, d nesúdeliteľné platí: $c^d \equiv c \pmod{d}$, a teda aj $c^{d-1} \equiv 1 \pmod{d}$.

Teraz s vedomosťami o **Malej Fermatovej vete** sa môžme pustiť do našej úlohy. Predpokladajme, že a aj b sú nesúdeliteľné s d. Keďže $d \mid a^n + b^n + 1$ pre všetky n, tak musí aj pre $n := d - 1$, a preto môžme písať:

$$a^{d-1} + b^{d-1} + 1 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 3 \pmod{d}.$$

Ale teda $3 \equiv 0 \pmod{d}$, iba ak $d = 3$ alebo $d = 1$. *Poznámka: ak má nejaké číslo zvyšok* 0 *po delení* d *tak je deliteľné* d*.* Keďže $d \neq 1$ tak musí platiť $d = 3$. Teraz už len stačí nájsť všetky také (a, b). Môžme sa taktiež zamyslieť, že sa stačí pozerať len na zvyšky a, b po delení d, teda dvojice $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$ a $(2, 2)$. Zvyšné sú v symetrickej pozícií a teda ich nemusíme riešiť. A ľahko overíme, že jedinou vyhovujúcou dvojicou je $(1, 1) \pmod{3}$. Teda sme našli vodotesné čísla tavru $(a, b) = (3k - 2, 3l - 2)$, kde $k, l \in \mathbb{N}$.

Teraz sa pozrieme na prípad, keď a aj b sú súdeliteľné, v skutočnosti deliteľné d. Dostávame $0^n + 0^n + 1 \equiv 1 \pmod{d}$, a teda také riešenie nemáme. T. j. muselo by $d = 1$ ale to nemôže.

Nakoniec sa pozrieme keď iba jedno z a a b je deľiteľné d. Bez ujmy na všeobecnosti je to a. Potom $0^n + b^n + 1 \equiv b^n + 1 \pmod{d}$, no ale pre $n := d - 1$ platí $b^{d-1} + 1 \equiv 2 \pmod{d}$, a teda musí nutne $d = 2$. Čo to znamená? Máme ďalšie riešenie, kde jedno číslo je párne a druhé nepárne.

Teda množina všetkých vodotesných čísel obsahuje práve dvojice (a, b) tvaru

$$(2k, 2l - 1), \qquad (2k - 1, 2l), \qquad (3k - 2, 3l - 2)$$

pre každé prirodzené čísla k, l.

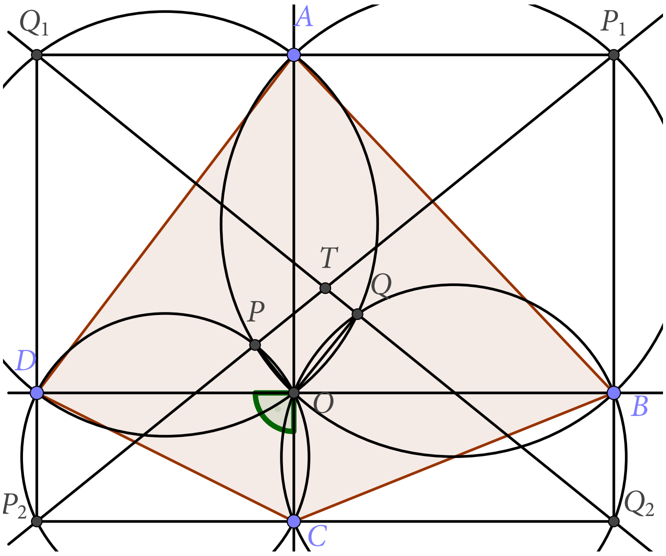
3.8 Kámo, Mokrý Si!

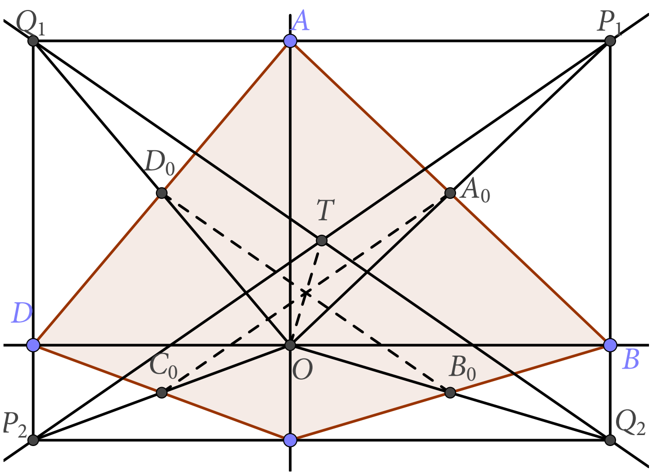
opravovali **Ákos** a **Kika P.**

Zadanie. *Po niekoľkých prechádzkach si Vodička všimol, že vždy skončil v Rýne, to je taká veľká Vodička. Kto by však chcel zmoknúť pri každej prechádzke? Ukážte Vodičkovi, že všetky cesty vedú do Rýna. Máme štvoruholník* $ABCD$ *taký, že existuje bod* O *taký, že platia následujúce vzťahy:* $|\sphericalangle AOB| = |\sphericalangle BOC| = |\sphericalangle COD| = |\sphericalangle DOA| = 90°$*. Označme* P *priesečník kružníc opísaných trojuholníkom* ABO *a* CDO *(rôzny od bodu* O*) a* R *priesečník kružníc opísaných trojuholníkom* DAO *a* BCO *(rôzny od bodu* O*). Označme* T *priesečník priamok* p*,* r*, pričom* $P \in p$*,*

$p \perp OP$ a $R \in r$, $r \perp OR$. Dokážte, že priamka OT a spojnice stredov protiľahlých strán štvoruholníka $ABCD$ sa pretínajú v jednom bode.

Najprv si všimneme, že čo vlastne zadanie hovorí o priamkach AO, BO, CO, DO. To, že $|\sphericalangle AOB| = 90°$ nám hovorí, že $AO \perp BO$. Takisto uhly BOC, COD, DOA nám hovoria, že $BO \perp CO$, $CO \perp DO$, $DO \perp AO$. Z toho nám jednoznačne vyplýva, že trojice bodov A, O, C a B, O, D ležia na priamkach, ktoré sú na seba kolmé. Poďme nájsť význam bodov P, R. Zo zadania je jasné, že štvoruholníky $ABOP$, $CDOP$, $ADOR$, $BCOR$ sú tetivové (body P a R sú definované ako body na kružniciach opísaných trojuholníkom).

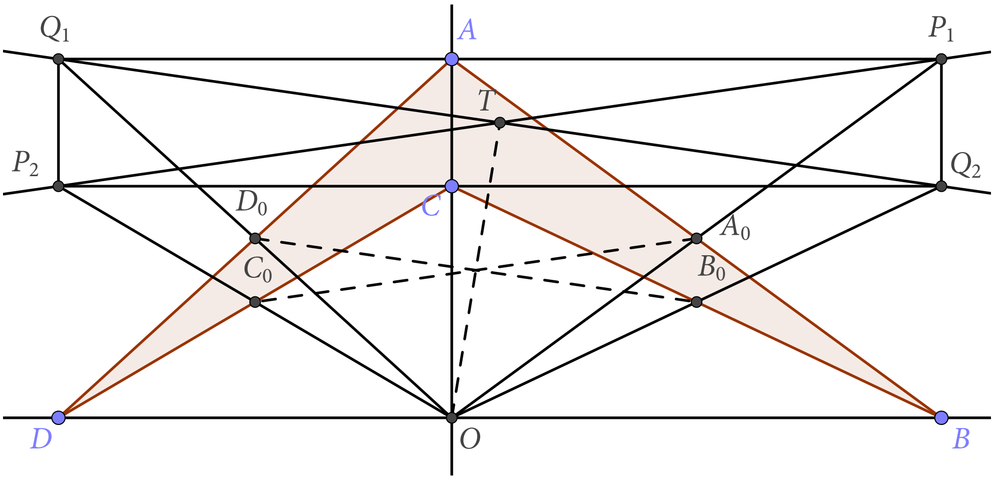




Uvažujme teraz druhé priesečníky priamok p, resp. q s kružnicami $ABOP$, $CDOP$, resp. $ADOR$, $BCOR$.[4] Nech sú to body postupne P_1, P_2, Q_1, Q_2. Všimnime si, že tieto body vďaka kolmostiam $OP \perp p$ a $OR \perp r$ sú body protiľahlé k bodu O v danej kružnici. Ale vieme, že dva rôzne priemery jednej kružnice tvoria obdĺžnik, teda štvoruholníky $AOBP_1$, $CODP_2$, $DOAQ_1$, $BOCQ_2$ sú obdĺžniky. Z toho vyplýva (z kolmosti AC a BD v bode O), že $P_1Q_1P_2Q_2$ je tiež obdĺžnik. Taktiež vieme, že P_1, P_2, $T \in p$ a Q_1, Q_2, $T \in q$, a vieme aj to, že T je stred tohto obdĺžnika. Po spozorovaní toľkýchto vecí sa pustime do dôkazu žiadaného tvrdenia: Nech sú stredy úsečiek AB, BC, CD, DA postupne A_0, B_0 ,C_0, D_0. Všimnime si, že stredy malých obdĺžnikov $AOBP_1$, $BOCQ_2$, $CODP_2$, $DOAQ_1$ sú postupne A_0, B_0, C_0, D_0, pretože sú stredom jednej z uhlopriečok. Zamyslime sa, čo vlastne spraví s bodmi P_1, Q_2, P_2, Q_1 rovnoľahlosť so stredom v bode O a koeficientom $\frac{1}{2}$. Odpoveď je jednoduchá, prenesie ich postupne na body A_0, B_0, C_0, D_0. Tak sa priamky $P_1P_2 \equiv p$ a $Q_1Q_2 \equiv q$ zobrazia na priamky A_0C_0 a B_0D_0. A čo s ich priesečníkom? Je to obraz T, teda je nutne na priamke OT. Súčasne je to aj priesečník priamok A_0C_0 a B_0D_0. Takže sme ukázali, že priesečník dvoch priamok leží nutne na tretej priamke. A tým je tento dôkaz hotový.

Diskusia: Môže sa zdať, že je potrebný rozbor prípadov, čo sa týka konvexnosti $ABCD$. Lenže sme nikde nevyužili žiadnu úvahu o polohe bodu O a naše pozorovania a myšlienky platia aj pre prípad nekonvexného štvoruholníka a tým je dôkaz naozaj hotový pre ľubovoľný štvoruholník $ABCD$.

[4] Kružnicou $KLMN$ označujeme kružnicu, ktorá je opísaná tetivovému štvoruholníku $KLMN$.



3.9 Korporátna Mestská Stabilita

opravoval **Jožo**

Zadanie. *V Nemecku je 2n miest, z ktorých sú niektoré dvojice spojené cestou (najviac jednou). Každá cesta je zafarbená práve jednou farbou: čiernou, červenou alebo žltou. Z každého mesta vychádzajú práve tri cesty, každá inej farby. V závislosti od celého čísla $n \geq 2$ nájdite najmenšie celé číslo k, pre ktoré možno v Nemecku zaviesť* ekonomickú rovnováhu *bez ohľadu na to, ako sú mestá pospájané cestami. To znamená:*

- *Každá cesta je vlastnená práve jedným z dvoch miest, ktoré spája.*
- *Ak mesto A vlastní cestu do mesta B, tak mesto B platí mestu A denne x eur, kde x je kladné celé číslo menšie ako k (nie nutne rovnaké pre každú cestu).*
- *Každé mesto denne zaplatí za prenájom ciest rovnako veľa, ako dostane od iných miest.*

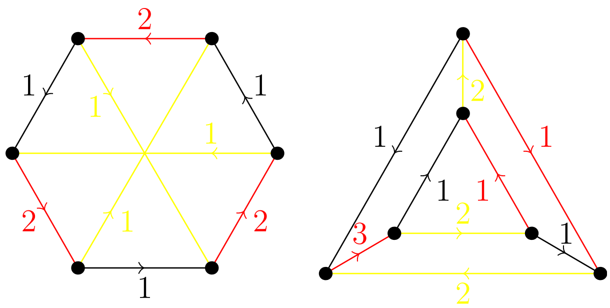
Úvod a obsah vzoráku

Na začiatok by sme sa chceli ospravedlniť za to, že zadanie tejto úlohy nebolo dobre sformulované, čo malo za následok, že ste ho pochopili rôzne, väčšina z vás inak, ako sme ho mysleli my. Takže na začiatok si ujasníme zadanie.

Pre lepšiu názornosť nazveme *ekonomickou rovnováhou stupňa k*, kde k je kladné celé číslo, stav v krajine, ktorý spĺňa tri podmienky ako sú v odrážkach v zadaní (teda mestá si platia navzájom v hodnotách $1, 2, \ldots, k-1$ a každé dostáva rovnako veľa ako platí). Chceli sme od vás nájsť pre dané celé číslo $n \geq 2$ najmenšie také celé číslo k, pre ktoré sa dá v Nemecku s $2n$ mestami zaviesť ekonomická rovnováha stupňa k *bez ohľadu na to, ako sú jeho mestá pospájané.*

To, že máte určiť k bez ohľadu na pospájanie miest, nebolo v zadní napísané, a tak, celkom pochopiteľne, ste si mnohí mysleli, že sa pýtame na najmenšie k, pre ktoré sa dá pri *nejakom* pospájaní miest Nemecka zaviesť ekonomická rovnováha stupňa k.

Pre lepšiu názornosť sa pozrieme na prípad, kedy $n = 3$, teda keď máme 6 miest. Mestá budeme znázorňovať ako body a cesty medzi nimi spojnicami. Ak cestu z mesta A do mesta B bude vlastniť mesto B, ktorému bude mesto A platiť denne x eur, tak to budeme na našich obrázkoch znázorňovať tak, že na spojnicu z mesta A do mesta B pridáme v tomto smere šípku a k nej napíšme číslo x. Na obrázku nižšie sú ilustrované dva spôsoby, ako môžu byť mestá poprepájané. V prvom prípade sme našli ekonomickú rovnováhu stupňa 3 a pre druhú krajinu stupňa 4. Podľa nami mysleného zadania je pre $n = 3$ hľadané najmenšie $k = 4$, podľa druhej interpretácie je to $k = 3$.



Vzhľadom na túto situáciu si ukážeme riešenie oboch častí. Tento vzorák teda obsahuje:

- Vzorák 1, v ktorom si ukážeme riešenie úlohy, ako sme ju mysleli my.
- Vzorák 2, v ktorom si ukážeme riešenie úlohy, ako ste ju pochopili mnohí z vás.
- Ukážeme si ešte ďalšiu interpretáciu zadania vo vzoráku 3.
- Na záver si povieme ešte niečo o zovšeobecneniach a zaujímavostiach ohľadom tejto úlohy.

Riešenie každej z týchto troch úloh je niečím poučné. Hlavne chceme dať do pozornosti posledný vzorák, nakoľko sa túto interpretáciu úlohy nepodarilo vyriešiť žiadnemu z dvoch riešiteľov.

Vzorák 1

Keď si skúsime úlohu vyriešiť pre malé hodnoty n, isto objavíme situácie, kde je potrebné $k \geq 4$. Ide napríklad o také poprepájanie miest, v ktorom je trojuholník, teda nejaké tri mestá A, B, C, z ktorých sú každé dve spojené cestou. V takejto krajine musí byť $k \geq 4$. Ak by išla nastoliť ekonomická rovnováha len s platením 1 a 2 eur, tak za niektorú cestu medzi mestami A, B, C by sa museli platiť 2 eurá, bez ujmy na všeobecnosti nech mesto A platí mestu B 2 eurá. Potom C musí platiť mestu A 1 euro a B musí platiť mestu C 1 euro. Dostávame tak, že mesto C dostáva 1 euro a platí 1 euro, teda tretia cesta túto rovnováhu musí porušiť (rozmyslite si to, celý tento dôkaz je len prebratie niekoľkých prípadov). Pre každé $n \geq 2$ vieme nájsť krajinu s takýmito tromi navzájom poprepájanými mestami, teda pre každé $n \geq 2$ určite platí $k \geq 4$.

Potrebujeme nájsť nejaký systém, ako nájsť pre ľubovoľné poprepájanie $2n$ miest ekonomickú rovnováhu. Začneme s tým, že máme mestá, ktoré sú ľubovoľne poprepájané cestami. Istá rovnováha je už medzi nimi aj teraz: každé mesto dostáva 0 eur a platí tiež 0 eur. Akurát sa žiadne peniaze v krajine nehýbu. Ekonomickú rovnováhu budeme hľadať tak, že budeme postupne rozhýbavať peniaze po cestách, pričom budeme zachovávať, aby každé mesto platilo rovnako veľa ako dostáva.

Pri tom nám pekne prídu vhod farebné cesty. Odmyslime si žlté cesty a pozrime sa len na čierne a červené cesty. Z každého mesta teda vychádzajú práve dve cesty. Ak sa z jedného mesta vyberieme po týchto cestách, tak stále máme kam pokračovať – jednou cestou prídeme a druhou odídeme. Raz sa však musíme vrátiť do mesta, v ktorom sme už boli, lebo miest je konečne veľa. Musíme sa vrátiť do mesta, kde sme začali. Totiž, to je jediné mesto, v ktorom sme boli a má ešte nepoužitú cestu. Budeme chodiť teda do kolečka po nejakých mestách. Takéto kolečko budeme nazývať *cyklus*. Tento červeno-čierny cyklus nemusí prechádzať cez všetky mestá. Ak to tak nie je, tak červeno-čierne cesty vytvárajú viacero cyklov.

Teraz zoberieme tieto červeno-čierne cykly a v každom cykle si mestá budú jedným smerom platiť 1 euro. Peniaze nám už začínajú prúdiť, ale stále sú ešte cesty (žlté), za ktoré ešte nikto neplatí. Preto zoberieme podobne červeno-žlté cykly a v každom z nich si budú mestá jedným smerom platiť 2 eurá. Peniaze sú už rozprúdené. Za čierne cesty sa platí 1 euro a za žlté 2 eurá. Pri červených cestách sa mieša platenie jedného a dvoch eur. Ak obe platby idú tomu istému mestu, tak je to rovnaké, ako by to mesto dostávalo 3 eurá. Ak mesto A platí mestu B 1 euro a mesto B mestu A 2 eurá, tak je to to isté, ako by mesto B platilo mestu A 1 euro.

Teda dostávame, že každá cesta je vlastnená nejakým mestom a že sa za ňu platia 1, 2 alebo 3 eurá. Z toho, ako sme tieto dane určovali, vyplýva, že každé mesto dostáva rovako veľa, ako aj platí. Teda sme našli ekonomickú rovnováhu stupňa 4. Keďže sme ukázali, že ekonomická rovnováha nižšieho stupňa ako 4 nejde zaviesť vždy, tak hľadané najmenšie k je rovné 4 pre každé celé $n \geq 2$.

Vzorák 2

V zadaní ešte nebolo úplne jasné, či medzi dvomi mestami môže viesť viac ako jedna cesta. Ako si môžete rozmyslieť, riešenie našej interpretácie úlohy to neovplyvňuje. No pri tejto interpretácii to môže riešenie výrazne zľahčiť. Preto budeme predpokladať, že medzi každými dvoma mestami vedie najviac jedna cesta. Ak máme 4 mestá, tak musí cesta viesť medzi každými dvomi mestami. Takéto prepojenie obsahuje trojuholník, a teda pre $n = 2$ musí byť $k \geq 4$. Ako sme ukázali v predchádzajúcom riešení, ekonomická rovnováha stupňa 4 ide v takejto krajine zavrieť.

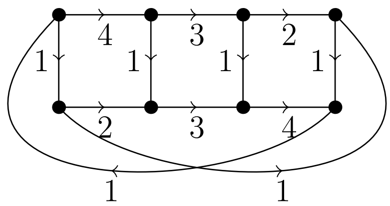
Čo sa týka $n \geq 3$, tak ekonomickú rovnováhu stupňa 2 nemožno zaviesť. Z troch jednoeurových daní totiž nevieme dostať pomocou sčítania a odčítania nulu. Vieme už však nájsť krajiny, v ktorých pôjde zaviesť ekonomická rovnováha stupňa 3. Poďme teda opísať, ako vyzerajú. Aby sa nám lepšie opisovali, označíme si mestá v krajine ako M_1, M_2, …, M_{2n}. Začneme tým, že si mestá budú do kruhu na striedačku posielať 1 a 2 eurá. Presnejšie, mesto M_{2i} bude vlastniť čiernu cestu z mesta M_{2i-1}, ktoré mu bude platiť denne 1 euro. Podobne, mesto M_{2i+1} bude vlastniť červenú cestu z mesta M_{2i}, ktoré mu bude platiť 2 eurá denne. V oboch prípadoch berieme i spomedzi čísel 1, 2, …, n a $M_{2n+1} = M_1$.

Takto má každé mesto s párnym číslom stratu 1 euro a každé mesto s nepárnym číslo zisk 1 euro. To napravíme tým, že tieto mestá pospájame žltými cestami. Potrebujeme však opísať, ako presne. Pre nepárne n majú pre každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ čísla i a $n + i$ rôzne parity, preto môžeme spojiť mestá M_i a M_{n+i} žltou cestou, za ktorú bude mesto s nepárnym číslom platiť 1 euro mestu s párnym číslom. Takto poprepájané mestá spĺňajú všetky podmienky zo zadania (z každého mesta vychádzajú tri cesty rôznych farieb) a zaviedli sme takto na nich ekonomickú rovnováhu stupňa 3.

Pre párne n ide tiež mestá popárovať, no opísať popárovanie je trošičku zložitejšie. Môžeme to napríklad spraviť takto: Pre $i \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ spojíme mesto M_i žltou cestou s mestom M_{n-i+1}. Okrem toho ešte spojíme žltými cestami mestá M_1 s M_n a M_{2n} s M_{n+1}. Čísla miest spojených žltou cestou majú vždy rôznu paritu, tak opäť mesto s nepárnym číslo bude platiť za túto cestu 1 euro. Takto sme opäť našli krajinu s ekonomickou rovnováhou stupňa 3.

Vzorák 3

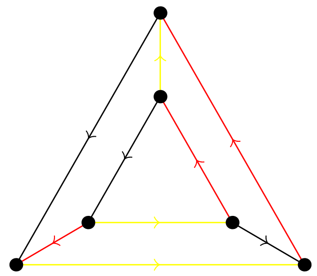
Dvaja riešitelia pochopilo úlohu ešte tak, že máme nájsť najmenšie celé k, pre ktoré ide zaviesť ekonomická rovnováha stupňa k pre každé poprepájanie $2n$ miest a taktiež aj pre každé rozdelenie toho, komu patria cesty. Musí však platiť, že každé mesto vlastní jednu alebo dve cesty, inak by ekonomická rovnováha triviálne zaviesť nešla. Naznačíme tu stručne jedno z riešení. Budeme predpokladať, že krajina súvislá, teda medzi každými dvoma mestami sa dá prepraviť po niekoľkých cestách.



Ukážeme, že najmenšie je $k = n + 1$. To je potrebné napr. v krajine ako na obrázku. Cesta, za ktorú sa tam platí 5 eur nemôže mať menšiu daň, nakoľko sa jej peniaze „musia rozdeliť" na daň piatich ďalších ciest. Zovšeobecnenie pre $2n$ miest ponechávame na vás.

Teraz ukážeme, že ekonomickú rovnováhu stupňa $n + 1$ možno vždy zaviesť. Predpokladajme, že tomu tak nie je. Zoberme si krajinu, ktorá to kazí, a nech k ($k > n + 1$) je najmenší stupeň ekonomickej rovnováhy, ktorú možno v nej zaviesť. Potom musí v tejto krajine existovať aspoň $k - 1$ ciest (teda aspoň $n + 1$), ktoré keď odstránime, tak budú existovať dve mestá také, že sa nevieme dostať z jedného do druhého chodením po cestách iba v rovnakom smere, ako po nich idú peniaze. To ale však nie je možné, ak máme len $2n$ miest. Dôkaz prenecháme vám. To tvrdenie naozaj platí, ale aj napriek tomu je takéto riešenie úlohy nesprávne. Zamyslite sa nad tým prečo. Chyba sa nachádza v samotnej štruktúre dôkazu, nie v nejakých detailoch.

Pokiaľ potrebujete pomoc, tak skúste nájsť ekonomickú rovnováhu v krajine na nasledujúcom obrázku.



Zjavne tu ekonomická rovnováha vôbec nejde zaviesť, nakoľko mestá z vnútorného trojuholníka iba platia zvyšným mestám krajiny a tieto peniaze sa nemajú ako vrátiť späť pôvodným mestám. Teda riešenie tejto verzie úlohy pre $n \geq 3$ je, že sa vo všeobecnosti ekonomická rovnováha nedá zaviesť, teda hľadané najmenšie k neexistuje. Nájsť príklady krajín pre $n \geq 4$ prenechávame vám.

Keď si berieme najmenšie číslo, pre ktoré niečo ide, tak si musíme dať pozor, či tá vec vôbec ide – aby sme nevyberali najmenšie číslo z prázdnej množiny. Vo väčšine takýchto optimalizačných úlohách je zjavné, že nejaké riešenie existuje. No, ekonomická rovnováha je celkom komplikovaný pojem a pri tejto úlohe to až tak jasné nebolo.

Zaujímavosti o úlohe a zovšeobecnenia

Vrátime sa k našej verzii úlohy a povieme si o nej niečo viac. Skúsení riešitelia si isto všimli, že situáciu v zadaní možno opísať pomocou *grafov*. V teórii grafov dokonca existuje aj pojem, ktorý opisuje „prúdenie peňazí" v grafe. Týmto pojmom je *tok*, ktorý priraďuje každej hrane číslo a orientáciu tak, aby pre každý vrchol grafu platilo, že súčet čísel na doňho vstupujúcich hranách je rovný súčtu čísel na vystupujúcich hranách. V samotnom toku môžu byť hranám priradené aj nuly. Pokiaľ je však každej hrane priradené nenulové číslo, hovoríme, že ide o *nikde nulový tok*. Ak navyše platí, že hranám sú priradené čísla z množiny $\{1, 2, \ldots, k - 1\}$, tak hovoríme, že ide o *nikde nulový k-tok* (angl. *nowhere-zero k-flow*). Takže v reči teórie grafov bola táto úloha o hľadaní nikde nulového k-toku.

Pojem *tok* možno poznáte aj v inej súvislosti, asi hlavne z informatiky. Aby sme boli presný, ide o *tok v sieti*. *Sieť* je graf, ktorý má dva význačné vrcholy *zdroj* a *stok* a každá hrana má maximálnu kapacitu. Tok v sieti je potom podobné priradenie čísel a orientácií hranám s tým, že rovnosť súčtov na vchádzajúcich a vychádzajúcich hranách nemusí platiť pre zdroj a stok. Typickým problémom je nájsť taký tok, ktorý prepraví čo najväčšiu hodnotu od zdroja k toku. Toky v sietiach majú veľké uplatnenie v praxi. No my sa tu zaoberáme tokmi v grafoch. Tie majú síce ďalej od praxe, no ide o krajšiu kombinatorickú vlastnosť grafov. Závisia totiž iba od grafu samotného a nie od dvoch vrcholov navyše a kapacít hrán (čo je celkom dosť informácií).

Pozrime sa na to, čo sa stane, ak niektorú z podmienok v zadaní vypustíme. Začnime s tým, že odstránime predpoklad o zafarbení ciest. Takto však dostaneme, že pre väčšinu n nikde nulový tok nemusí vôbec existovať. Príkladom takých grafov sú grafy s *mostom*, čo je hrana grafu, ktorú keď z neho odstránime, tak sa rozpadne na dva komponenty, medzi ktorými sa nedá po hranách dostať. Takže, aby to bolo zaujímavé, tak budeme uvažovať len grafy, ktoré nemajú most. Stále však ostaneme pri grafoch, v ktorých z každého vrchola vychádzajú práve tri hrany. Takéto grafy sa nazývajú skrátene *kubické*.

Z toho už dostávame dosť zaujímavú úlohu, hľadať najmenšie k, pre ktoré v kubickom grafe bez mostu existuje nikde nulový k-tok. Ukázali sme, že ak sa hrany kubického grafu dajú ofarbiť tromi farbami, tak obsahuje nikde nulový 4-tok. Táto implikácia platí aj naopak: v kubickom grafe s nikde nulovým 4-tokom sa dajú hrany ofarbiť tromi farbami tak, aby z každého vrchola vychádzali hrany rôznych farieb. Dôkaz vám prenechávame za cvičenie. Taktiež sa dá ľahko ukázať, kedy kubický bezmostový graf obsahuje nikde nulový 3-tok. Je to práve vtedy, keď je bipartitný, teda keď sa dajú jeho vrcholy rozdeliť na dve časti tak, že každá hrana spája vrcholy z rôznych častí. Tiež si toto tvrdenie môžete skúsiť dokázať.

Ako teda s kubickými grafmi bez mostov, ktorých hrany sa nedajú zafarbiť tromi farbami? O existencii takýchto grafov sa dlho ani nevedelo. Prvý takýto graf bol bol objavený v roku 1898 Júliusom Petersenom a nesie po ňom názov Petersenov graf. Jeho objavenie vyvrátilo vtedajší nesprávny dôkaz (vtedy ešte) hypotéze o štyroch farbách. Nájdete ho na obrázku spolu s nikde nulovým 5-tokom.

Dá sa v každom kubickom grafe bez mostu nájsť nikde nulový 5-tok? Žiaľ, na túto otázku nie je známa odpoveď, ide o otvorený problém. Podarilo sa ukázať, že každý kubický graf bez mostu obsahuje nikde nulový 6-tok, ale nie je známy žiaden kubický graf bez mostu, v ktorom by neexistoval 5-tok.

A čo sa stane, ak upustíme od toho, že máme kubický graf? Nič až tak zaujímavé. Ak každý kubický graf bez mostu má nikde nulový k-tok, tak nikde nulový k-tok má aj ľubovoľný graf bez mostu. Toto si tiež môžete dokázať sami. Stačí si daný graf vhodne prerobiť na kubický tak, aby ste tok z kubického grafu vedeli prerobiť na tok v pôvodnom grafe.

Teda vidíme, že tento otvorený problém sa týka všetkých grafov bez mostov a pýta sa, či každý taký graf má nikde nulový 5-tok. Prvý krát ho formuloval W. T. Tutte v roku 1954. Vidíme, že pri riešení tohto problému nám stačí uvažovať len kubické grafy. Tento otvorený problém sa radí medzi jedny z n

3.10 Kadejaké Mnohočleny Študujeme

opravoval **Marián**

Zadanie. *Maťko sa už chystá na prázdniny späť na Slovensko. Potrebuje si však zbaliť polynómy, ktoré študuje. Tie už ako vždy postrácal po svojom pracovisku. Pomôžte Maťkovi nájsť jeho polynómy. Nájdite všetky polynómy s reálnymi koeficientami $P(x)$, pre ktoré existuje polynóm s reálnymi koeficientami $Q(x)$ taký, že pre všetky prirodzené čísla n platí*

$$P(1) + P(2) + \cdots + P(n) = P(n)Q(n).$$

Najprv si podmienku zo zadania môžeme trochu upraviť tak, aby sme sa zbavili toho súčtu, a to tak, že odčítame od seba podmienku pre n a $n-1$. Potom dostaneme podmienku $P(n) = P(n)Q(n) - P(n-1)Q(n-1)$ pre všetky prirodzené čísla $n \geq 2$ a jednu podmienku pre $n = 1$: $P(1) = P(1)Q(1)$. Prenesením všetkého na jednu stranu dostaneme $P(n)Q(n) - P(n-1)Q(n-1) - P(n) = 0$. Vidíme, že náš systém rovníc v skutočnosti nie je nič iné, ako polynóm, ktorý má koreň v každom prirodzenom čísle, čiže má nekonečne veľa koreňov, a preto je identicky rovný nule. Nulu teda nedostaneme len pre celé čísla $n \geq 2$, ale aj pre každé reálne číslo x. Platí teda

$$P(x) = P(x)Q(x) - P(x-1)Q(x-1). \tag{1}$$

Teraz si môžeme všimnúť, že pre nenulový polynóm P môže stupeň polynómu Q byť rovný nanajvýš 1, a teda $Q(x) = ax + b$. Na to ideme sporom. Nech stupeň polynómu $Q(x)$ je aspoň 2. Stupeň polynómu $P(x)Q(x)$ sa rovná súčtu stupňov polynómov $P(x)$ a $Q(x)$, ak sú obidva nenulové. Pozrime sa na polynóm $P(x)Q(x) - P(x-1)Q(x-1)$. Označme stupeň polynómu $P(x)Q(x)$ ako s. Potom dva vedúce členy tohto polynómu sú $a_s x^s + a_{s-1}x^{s-1}$. Dosadením $x-1$ za x a orezaním na prvé dva členy dostaneme $a_s x^s + (a_{s-1} - s a_s)x^{s-1}$. Odčítaním dostaneme

$$(a_s x^s + a_{s-1}x^{s-1}) - (a_s x^s + (a_{s-1} - s a_s)x^{s-1}) = 0x^s + s a_s x^{s-1},$$

takže prvý člen sa vynuluje a druhý člen sa nevynuluje, pretože koeficient pri ňom je určite nenulový, nakoľko je s-násobkom a_s, ktoré je vedúci koeficient polynómu $P(x)Q(x)$, a teda sa nerovná 0. Teda polynóm $P(x)Q(x) - P(x-1)Q(x-1)$ má stupeň $s-1$. Ale z rovnosti (1) musí mať aj polynóm P stupeň $s-1$. No a to je spor s tým, že stupeň polynómu Q je aspoň 2, nakoľko vtedy by mal polynóm $P(x)Q(x)$ stupeň viac ako s.

Navyše, vedúci koeficient polynómu Q sa musí rovnať $1/(k+1)$, kde k je stupeň polynómu P. To dostaneme tak, že do našej rovnice dosadíme $Q(x) = ax+b$. Označme si b_k koeficient polynómu $P(x)$ pri člene x^k. Dostaneme $P(x)(ax+b-1) - P(x-1)(ax+b-a) = 0$. Pozrime sa na koeficient pri člene x^k. Pretože tento výsledný polynóm musí byť nulový, musí mať nulový aj tento koeficient. Z prvej zátvorky ho dokážeme jednoducho vyjadriť ako $ab_{k-1} + (b-1)b_k$. Druhú zátvorku už je roznásobiť trochu ťažšie, a najprv vyjadríme prvé dva členy polynómu $P(x-1)$ ako $b_k x^k + (b_{k-1} - kb_k)x^{k-1}$, a potom to prenásobíme druhou zátvorkou, a pri člene x^k dostaneme $(b-a)b_k + a(b_{k-1} - kb_k)$. Odčítaním týchto dvoch výrazov dostaneme

$$\begin{aligned}[ab_{k-1} + (b-1)b_k] - [(b-a)b_k + a(b_{k-1} - kb_k)] &= (b - 1 - b + a)b_k + ab_{k-1} - ab_{k-1} + akb_k = \\ &= (a - 1 + ak)b_k = b_k(a(1+k) - 1).\end{aligned}$$

Keďže $b_k \neq 0$, tak aby sa to rovnalo 0, musí platiť $a(1+k) = 1$, a teda $a = 1/(k+1)$.

Niektorí riešitelia tieto dve myšlienky dostali zo všeobecne známeho Faulhaberovho vzorca, ktorý hovorí, že súčet $\sum_{i=1}^{n} i^k$ je polynóm v premennej n stupňa $k+1$ s vedúcim koeficientom $1/(k+1)$. Tak sa vyhli dosť otravným výpočtom.

Dosadením $Q(x) = \frac{x+c}{k+1}$ do rovnice (1) dostaneme

$$P(x) = P(x)\frac{x+c}{k+1} - P(x-1)\frac{x+c-k-1}{k+1}.$$

Dosadením $x = 0$ a s využitím, že $P(1)Q(1) = P(1)$ dostaneme, že $0 = P(0)c$, a teda buď $P(0) = 0$ alebo $c = 0$. Nech $c = 0$. Potom dostaneme $(k+1)P(x) = xP(x) - (x-1)P(x-1)$. Z toho $(x-k-1)P(x) = (x-1)P(x-1)$. Ak $k = 0$, máme hneď riešenie: $P(x) = 1$; $Q(x) = x$. Ak $k > 0$, tak využijeme, že ľavá aj pravá strana musia mať rovnaké korene. Ľavá strana sa rovná nule pre $x = k+1$ a pravá strana sa rovná nule pre $x = 1 \neq k+1$. Z toho ale vyplýva, že polynóm $P(x)$ misí mať koreň $x = 1$. To ďalej znamená, že polynóm $P(x-1)$ má koreň $x = 2$, ktorý musí byť na ľavej strane koreňom polynómu $P(x)$. Podobne, $P(x-1)$ bude mať zas koreň v $x = 3$ až teda dostaneme, že polynóm $P(x)$ má korene v bodoch $1, 2, \ldots, k$. No a pretože $P(x)$ je polynóm stupňa k a poznáme k jeho koreňov, poznáme aj celý ten polynóm (až na prenásobenie konštantou). Dostali sme teda riešenia v tvare

$$P(x) = a(x-1)(x-2)\ldots(x-k); \qquad Q(x) = \frac{x}{k+1},$$

kde $a \neq 0$ je ľubovoľné reálne číslo.

Teraz sa pozrime na ten druhý prípad, a teda ten, že $P(0) = 0$. Prenásobme teda rovnicu konštantou $k+1$. Dostaneme $P(x)(k+1) = P(x)(x+c) - P(x-1)(x+c-1)$, po úprave $P(x)(x+c-k-1) = P(x-1)(x+c-1)$. Podobne ako v predchádzajúcom prípade dostaneme, že podľa hodnoty c musí našich k koreňov polynómu

$P(x)$ tvoriť aritmetickú postupnosť s diferenciou 1. Navyše, pretože 0 je jedným z našich koreňov, naše c musí byť také, aby 0 bola jedným z jej členov. To znamená, že c je prirodzené číslo rovné najviac k. Dostali teda riešenia tvaru

$$P(x) = a(x+c-1)(x+c-2)\dots(x+c-k); \qquad Q(x) = \frac{x+c}{k+1}.$$

Ak zoberieme za a ľubovoľné reálne číslo a za c prirodzené číslo rovné najviac k, tak nám tento zápis pokryje prvý prípad. Taktiež nám pokryje aj prípad $P(x) = 0$, ktorý sme doposiaľ ignorovali a zjavne vyhovuje.

Teraz nám už stačí dokázať, že tieto polynómy vyhovujú našim podmienkam. Dosadíme do nich teda náš polynóm, a dostaneme

$$P(x)Q(x) - P(x-1)Q(x-1) - P(x) =$$

$$= \frac{a}{k+1}[(x+c)(x+c-1)\dots(x+c-k) - (x+c-1)\dots(x+c-k)(x+c-k-1)] - a(x+c-1)(x+c-2)\dots(x+c-k).$$

Ako vidíme, môžeme veľa členov zo sčítancov vybrať pred zátvorku, v skutočnosti dokonca celé $P(x)$ a dostaneme namiesto toho

$$a(x+c-1)(x+c-2)\dots(x+c-k)\left[\frac{1}{k+1}(x+c-x-c+k+1) - 1\right] = P(x)(1-1) = 0.$$

Teda sme ukázali, že pre takéto polynómy P a Q platí rovnosť 1. Už len overíme, že platí $P(0)Q(0) = 0$ (to prenechávame na vás) a z týchto dvoch rovností vieme dostať pre každé prirodzené číslo n podmienku zo zadania.

Naše vyhovujúce polynómy sú teda $P(x) = a(x+c-1)(x+c-2)\dots(x+c-k)$, kde c je z množiny $\{0, 1, \dots, k\}$ a a je ľubovoľné reálne číslo.