Korešpondenčný matematický seminár
XL. ročník, 2018/2019
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Riešenia 1. kola letnej časti

1.1 Kombinácie Merchu Skladujeme ($\kappa \leq 1$) opravoval **Janko**

Zadanie. *Je niekoľko KMS, FKS a KSP tričiek v šiestich krabiciach. Počet KMS tričiek v ľubovoľnej krabici je rovný počtu FKS tričiek vo zvyšných piatich krabiciach dohromady. Podobne, počet FKS tričiek v ľubovoľnej krabici je rovný súčtu KSP tričiek vo zvyšných piatich krabiciach dohromady. Ukážte, že celkový počet tričiek je násobkom* 31.

Kedže budeme veľa používať počty tričiek v krabiciach, označme si počet KMS tričiek M (ako matematické), počet FKS tričiek F (ako fyzikálne) a počet KSP tričiek P (ako programátorske). Označme si aj počty tričiek v krabiciach dolným indexom, napríklad počet KMS tričiek v tretej krabici bude M_3. Pri tomto označení platí $M = M_1 + \cdots + M_6$, $F = F_1 + \cdots + F_6$, $P = P_1 + \cdots + P_6$.

Keďže počet FKS tričiek v ľubovoľnej krabici je rovný počtu KSP tričiek vo zvyšných piatich krabiciach dohromady, musí pre i-tu krabicu platiť:

$$F_i = P - P_i.$$

Pričom $P - P_i$ značí počet KSP tričiek mimo i-tej krabice. Keď sčítame tieto rovnosti postupne pre $i = 1, \ldots, 6$, dostaneme:

$$F = 6P - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - P_5 - P_6 = 6P - P = 5P.$$

Niečo podobné platí aj pre KMS a FKS tričká:

$$M_i = F - F_i.$$

Opäť sčítame pre $i = 1 \ldots 6$ a dostaneme:

$$M = 6F - F = 5F.$$

Lenže my už vieme, že $F = 5P$, teda

$$M = 5F = 5 \cdot 5P.$$

Celkový počet tričiek je teda:

$$M + F + P = 25P + 5P + P = 31P.$$

Teda všetkých tričiek je 31-krát viac ako KSP tričiek, je to teda násobkom 31.

1.2 Kamaráti Mince Strážia ($\kappa \leq 2$) opravoval **Slavo**

Zadanie. *V trojsten stánku na Náboji sa vyzbieral nepárny počet mincí na pokrytie výrobných nákladov. Keďže decká na Náboji počítajú, tak Slavo a Miro nemajú čo robiť. Vysypali teda mince na stôl, pričom niektoré zostali otočené hlavou hore a iné znakom hore. V každom ťahu otočili toľko mincí, koľký je to práve ťah, teda v prvom jednu mincu, v druhom dve atď. Ukážte, že je možné otáčať mince tak, aby v jednom momente boli mince otočené tou istou stranou, bez ohľadu na to, ako boli pootáčané na začiatku.*

Ako prísť na riešenie

Pozrime sa na mince na stole. Pre jednoduchšie vyjadrovanie sa si označme mince otočené hlavou nahor písmenom H, mince otočené znakom nahor písmenom Z. V k-tom ťahu zmeníme písmenko k minciam, naším cieľom je dosiahnuť stav, že majú všetky mince rovnaké písmeno.

Všimnime si, že nezáleží na poradí mincí na stole, zaujímavé sú len počty H a Z. Povedzme, že je viac mincí otočených hlavou hore (to vieme povedať bez ujmy na všeobecnosti – ak by neboli, vymeňme si označenia H a Z). Pokúsme sa docieliť, nech sú na konci všetky mince otočené hlavou hore. Ak máme spolu $2n+1$ mincí, stačí nám otočiť nanajvýš n mincí.

Skúsme mince otáčať úplne priamočiaro. V prvom kole otočme 1 mincu zo Z na H, v druhom kole otočme 2 mince zo Z na H, … Keď budeme takto pokračovať, dôjdeme do stavu, keď už v k-tom kole budeme mať menej ako k mincí otočených znakom hore. V tomto momente pokračovaním v priamočiarom otáčaní sa nám počet znakov môže dokonca zvyšovať. Čo teraz? Treba to nejak opraviť.

Všimnime si, že ak sa nám to v jednom ťahu pri otáčaní k mincí pokazí, tak v nasledujúcom ťahu pri otáčaní $k+1$ mincí môžeme tých k mincí otočených v predchádzajúcom kole dostať do pôvodného stavu a okrem nich otočiť jednu mincu.

Ak toto spravíme, pomocou dvoch po sebe idúcich kôl otočení vieme otočiť práve jednu (ľubovoľnú) mincu. Tým pádom, ak sme v k-tom kole a ostalo nám l mincí Z na stole ($l<k$), pomocou ťahov k a $k+1$ otočíme jednu z daných mincí, pomocou ťahov $k+2$ a $k+3$ otočíme druhú z daných mincí, … poslednú (l-tú) mincu otočíme v ťahoch $k+2(l-1)$ a $k+2l-1$. Už to takmer máme hotové. K úplnosti riešenia treba ešte ukázať, že sa nám nestane, že by sme v nejakom ťahu mali otočiť viac mincí ako je na stole. To by nastalo, keby $k+2l-1>2n+1$. Ako na to? Číslo l ide odhadnúť pomocou k vďaka $l<k$, taktiež k ide odhadnúť pomocou n ako $k\sim\binom{n}{2}$ (rozmyslite si), avšak takýmto výpočtom sa vieme vyhnúť. Celkovo máme $2n+1$ otočení, potrebujeme otočiť nanajvýš n mincí. Ak budeme už od začiatku párovať po sebe idúce kolá otočení, stačí nám vykonať nanajvýš n párov otočení, t. j. vieme po nanajvýš $2n$ kolách dosiahnuť rovnaké symboly.

Stručné riešenie

Vzorové riešenie napísané vyššie obsahuje intuíciu, ako prísť na riešenie. To vo vašom riešení písať nemusíte, na zisk plného počtu bodov stačí iba dôkaz, prečo to tak je. Osnova stručného riešenia môže vyzerať nasledovne:

Popárujme si kolá otáčania mincí, v pároch majme spolu kolá $2k-1$ a $2k$. Ak v týchto kolách otočíme mince nasledovne (…), tak po danom páre kôl otočení vieme dosiahnuť otočenú práve jednu (ľubovoľnú) mincu. Keďže celkovo nám stačí otočiť nanajvýš n mincí, lebo (…), otočenie všetkých mincí na rovnakú stranu vieme docieliť po nanajvýš n pároch otočení, t. j. v nanajvýš $2n$-tom kole. Teda nenastane prípad, že by sme mali otočiť viac mincí, ako je na stole.

1.3 Kúpili Mi Šatky! ($\kappa \leq 3$)

opravovali **Kika** a **Marek**

Zadanie. *Tomáš triedil trojsten bufky, keď si všimol, že dodávateľ na každú zo* 100 *bufiek dopísal identifikačné číselko od* 1 *do* 100*. Každá trojsten bufka dostala iné číslo. Avšak niektorých k bufiek už bolo predaných a tieto Tomáš nenašiel. Je možné bez ohľadu na to, ktoré bufky boli predané, vybrať zo zvyšných nepredaných bufiek k takých, že súčet ich číselok je* 100*, ak (a) $k=9$? (b) $k=8$?*

(a) $k=9$: Aby sme ukázali, že to nie je možné, stačí nájsť jeden prípad, pre ktorý tvrdenie neplatí. Zvoľme za vybrané čísla hneď prvých deväť čísel množiny $\{1,2,3,\dots,100\}$.

Teda môžeme vyberať z čísel $\{10,11,12,\dots,100\}$. Ak sčítame deväť najmenších čísel z tejto množiny, ich súčet bude väčší ako 100. Ak by sme ktorékoľvek z nich nahradili iným (väčším) číslom, ich súčet bude ešte väčší. Tým pádom sme našli prípad, pre ktorý tvrdenie neplatí. Po predaní 9 buffiek sa teda môže stať, že už nevieme vybrať ďalších 9 so súčtom 100.

(b) $k = 8$: Chceme vybrať osem čísel, tak aby ich súčet bol 100. Nad úlohou môžeme uvažovať aj ako nad výberom štyroch dvojíc čísel, ktoré keď všetky sčítame, tak máme 100. Hľadajme dvojice čísel, ktorých súčet je 1/4 zo 100, teda 25. Takýchto dvojíc je medzi číslami od 1 po 100 až 12 a sú to tieto:

$$\{1, 24\}, \{2, 23\}, \{3, 22\}, \{4, 21\}, \{5, 20\}, \{6, 19\}, \{7, 18\}, \{8, 17\}, \{9, 16\}, \{10, 15\}, \{11, 14\}, \{12, 13\}.$$

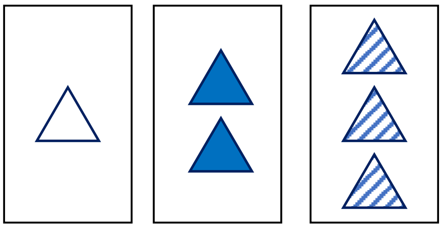
Keďže máme k dispozícii dvanásť dvojíc a žiadne číslo sa nenachádza vo viacerých dvojiciach, aj po odstránení ktorýchkoľvek osem čísel $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ nám ešte zostanú minimálne štyri dvojice čísel, ktorých súčet je 25 a teda ich celkový súčet bude 100. To dokazuje, že po predaní 8 buffiek vieme stále vybrať 8 buffiek, ktorých súčet čísel je 100.

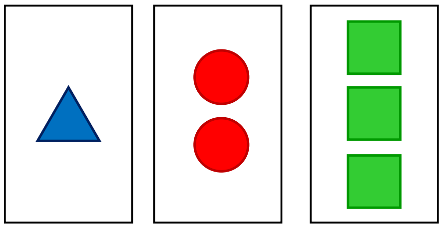
1.4 Kodaňský Matematický Šarlatán ($\kappa \leq 5$)

opravovali **Ľubo** a **Kubo**

Zadanie. *Keď sa Kika vrátila z Dánska, tak vyprávala nasledujúcu príhodu: „V Kodani som narazila na šarlatána Mariána. Na stole mal kartovú hru Sety a chcel ma obabrať. Ja som ho však zaskočila otázkou: Koľko je platných setov, ktoré sa skladajú iba z modrých kariet.“ Aká je odpoveď na Kikinu otázku? (Ale neprezraďte to Mariánovi!)*

Sety sú kartová hra. Každá setová karta má 4 vlastnosti: farbu, tvar, počet a výplň. Každá z týchto vlastností môže na karte nadobúdať tri stavy. Napríklad karta môže mať modrú, červenú alebo zelenú farbu. Príklady kariet môžete vidieť na obrázku. Balík obsahuje všetky rôzne kombinácie týchto vlastností, každú práve raz. Setom nazývame v hre takú trojicu kariet, že pre danú vlastnosť sú všetky stavy na kartách buď rovnaké, alebo rôzne. Napríklad jeden modrý prázdny trojuholník, 2 modré plné trojuholníky a 3 modré šrafované trojuholníky tvoria set (trojica na obrázku vľavo). Trojica kariet vpravo tiež tvorí set.





Na začiatok bude dobré si uvedomiť, koľko rôznych kariet vlastne obsahuje setový balíček. Keďže každá karta má práve 4 vlastností a každá táto vlastnosť môže nadobúdať tri rôzne stavy, tak celkový počet rôznych kariet vieme vypočítať ako 3^4=81.

Teda vieme, že celkový počet setových kariet je 81. Nás však viac zaujíma, koľko je medzi nimi modrých kariet a koľko rôznych setov z nich vieme vytvoriť. Keďže máme tri rôzne farby, modrých kariet bude presne tretina z celkového počtu, čiže 27.

Teraz už len potrebujeme zistiť, koľko rôznych setov vieme z týchto 27 rôznych kariet vytvoriť. Predstavme si, že si vyberieme z týchto 27 kariet ľubovoľné dve. O týchto dvoch kartách vieme, že majú rovnakú farbu (modrú). Každú zo zvyšných troch vlastností (tvar, počet, výplň) môžu mať buď spoločnú, alebo rozdielnu.

Pozrime sa teraz na nejakú konkrétnu vlastnosť týchto dvoch kariet, napríklad tvar. Máme dve možnosti:

1. Tieto dve karty majú rovnaký tvar. Aký tvar by teraz mala mať tretia karta, ktorá s nimi tvorí set? Keď sa nad tým zamyslíme, zistíme, že tiež ten istý (teda napríklad ak pôvodné dve karty boli štvorcové, aj tá tretia musí byť štvorcová, inak by netvorili set).

2. Tieto dve karty majú rozdielny tvar. Aký tvar by teraz mala mať tretia karta, ktorá s nimi tvorí set? Keď sa znova zamyslíme, zistíme, že táto tretia karta nemôže mať rovnaký tvar ako niektorá z pôvodných dvoch, inak by predsa netvorili set. To znamená, že táto karta bude mať ten tretí, nepoužitý tvar (teda napríklad ak prvá karta bola štvorcová a druhá trojuholníková, tak tá tretia musí byť určite kruhová).

Môžeme si všimnúť, že či už ide o prvú, alebo o druhú možnosť, tak pôvodné dve vybrané karty nám jednoznačne určujú tvar tej tretej karty. Pri zvyšných dvoch vlastnostiach (počet, výplň) môžeme uvažovať úplne rovnako. Preto aj počet znakov a výplň tejto tretej karty sú určené pôvodnými dvoma kartami jednoznačne. Keďže sú ale jednoznačne určené všetky vlastnosti tejto karty, aj karta samotná je určená jednoznačne.

Vieme už, že keď vyberieme ľubovoľné dve karty z daných 27 modrých, vieme k nim vybrať práve jednu tretiu tak, aby sme vytvorili set. Koľkými spôsobmi vieme vybrať ľubovoľné 2 karty z 27? To nám presne vyjadruje kombinačné číslo $\binom{27}{2}$=351 (Ak si sa s kombinačnými číslami ešte nestretol, odporúčame doštudovať).

Teraz si už stačí len uvedomiť, že každému setu zodpovedajú tri rôzne výbery 2 kariet. (Majme napríklad set pozostávajúci z kariet A, B a C. Tomuto setu zodpovedajú výbery: AB, AC a BC.)

Aby sme dostali celkový počet modrých setov, musíme ešte číslo 351 predeliť tromi, čím dostaneme finálny počet modrých setov 117.

Správna odpoveď na Kikinu otázku je 117.

1.5 Kikino Módne Šialenstvo ($\kappa \leq 8$)

opravovali **Aňa** a **Marcel**

Zadanie. *Kika si kúpila poncho v tvare lichobežníka. Na lichobežníku $ABCD$ so základňami AB a CD ležia na uhlopriečkach AC a BD po rade body P, Q tak, že platí $|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle BQC|$. Ukažte, že platí $|\sphericalangle AQD| = |\sphericalangle BPC|$.*

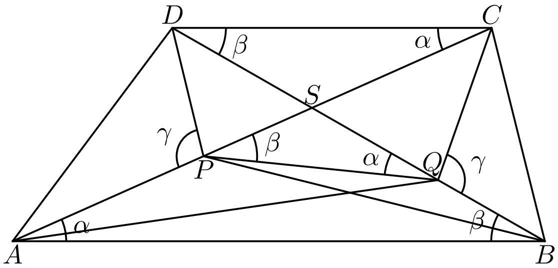
Skúsme sa na začiatok úlohy odraziť od toho, čo vieme. Zo zadania platí: $|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle BQC|$. Vieme tiež ľahko odvodiť, že $|\sphericalangle DPC| = |\sphericalangle DQC|$, keďže ide o susedné uhly s uhlami zo zadania.

Keď sa pozrieme na trojuholníky DPC a DQC, zistíme, že majú rovnakú základňu DC a aj rovnakú veľkosť uhla oproti základni, teda pri vrcholoch P a Q. Mali by sme spozornieť a uvedomiť si, čo nám to napovedá. Konkrétne to, že bodom P, Q, C, D vieme opísať kružnicu a tieto dva uhly sú jej obvodovými uhlami (prislúchajúce základni DC).

Štvoruholníku $PQCD$ sme vedeli opísať kružnicu a teda je tetivový. Nezabudnime, že pre tetivový štvoruholník platí, že súčet jeho protiľahlých uhlov je 180°. Keďže základne lichobežníka AB a DC sú rovnobežné, vieme, že vďaka striedavosti uhlov platí $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACD|$. Rovnako platí $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle BDC|$.

Z toho, že štvoruholník $PQCD$ je tetivový vieme, že $|\sphericalangle PQD| = |\sphericalangle ACD|$.

Teraz ukážeme, že aj štvoruholník $ABQP$ je tetivový. Chceli by sme, aby platilo $|\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle BQP| = 180°$. $|\sphericalangle BQP|$ môžeme vyjadriť pomocou jeho susedného uhla PQD ako $180° - |\sphericalangle PQD|$. Veľkosť $|\sphericalangle PQD|$ a $|\sphericalangle ACD|$ je rovnaká, tiež vďaka striedavým uhlom, vieme že $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle ACD|$ a teda $|\sphericalangle BQP| = 180° - |\sphericalangle PAB|$. Dokázali sme, že protiľahlé uhly v štvoruholníku $ABQP$ majú súčet 180°, čiže ide o tetivový štvoruholník. Z toho vyplýva, že vieme bodom A, B, P, Q opísať kružnicu.



Trojuholníky ABP a ABQ majú rovnakú základňu AB a rovnakú veľkosť uhlov pri vrcholoch P a Q, keďže ide o obvodové uhly. Keďže majú rovnakú veľkosť, tak majú rovnakú veľkosť aj ich susedné uhly BPC a AQD, čo bolo treba dokázať.

1.6 Kopu Mikín Separujeme

opravovali **Bea** a **Dominik**

Zadanie. *Marek má prebytok UFO mikín, tak si zavolal Kubka a začali sa s nimi hrať. Na začiatku majú na kôpke 360 UFO mikín. Marek rozdelí mikiny na päť neprázdnych kôpok. Potom si Kubko zvolí tri kôpky. Ak celkový počet mikín na kôpkach, ktoré si Kubko vybral, je deliteľný celkovým počtom mikín na zvyšných dvoch kôpkach, tak Marek vyhrá, inak vyhrá Kubko. Kto má víťaznú stratégiu?*[1]

Na začiatok je dobré zamyslieť sa, či stratégiu jedného z hráčov vieme overiť jednoduchšie. Je dôležité uvedomiť si matematické znenie úlohy a sformulovať, čo chceme dokázať. V našom prípade by táto časť mohla vyzerať takto:

1. Ak by sme overovali Kubovu stratégiu, pýtame sa, či vieme nájsť trojicu sčítancov, ktorá nie je deliteľná súčtom zvyšných dvoch. Toto treba overiť pre ľubovoľné pätice prirodzených čísel, ktorých súčet je 360. Pre tých z vás, ktorí preferujú formálny zápis: $u, v, x, y, z \in \mathbb{N} : (u+v+x)/(y+z) \in \mathbb{N}, u+v+x+y+z = 360$.

2. V prípade, ak chceme overiť Marekovu stratégiu úloha znie takto: Hľadáme aspoň jednu päticu prirodzených čísel, ktorých súčet je 360 a platí, že súčet ľubovoľných dvoch sčítancov je deliteľom súčtu zvyšných troch.

Vidíme, že v prípade Marekovej stratégie je potrebné nájsť len jednu päticu čísel, pre ktoré niečo platí. To vyzerá ako jednoduchšia úloha :). Poďme ju skúsiť vyriešiť.

Pozrime sa na čísla n, ktoré sú deliteľmi čísla 360 a sú väčšie alebo rovné ako 5. Mikiny rozdelíme do n rovnako veľkých skupín. Tieto skupiny následne premiestnime na 5 kôp. Potom sa pozrieme na to, koľko skupín je na jednotlivých kopách. Ak je na ľubovoľných troch kopách počet skupín deliteľný počtom skupín na zvyšných dvoch, bude to platiť aj pre samotné mikiny. Dobre, a čo sme si týmto pomohli?

Teraz už vieme, kde začať. Vezmime $n = 5$. Máme 5 skupín po 72 mikín. Keďže kopy nemôžu byť prázdne, každá skupina tvorí jednu kopu. Môžeme si ale ľahko uvedomiť, že nami uvedená podmienka tu neplatí, pretože $72 + 72$ nedelí $72 + 72 + 72$.

Skúsme teda $n = 6$. Vytvorili sme 6 skupín po 60 mikín. Máme však len jednu možnosť, ako tieto skupiny rozdeliť do kôp. Na jednej z kôp budú dve skupiny (120 mikín) a na zvyšných kopách jedna (60 mikín). Overíme, či nami zadaná podmienka platí.

Ak Kubo vyberie kopu so 120 mikinami, tak na ním vybraných kopách bude spolu $120 + 60 + 60 = 240$ mikín. Kubo bude ale smutný, pretože na zvyšných kopách zostane 120 mikín a teda prehrá :(. Ak si Kubo nevyberie kopu so 120 mikinami, na jeho kopách bude $60 + 60 + 60 = 180$ mikín. Na zvyšných dvoch kopách tak zostane 180 mikín, čo zase poteší Mareka, pretože Marek rád vyhráva. V oboch prípadoch teda Marek zvíťazí, čo znamená, že má výhernú stratégiu.

Komentár

Ako môžeme vidieť, nie za každou úlohou sú skryté komplikované matematické výpočty. Podobný typ úloh sa dá po správnej úvahe jednoducho odhadnúť. Za riešenie považujeme aj uvedenie konkrétnej výhernej stratégie (teda predchádzajúce dva odseky), v tomto prípade nie je potrebné uvádzať celý myšlienkový postup.

[1] Hráč má víťaznú stratégiu, ak si vie svojimi ťahmi zaručiť výhru bez ohľadu na to, ako hrá jeho súper.

1.7 Kľukatého Máme Štrkáča

opravoval **Tomáš**

Zadanie. *Účastníci spravili na sústredení hada z ponožiek. Správny účastník v ňom vidí lomenú čiaru v rovine. Had pozostáva z 38 úsečiek (žiadne dve susedné úsečky nezvierajú priamy uhol). Žiadne dve nesusedné úsečky nemajú spoločný bod. Keď predĺžime každú úsečku na priamku, koľko najmenej rôznych priamok môže vzniknúť? (Ak by sa mali dve úsečky predĺžiť na tú istú priamku, tak ju započítame iba raz.)*

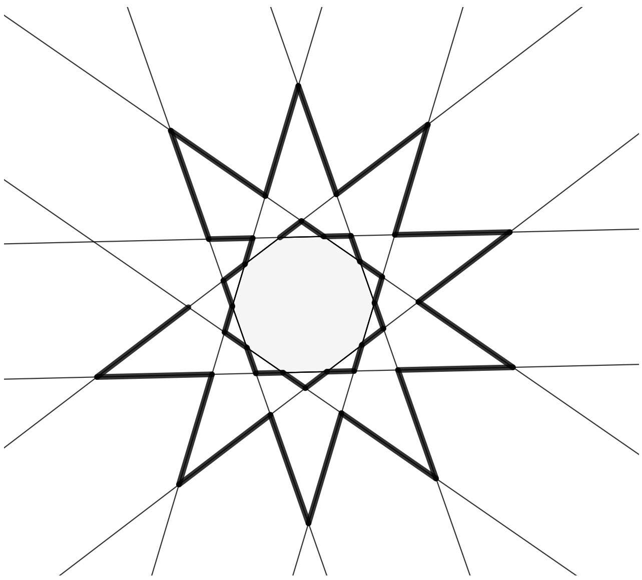
Medzi 38 úsečkami máme 37 bodov, v ktorých sa lomená čiara láme. Dve susedné úsečky ležia na rôznych priamkach, teda zlom medzi nimi je zároveň priesečník dvoch priamok. Keď máme n priamok, pretínajú sa v najviac $\binom{n}{2}$ bodoch (lebo každá dvojica priamok má najviac jeden priesečník a symbol $\binom{n}{2}$ hovorí presne, koľko dvojíc priamok máme). Týchto priesečníkov musí byť aspoň toľko, koľko hadových zlomov, takže $\binom{n}{2} \geq 37$.

Čím máme viac priamok, tým viac priesečníkov je medzi nimi, teda čím je väčšie n, tým je väčšie aj $\binom{n}{2}$. Pre $n = 9$ máme najviac $\binom{9}{2} = 36$ priesečníkov, čo je málo, potrebujeme aspoň 37. Pre $n = 10$ máme $\binom{10}{2} = 45$ priesečníkov, čo vyzerá, že by už mohlo stačiť.

Už vieme, že priamok bolo aspoň 10 a ukážeme, že to mohlo byť presne toľko. Tým pádom bude 10 hľadané minimum.

Takže chceme nakresliť hada, ktorý celý leží na 10 priamkach. Môžeme si to predstaviť aj tak, že dáme najskôr do roviny 10 priamok, vzniknú nám nejaké priesečníky a úsečky medzi nimi. Potom chceme nakresliť čiaru, ktorá ide po týchto úsečkách.

Ako by sme mohli rozumne umiestniť priamky? Aby sme sa v tom dobre vyznali a aby obrázok vyzeral prehľadne, asi by bolo dobré, keby je to rozmiestnenie čo najviac symetrické. Tiež potrebujeme mať veľa priesečníkov. Taký pekný symetrický útvar je pravidelný 10-uholník. Keď jeho strany predĺžime, dostaneme 10 priamok. Potom už nie je ťažké nakresliť štrkáča dĺžky 38, napríklad tak ako na obrázku dole.



1.8 Kamaráti Miro Slavomír

opravovali **Juro** a **Gianetta**

Zadanie. *Keďže Slavo, Miro vyriešili hlavolam s mincami príliš rýchlo a deti ešte počítali tak si našli novú zábavku. Miro povedal Slavovi množinu svojích $n \geq 2$ navzájom rôznych obľúbených kladných celých čísel. Slavo potom napísal najväčšieho spoločného deliteľa a najmenší spoločný násobok každej dvojice Mirových čísel na papier. V závislosti od celého čísla $n \geq 2$ určte, koľko najmenej mohlo byť na papieri rôznych čísel.*

Základná veta v úlohách s NSN (najmenší spoločný násobok) a NSD (najväčší spoločný deliteľ) ktorá sa využíva je indukcia a identita

$$ab = \mathrm{NSD}(a, b)\,\mathrm{NSN}(a, b).$$

Ukážeme, že výsledok je n, teda že na konci na papieri bude určite aspoň n rôznych čísel. Ako prvé si ukážeme konštrukciu: Ak sú Slavove obľúbené čísla 2^0, 2^1, 2^2, …, 2^{n-1}, potom na papieri budú napísané práve čísla 2^0, 2^1, 2^2, …, 2^{n-1} a žiadne iné, pretože NSD aj NSN mocnín dvojky menších ako 2^n je mocnina dvojky menšia ako 2^n, a teda je na tabuli. [2]

Dôkaz, že ich je aspoň n je o niečo zložitejší – treba si po prvé prečítať správne zadanie a všimnúť si, že Slavove čísla nie sú na začiatku na tabuli napísané a teda nie je zjavné že ich musí byť aspoň n. Ako budeme dokazovať, že to nejde na menej ako n? Ak v príklade vidíme vetu „dokážte pre prirodzené n, že...“, tak automaticky použijeme indukciu. Pre $n = 2$ to zjavne platí. Predpokladáme, že pre $k = 2, \ldots, n-1$ platí, že ak je Slavova množina veľkosti k, potom na konci na papieri bude aspoň k čísel. Ďalej to dokážeme pre $k = n$.

Označme si Slavove čísla x_1, …, x_n. O čo sa budeme snažiť – chceme rozdeliť túto množinu čísel na dve menšie množiny, na ktoré budeme môcť použiť indukčný predpoklad a vrámci prvej množiny bude mať každá dvojica rozdielne NSD aj NSN oproti všetkým NSD a NSN vrámci druhej množiny.

Vezmime si prvočíslo p, ktoré delí aspoň dve Slavove čísla. Také číslo musí existovať, pretože ak by neexistovalo znamenalo by to že všetky čísla sú nesúdeliteľné a teda čísla $\mathrm{NSN}(x_1, x_2)$, $\mathrm{NSN}(x_1, x_3)$, …, $\mathrm{NSN}(x_1, x_n)$ sú rôzne a spolu s číslom 1 bude na papieri aspoň n čísel. Nech toto prvočíslo p delí práve m Slavových čísel, kde určite $2 \leq m \leq n$.

Týmto sa nám všetky Slavove čísla rozdelili na dve množiny – tie, ktoré sú deliteľné prvočíslom p a na tie, ktoré nie sú deliteľné číslom p. Teraz príde hlavná myšlienka: tieto dve skupiny majú rozdielne všetky NSN a NSD – ak spravíme NSN alebo NSD ľubovoľnej dvojice v jednej skupine, tak bude iné ako NSN či NSD ľubovoľnej dvojice v druhej skupine, pretože v prvej bude NSN aj NSD deliteľné prvočíslom p a v druhej nie. Takže použijeme indukčný predpoklad. Prvá skupina „vyrobí“ na papier aspoň m čísel a druhá aspoň $n - m$ čísel. Všetky sú vďaka tejto rozdielnosti NSN a NSD rôzne, teda ich spolu bude aspoň n. Jediný problém môže nastať, ak jedno z čísel m, $n - m$ nie je v množine indukčného predpokladu, čo nastane iba ak $m = n$ alebo $m = n - 1$. Toto sú ale ľahké možnosti. Ak $m = n$ potom všetky čísla sú deliteľné číslom p. Teda môžeme vyňať p, opakovať celý postup a vyjde nám to isté. Na druhej strane, ak $m = n - 1$, to znamená, že práve jedno číslo (označme si ho x_k) nie je deliteľné p. Tu ale taktiež môžeme použiť indukčný predpoklad, $n - 1$ čísel bude mať aspoň $n - 1$ rozdielnych NSD, NSN a k nim pridáme $\mathrm{NSD}(x_k, x_1)$ ktoré ako jediné nie je deliteľné číslom p a teda so všetkými rozdielne. Teda spolu je na papieri aspoň n rôznych čísel.

1.9 KMS Má SWAG!

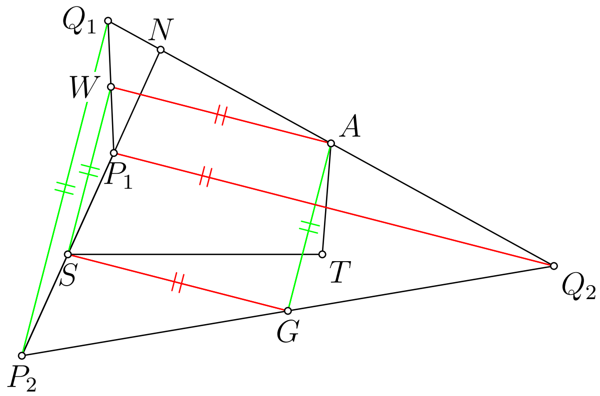
opravoval **Jožo**

Zadanie. *Na Stanovačke KMS je potrebný KMS STAN. Ide o tetivový štvoruholník STAN. Na polpriamkach SN a AN sa nachádzajú postupne body P_1, Q_1 a na polpriamkach opačných k polpriamkam SN a AN sa nachádzajú postupne body P_2, Q_2. Pre tieto body platí $|SP_1| = |SP_2| = |AT|$ a $|AQ_1| = |AQ_2| = |ST|$. Stredy úsečiek P_1Q_1 a P_2Q_2 označíme postupne W a G. Čím je tento KMS STAN výnimočný? Predsa má SWAG! Dokonca, SWAG je obdĺžnik, dokážte to!*

Môžeme si všimnúť, že v úlohe vystupuje dosť stredov: S, W, A, G sú postupne stredy úsečiek P_2P_1, P_1Q_1, Q_1Q_2, Q_2P_2. Preto nám prídu vhod stredné priečky. V trojuholníku $P_1P_2Q_1$ máme strednú priečku SW, a preto je rovnobežná s úsečkou P_2Q_1. Podobne, z trojuholníka $Q_2P_2Q_1$ dostaneme, že stredná priečka AG je

[2] Samozrejme nemusia to byť akurát mocniny 2, môžu to byť mocniny ľubovoľného čísla. Navyše, nemusia to byť nutne ani mocniny – stačí aby každé číslo delilo to nasledujúce.

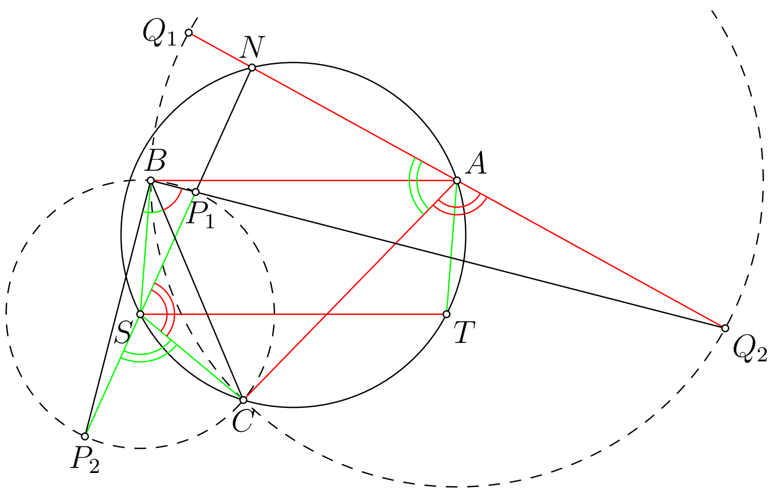
rovnobežná so stranou P_2Q_1. Máme teda tri rovnobežky: SW, AG a P_2Q_1. Podobným spôsobom dostaneme tiež rovnobežky WA, GS, P_1Q_2. Z toho vyplýva, že $SWAG$ je rovnobežník. Aby sme ukázali, že to je obdĺžnik, stačí nám ukázať, že priamky P_2Q_1 a P_1Q_2 sú na seba kolmé.



V zadaní máme veľa rovnakých dĺžok. Dobre sa s nimi pracuje, keď sú pokope. Zvoľme teda bod B tak, aby $STAB$ bol rovnobežník. Ďalej, obraz bodu T v osovej súmernosti podľa osi strany SA označme C. Zjavne bod C leží na kružnici opísanej tetivovému štvoruholníku $STAN$. Dostali sme tak pekne pri sebe rovnaké dĺžky $|SP_1| = |SP_2| = |SB| = |SC|$ a $|AQ_1| = |AQ_2| = |AB| = |AC|$. Inými slovami, body P_1, P_2, B, C ležia na kružnici k so stredom v S a body Q_1, Q_2, B, C na kružnici l so stredom v A. Tieto kružnice sú tálesovými nad priemermi P_1P_2 a Q_1Q_2.

Poďme zistiť veľkosť uhla P_2BQ_2. Označme si $|\sphericalangle NSC| = 2\alpha$. Z tetivového štvoruholníka $SCAN$ máme $|\sphericalangle CAN| = 180° - 2\alpha$. Zas zo susedných uhlov máme $|\sphericalangle P_2SC| = 180° - 2\alpha$ a $|\sphericalangle CAQ_2| = 2\alpha$. S využitím stredového a obvodového uhla v kružniciach k a l dostaneme $|\sphericalangle P_2BC| = |\sphericalangle P_2SC|/2 = 90° - \alpha$ a $|\sphericalangle Q_2BC| = \alpha$. Dostávame tak, že $|\sphericalangle P_2BQ_2| = |\sphericalangle P_2BC| + |\sphericalangle Q_2BC| = 90°$. Body P_1 a Q_2 ležia na kolmici na úsečku P_2B v bode B, preto body P_1, Q_2 a B ležia na jednej priamke. Podobne na jednej priamke ležia aj body P_2, Q_1, B. Ako sme ukázali, tieto priamky zvierajú pravý uhol, čo dokazuje, že $SWAG$ je obdĺžnik.

Ešte si na záver rozmyslime, že naše riešenie funguje pre každú konfiguráciu. Body, ktoré využívame totiž ležia vždy v správnej polohe.



Komentár

Ukázať, že priamky P_1Q_2 a P_2Q_1 sú na seba kolmé bolo možné mnoho ďalšími spôsobmi, s využitím iných uhlov. Pri niektorých si stačilo dokresliť len jeden z bodov B, C. Avšak pri mnohých spôsoboch si bolo treba dať pozor na konfigurácie bodov. Napr. rovnosť $|\sphericalangle P_2BQ_2| = |\sphericalangle P_2BS| + |\sphericalangle SBA| + |\sphericalangle ABQ_2|$ neplatí pri každej konfigurácii bodov. Niekedy sa v nej zmenia niektoré znamienka plus na mínus.

Ukážeme ešte jedno riešenie, ktoré využíva špirálovú podobnosť a jej vlastnosti. Môžete si o nej prečítať od strany 22 v seriáli PraSe Geometrická zobrazení.

Iné riešenie

Uvažujme špirálovú podobnosť so stredom v bode C, ktorá zobrazuje úsečku Q_2Q_1 na P_1P_2. Vieme, že jej stred C leží na druhom priesečníku kružníc opísaných trojuholníkom NP_1Q_2 a NP_2Q_1. Táto špirálová podobnosť zobrazuje aj bod A (stred Q_2Q_1) na bod S (stred P_1P_2). Preto jej stred C leží aj na kružnici opísanej trojuholníku SAN. Z koeficientov tejto špirálovej podobnosti dostaneme $|CA| : |CS| = |Q_2A| : |P_1S| = |AC| : |SC| = |ST| : |AT|$. Keď to spojíme s rovnosťou obvodových uhlov $|\sphericalangle SCA| = |\sphericalangle STA|$, tak dostaneme, že trojuholníky SCA a ATS sú podobné. Keďže majú spoločnú stranu AS, tak sú aj zhodné. Z toho dostávame, že C je totožný s bodom C z predchádzajúceho riešenie, teda leží na oboch tálesových kružniciach nad priemermi P_1P_2 a Q_1Q_2.

Keďže špirálová podobnosť chodí po dvoch, C je aj stred špirálovej podobnosti, ktorá zobrazuje úsečku P_1Q_2 na P_2Q_1. Jej uhol otočenia je $|\sphericalangle P_1CP_2| = 90°$. Preto sú úsečku P_1Q_2 a P_2Q_1 tiež na seba kolmé.

1.10 Kľoby Mi Smrdia

opravoval **Miro**

Zadanie. *Jožko má 31 párov ponožiek, ktoré mu vystačia na celý mesiac. Na každú ponožku si chce napísať kladné celé číslo. Na ľavé ponožky čísla ℓ_1, ℓ_2, …, ℓ_{31} a na pravé ponožky čísla p_1, p_2, …, p_{31}. Pre tieto čísla musí platiť*

- $1 \le \ell_1 < \ell_2 < \cdots < \ell_{31} \le 4247$,
- $1 \le p_1 < p_2 < \cdots < p_{31} \le 4247$,
- $\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_{31} = p_1 + p_2 + \cdots + p_{31}$.

Nájdite najväčšiu možnú hodnotu výrazu

$$|\ell_1 - p_1| + |\ell_2 - p_2| + \cdots + |\ell_{31} - p_{31}|.$$

Majme čísla, ktoré vyhovujú zadaniu. Nech I je taká množina indexov, pre ktorú platí $\ell_i \ge p_i$, a nech J je množina zvyšných indexov. Na začiatok si trochu upravme rovnosť v tretej podmienke zo zadania do zaujímavejšieho tvaru

$$\sum_{i\in I} \ell_i - p_i = \sum_{j\in J} p_j - \ell_j,$$

čiže naľavo sčítavame cez všetky dvojice, kde platí $\ell_i \ge p_i$, napravo cez zvyšné dvojice. Hľadané maximum bude následne súčet oboch strán rovnosti

$$S = \sum_{i\in I} \ell_i - p_i + \sum_{j\in J} p_j - \ell_j = \sum_{i=1}^{31} |\ell_i - p_i|.$$

Tento výraz chceme odhadnúť zhora. Všimnime si, že sumy majú rovnakú hodnotu, takže S sa nezmení keď ich rôzne naváhujeme a vhodne celý výraz predelíme. Nech k je veľkosť množiny I. Naváhujme to nasledovne

$$\frac{31}{2}S = (31-k)\sum_{i\in I}(\ell_i - p_i) + k\sum_{j\in J}(p_j - \ell_j).$$

Keď si predstavíme vynásobenie k ako sčítanie každého člena sumy k-krát, tak obe sumy majú rovnaký počet členov a vieme to zapísať ako jednu sumu nasledovne

$$\frac{31}{2}S = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}(\ell_i - p_i + p_j - \ell_j).$$

No a poďme konečne odhadovať! Pre $i > j$ máme $p_i > p_j$ a platí

$$\begin{aligned} \ell_i &\le 4247 - (31-i), \\ -p_i + p_j &\le -i + j, \\ -\ell_j &\le -j, \end{aligned}$$

analogicky pre $i < j$ máme $\ell_i < \ell_j$ a odhady budú rovnaké, len vymeníme ℓ a p, preto

$$\frac{31}{2}S = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}(\ell_i - p_i + p_j - \ell_j) \le \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\big([4247-(31-i)] + (j-i) - j\big) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}4216 = 4216k(31-k),$$

$$S \le 272k(31-k).$$

Už len nájsť maximum kvadratickej funkcie. Vyjde $k = 31/2$ a teda nás zaujíma $k = 15, 16$. Vtedy $S = 65\,280$.

Pre $i \le 16$: $l_i = i$, pre $j > 16$: $l_j = 4247 - (31-j)$ a pre $p_k = 2040 + k$ sa maximum naozaj nadobúda a tieto čisla zároveň vyhovujú zadaniu, teda maximálna hodnota je 65 280.