Korešpondenčný matematický seminár
XL. ročník, 2018/2019
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Riešenia 2. kola letnej časti

2.1 Keď Malička Som ($\kappa \le 1$) opravovala **Veronika**

Zadanie. *Jerry má malé nohy, preto si kúpila 13-míľové lodičky, ktorými vie robiť kroky dlhé práve 13 míľ. Postavila sa do mrežového bodu nekonečnej štvorčekovej siete, v ktorej jeden štvorček má stranu dlhú 1 míľu. Kráča však iba po mrežových bodoch. Zistite, či sa takto vie dostať na ľubovoľný mrežový bod na štvorčekovej sieti. Ak áno, ukážte ako, ak nie, dokážte prečo.*

Nech Jerry stojí v bode $[0,0]$. Jerry sa vie pohybovať hore, dolu, doprava a doľava. Napríklad sa Jerry vie dostať z bodu $[0,0]$ na body: $[0,13],[0,-13],[13,0],[-13,0]$. Môže sa Jerry pohybovať aj „šikmo"? Kráčať po mrežových bodoch znamená pohybovať sa po celých číslach. Ak sa Jerry pohne „šikmo" o 13 míľ, vytvorí tak preponu pravouhlého trojuholníka so stranami 5 míľ a 12 míľ (je takýto trojuholník jediný?). Jerry sa takto vie dostať z bodu $[0,0]$ na body:

$$[12,5],\ [5,12],\ [-5,12],\ [-12,5],\ [12,-5],\ [-5,-12],\ [5,-12],\ [12,-5].$$

Keď sa Jerry podarí dostať sa na vedľajší bod ako stojí, tak sa potom vie dostať na ľubovoľný bod štvorčekovej siete. Poďme to ukázať. Jerry spraví postupnosť krokov: $[0,0] \to [12,5] \to [-1,5] \to [11,0] \to [6,12] \to [1,0]$ Riešení je niekoľko, ja som si vybrala jedno na 5 krokov (je to najkratší počet krokov?). Jerry sa podarilo dostať z bodu $[0,0]$ na vedľajší bod $[1,0]$. Štvorčeková sieť je symetrická, a teda obdobným spôsobom sa Jerry môže dostať aj na body: $[0,1],[-1,0],[0,-1]$ (aká by bola postupnosť krokov pre bod $[0,-1]$?).

2.2 Komplikovanú Máme Stránku ($\kappa \le 2$) opravovali **Kika** a **Marek**

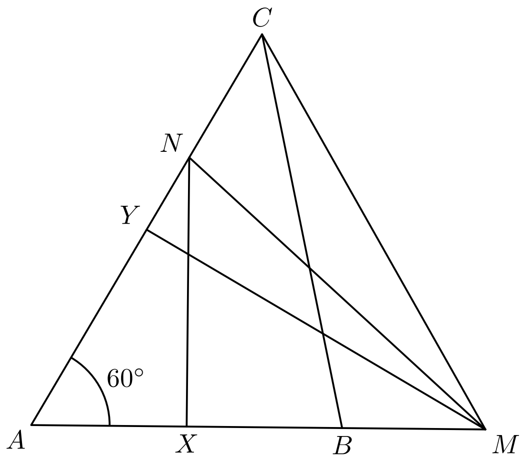
Zadanie. *Kubko sa registruje na internetovú stránku. Aby dokázal, že nie je robot, musí nájsť úsečky rovnakej dĺžky.*

V trojuholníku ABC platí $|\sphericalangle BAC| = 60°$. Nech N je priesečník priamky AC a osi strany AB a nech M je priesečník priamky AB a osi strany AC. Dokážte, že $|CB| = |MN|$.

Na to aby sme dokázali, že $|CB| = |MN|$, môžeme napríklad dokázať, že trojuholníky ANM a ABC sú zhodné. Ľahko si hneď všimneme, že v uhle pri vrchole A sa zhodujú, pretože to je ten istý uhol. Tak a teraz to už bude trošku zložitejšie, ale poďme na to!

Úsečka a jej os sú na seba kolmé. Ak si označíme priesečník osi strany AB a strany AB ako X, tak $|\sphericalangle AXN| = 90°$. V trojuholníku AXN vieme dopočítať tretí uhol ako $|\sphericalangle ANX| = 180° - 90° - 60° = 30°$. Teraz sa pozrime na trojuholníky AXN a BXN. Stranu XN majú spoločnú. Body X a N ležia na osi strany AB, a teda sú od bodov A a B rovnako vzdialené, z čoho vieme, že $|AX| = |XB|$ a $|AN| = |NB|$. Trojuholníky AXN a BXN sú zhodné, pretože sa zhodujú v troch stranách. Potom $|\sphericalangle ABN| = 60°$ a $|\sphericalangle XNB| = 30°$. Môžeme si všimnúť, že veľkosť uhla ANB je tiež $60°$, pretože $|\sphericalangle ANB| = |\sphericalangle ANX| + |\sphericalangle XNB| = 30° + 30° = 60°$. Trojuholník ANB je rovnostranný, teda aj $|AB| = |AN|$. Obdobné úvahy môžeme spraviť pre trojuholník AMC, ktorý je tiež rovnostranný a $|AC| = |AM|$.

Pre trojuholníky ANM a ABC platí, že $|AB| = |AN|$, $|AC| = |AM|$ a $|\sphericalangle NAM| = |\sphericalangle BAC|$. Sú zhodné podľa vety *sus*. Zhodujú sa aj dĺžky zvyšných zodpovedajúcich strán, teda $|CB| = |MN|$.



2.3 Kričiace Mimozemské Stvorenia ($\kappa \leq 3$)

opravovali **Jerry** a **Ľubo**

Zadanie. *V kruhu je* 100 *zelených mimozemšťanov, každý z nich má* 100 *tabletov. V rámci jedného ťahu ľubovoľný mimozemšťan zoberie niekoľko svojich tabletov a rozdelí ich medzi ostatných mimozemšťanov (nie nutne rovnomerne a nie nutne medzi všetkých). Po akom najmenšom počte ťahov vedia mimozemšťania docieliť, aby žiadni dvaja z nich nemali rovnaký počet tabletov?*

Na začiatok si potrebujeme uvedomiť toto: Ak na konci máme n mimozemšťanov, ktorí majú menej ako 100 tabletov, museli ich darovať. Keďže tablety sa dajú "stratiť" iba počas ťahu daného mimozemšťana vieme, že počet ťahov musel byť aspoň n.

Pozrime sa, koľko najviac tabletov môže týchto n mimozemšťanov stratiť a koľko minimálne musí zvyšných $100 - n$ mimozemšťanov prijať.

Vezmime od našich n mimozemšťanov čo najviac tabletov. Najlepšie by pre nás bolo od každého zobrať 100 tabletov, ale keďže na konci chceme mať jedinečné počty, zoberieme od nich postupne $100, 99, 98, \cdots, 100-(n-1)$ tabletov. Všimnime si, že súčet tabletov, ktoré dal prvý a posledný mimozemšťan z našich n mimozemšťanov je rovnaký ako súčet tabletov, ktoré dali druhý a predposledný mimozemšťania z našich n mimozemšťanov, atď. Ľahko si teraz spočítame, že celkový počet darovaných tabletov je:

$$\frac{(100 + 100 - (n-1)) \cdot n}{2} = \frac{(201-n) \cdot n}{2}.$$

Použili sme vlastne súčet členov aritmerickej postupnosti.

Skúsme sa teraz zamyslieť nad tým, koľko tabletov musí zvyšných $100 - n$ mimozemšťanov dostať, aby mali každý tiež jedinečný počet. Budeme mať teda zvyšných mimozemšťanov, ktorým sme darovali postupne $0, 1, 2, \cdots, 100 - n - 1$. Celkový počet tabletov, ktorý musia dostať si vieme spočítať analogicky ako v predchádzajúcej časti a vyjadriť nasledovne:

$$\frac{(0 + 99 - n) \cdot (100 - n)}{2} = \frac{(99-n) \cdot (100-n)}{2}.$$

Uvedomme si, že musí platiť, že počet tabletov, ktoré môže $100 - n$ mimozemšťanov dostať, musí byť určite menší alebo rovný počtu tých, ktoré môže n mimozemšťanov darovať. Riešme preto nasledujúcu nerovnicu:

$$\frac{(201-n) \cdot n}{2} \geq \frac{(99-n) \cdot (100-n)}{2}.$$

To si vieme prepísať ako:

$$n^2 - 200n + 4950 \leq 0.$$

Či už budeme skúšať dosadzovať hodnoty alebo použijeme vzorec na výpočet koreňov kvadratickej rovnice zistíme, že $n = 28$ je ešte málo, ale $n = 29$ nám už stačí. Ukážme si, že to naozaj ide – 28 mimozemšťanov daruje postupne 100, 99, .. 73 tabletov, všetci ich darujú 29. mimozemšťanovi. Po 28 ťahoch má on veľa tabletov, ktoré rozdelí medzi ostatných tak, že im daruje postupne 0, 1, ... 70 tabletov a všetci budú mať rôzny počet.

Zistili sme, že najmenší počet ťahov je 29.

2.4 Ktoré Máme Strany? ($\kappa \leq 4$) opravoval **Adam**

Zadanie. *Bea si vytlačila v KMS-ku skriptá, ktoré majú* 2003 *strán s číslami* $1, 2, \ldots, 2003$. *Skriptá však nedávajú zmysel, preto si musí z nich vybrať tie správne strany.*

Nájdite najväčšiu takú množinu A, ktorá je podmnožinou množiny $\{1, 2, \ldots, 2003\}$ *a neexistujú dva prvky a, b množiny A, pre ktoré je číslo* $a + b$ *deliteľné číslom* $a - b$.

Začnime v malom. Môže hľadaná množina obsahovať dve po sebe idúce čísla? Keby mohla, ich rozdiel by bol 1. Problém je, že 1 delí všetky prirodzené čísla, a teda bude určite deliť aj ich súčet, preto žiadne dve po sebe idúce čísla v hľadanej množine nebudú.

Poďme ďalej – môže hľadaná množina obsahovať dve čísla s rozdielom 2? Keby áno, ich súčet by nesmel byť deliteľný dvomi. Lenže dve čísla s rozdielom 2 sú buď obe párne, alebo obe nepárne. Keď ich sčítame, výsledok bude vždy párny. Takže nie, ani dve čísla s rozdielom 2 v hľadanej množine nebudú.

Ďalšia rečnícka otázka asi nikoho neprekvapí – môže hľadaná množina obsahovať dve čísla s rozdielom 3? Rozoberme si tak ako doteraz ich deliteľnosti. Ak by boli tieto čísla deliteľné tromi, aj ich súčet by bol deliteľný tromi a delil by ho potom aj ich rozdiel (ktorý je rovný 3). Vyskúšajme zvyšok po delení trojkou rovný 1, teda čísla $3k + 1$ a $3k + 4$. Ich súčet bude $6k + 5$, čiže nebude deliteľný tromi. Hurá, našli sme konečne nejaké čísla, ktoré môžu byť v hľadanej množine!

V prvých dvoch odsekoch sme zistili, že najlepšie, čo vieme dosiahnuť, je množina obsahujúca každé tretie číslo z pôvodnej množiny. Každé tretie číslo znamená, že ostanú čísla vo forme $3k$, $3k + 1$ alebo $3k + 2$. V treťom odseku sme zahodili možnosť $3k$ a v možnosti $3k + 1$ sme zistili, že po sebe nasledujúce dvojice čísel fungujú. Vedeli by ale fungovať všetky? Poďme to zistiť – keď odčítame čísla $3k + 1$ a $3l + 1$ ich rozdiel bude deliteľný tromi (zvyšky 1 po delení tromi sa navzájom zrušia). Ich súčet bude $3(k + l) + 2$, preto určite nebude deliteľný tromi, teda ani ich rozdielom. Podmnožina pôvodnej množiny obsahujúca čísla $3k + 1$ bude preto celá vyhovovať podmienke zo zadania (rovnako viete ukázať, že bude fungovať aj podmnožina s číslami $3k+2$). Ľahko si už teraz dopočítame koľko prvkov má táto podmnožina. Je to počet všetkých prirodzených čísel zo zvyškom po delení tromi rovným 1. Tých je 668 a to je aj maximum, ktoré sa dá dosiahnuť.

2.5 Komunikujeme Medzi Sebou ($\kappa \leq 7$) opravoval **Dominik**

Zadanie. *Vedúci Trojstenu používajú na komunikáciu tri rôzne sociálne siete: Facebook, Google Hangouts a Slack. Každá sociálna sieť funguje nasledovne. Každý vedúci má na nej niekoľko priateľov. Priateľstvá sú vzájomné. Profil každého vedúceho má nejakú farbu, nemusí byť rovnaká na všetkých sociálnych sietiach. Pre farby profilov platí, že profily vedúcich, ktorí sú priateľmi, musia mať rôznu farbu. Ďalej vieme, že na Facebooku stačí vedúcim* 42 *farieb, na Hangouts* 47 *farieb a na Slacku* 17 *farieb.*

Keďže vedúci majú chaos v sociálnych sieťach, založili si vlastnú sieť – Perfektne Organizovaný Komunikačný Elektronický Chat (skrátene POKEC). Každý vedúci tam má za priateľov svojich priateľov zo všetkých troch pô-

vodných sietí. Na POKEC-i platia rovnaké pravidlá pre farby profilov. Dokážte, že profilom vedúcich na POKEC-i stačí 33 558 *farieb, a to bez ohľadu na to, koľko je vedúcich a ako sa na jednotlivých sieťach priatelia.*

Pri riešení úloh, ako je táto je dôležité uvedomiť si, že nezáleží, koľko vedúcich má rovnakú farbu na ktorej sieti, aké farby používame, ani na tom, že ich niektorí toľko ani nerozoznáme. Potrebujeme len ukázať, že pre zadaný počet farieb (v našom prípade 33 558) a dané pravidlá ich rozdeľovania určite dostaneme správny výsledok.

Začali by sme jednoduchým pozorovaním. Číslo 33 558 môže vyzerať náhodne, ale ako to už býva, náhodné nie je. Platí totiž $33\,558 = 42 \cdot 47 \cdot 17$. Tieto činitele sú počtami farieb využívaných na pôvodných sieťach.

Na základe pozorovania dostávame myšlienku, ktorá by mohla viesť naše riešenie – ak by sme každej trojici farieb pridelili jednu farbu na POKEC-i, potom by na POKEC-i bolo práve 33 558 farieb. To nám však na kompletné riešenie nestačí. Nápad je to dobrý, ale ešte potrebujeme ukázať, že takéto priradenie farieb spĺňa pravidlá zo zadania.

Ak sú dvaja vedúci priatelia na POKEC-i (a teda majú na POKEC-i rôznu farbu profilu), museli byť priateľmi na niektorej z pôvodných sietí, z čoho však vyplýva, že museli mať aspoň jednu z trojice farieb rôznu. Avšak pre dve rôzne trojice pôvodných farieb máme rôznu farbu na POKEC-i, a teda pravidlá sú zachované.

Ak dvaja vedúci nie sú priateľmi na POKEC-i (a teda na ňom majú rovnakú farbu profilu), nemohli byť priateľmi ani na žiadnej z pôvodných sietí. Teda mohli mať na každej z nich priradenú rovnakú farbu. Z toho ale vyplýva, že celá trojica ich farieb bola rovnaká, a teda aj na POKEC-i budú mať podľa nášho systému rovnakú farbu profilu. Žiadne farby navyše takto nevzniknú a pravidlá sú zachované.

Keďže nás iný typ vzťahov medzi vedúcimi pri riešení tejto úlohy nezaujíma a pre všetky dôležité typy vzťahov sú pravidlá pri 33 558 farbách zachované, riešenie je kompletné.

2.6 Keď Meškajú Spoje

opravovali **Marián** a **Gianetta**

Zadanie. *Aňa nestíha, taxi zavolala tak si. Z dispečingu jej povedali, že bude čakať* $n \cdot 2^{n+1} + 1$ *minút. Ale Aňa môže čakať len štvorcový čas. Ktoré časy sú pre Aňu vhodné?*

Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré je číslo $n \cdot 2^{n+1} + 1$ *druhou mocninou celého čísla.*

Najprv si dokážeme pomocné tvrdenie: Pre všetky celé čísla $p \geq 3$ platí

$$p + 2 < 2^p.$$

Dôkaz urobíme matematickou indukciou podľa p. Pre $p = 3$ to platí. Nech to platí pre nejaké p. Potom

$$(p + 1) + 2 < 2^p + 2 < 2 \cdot 2^p = 2^{p+1}.$$

Riešenie samotnej úlohy: Hľadáme také kladné celé číslo n, že existuje celé číslo a tak, aby platilo

$$n \cdot 2^{n+1} + 1 = a^2.$$

Zrejme $n = 1$, $n = 2$ nevyhovuje. Pre $n = 3$ dostaneme $a = 7$. Dokážeme, že úloha žiadne ďalšie riešenie nemá. Nech existujú celé čísla a, n ktoré vyhovujú úlohe. Nech $n \geq 4$. Zrejme a je nepárne, teda $a = 2k + 1$, k je celé číslo. Po dosadení do rovnice máme

$$n \cdot 2^{n+1} = a^2 - 1 = 4k^2 + 4k.$$

Po úprave

$$n \cdot 2^{n-1} = k^2 + k = (k+1)k.$$

Z čísel k a $k+1$ môže byť párne iba jedno. Nech je párne k, nech $k = q \cdot 2^p$, pričom p, q sú celé čísla, q je nepárne. Potom

$$n \cdot 2^{n-1} = q \cdot 2^p \cdot (q \cdot 2^p + 1).$$

Na ľavej strane rovnice je aspoň $n-1$ krát číslo 2 (ak je n párne, tak aj viac), na pravej presne p krát.To znamená, že $n - 1 \leq p$. Potom

$$n \cdot 2^{n-1} \leq (p+1) \cdot 2^p < 2^p \cdot 2^p < q \cdot 2^p \cdot (q \cdot 2^p + 1),$$

čo je spor (použili sme pomocné tvrdenie).

Nech je $k + 1 = q \cdot 2^p$, kde q je nepárne. Potom podobne ako v prvom prípade

$$n \cdot 2^{n-1} \leq (p+1) \cdot 2^p < (2^p - 1) \cdot 2^p < q \cdot 2^p \cdot (q \cdot 2^p - 1),$$

čo je opäť spor. Preto je jediným riešením úlohy $n = 3$.

Úloha nebola príliš ťažká, len si bolo treba uvedomiť, čo chceme aby platilo a ako to dostať.

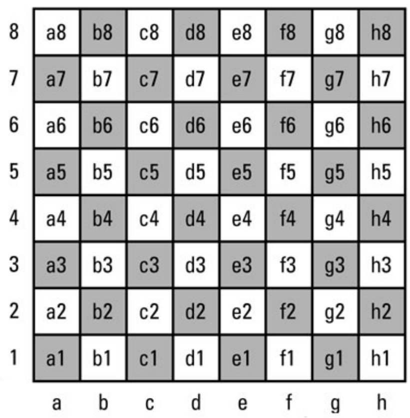
2.7 Krásne Múdre Slečny

opravoval **Juro**

Zadanie. *Keď Slavo v úlohe 8 našiel telku, skúsil ju spustiť. Na programe Jedinečné Obrazové Juchuchú (JOJ) premietajú novú reality šou, Zámená dám. Prebieha na šachovnici* 8×8. *Na začiatku sú v prvom rade dámy v bielych KMS tričkách a v ôsmom rade sú dámy v modrých kms tričkách. Následne sa dámy hýbu v ťahoch (ako šachové dámy), v každom ťahu sa pohne práve jedna dáma, farby tričiek hýbajúcich sa dám sa striedajú. Aký je minimálny počet ťahov, po ktorom budú v prvom rade všetky dámy s modrými a v ôsmom rade všetky dámy s bielymi KMS tričkami?*

Riešenie je 23. Každé správne riešenie má obsahovať konštrukciu na 23, no a dôkaz, že to nejde na menej.

Dôkaz že to nejde na menej: Ako prvé vyriešme iba dámy v rohoch. Je jasné, že na menej ako 4 ťahy nevieme tieto dámy umiestniť na druhú stranu – každá dáma sa predsa musí aspoň raz pohnúť. Taktiež tieto dámy nejdú vymeniť iba na 4 ťahy, pretože niektorá z nich sa musí pohnúť ako prvá, no ale v tejto fáze nemôže prísť až na druhú stranu šachovnice – jediné dve miesta, kam by mohla dôjsť, sú predsa zabrané. Na 5 ťahov to už ale ide – označme si políčka šachovnice ako na obrázku. Potom stačí pohnúť dámami takto: $A1 \mapsto B2$, $A8 \mapsto A1$, $H1 \mapsto A8$, $H8 \mapsto H1$, $B2 \mapsto H8$.



Teraz si popárujme zvyšné dámy – spravme dvojice dám tak, že jedna dvojica bude oproti sebe (dámy sú inej farby). Hlavná myšlienka je táto: tieto dve dámy potrebujú spolu určite aspoň tri ťahy aby sa dostali na cielenú druhú stranu. Prečo? Jedna z nich sa musí pohnúť ako prvá, no ale jediné miesto kam sa vie dostať na druhej strane jedným ťahom je práve to miesto, kde stojí tá druhá dáma. Inak povedané, jedna z nich sa musí uhnúť tej druhej, ale nemôže sa posunúť až na druhú stranu šachovnice. Teda aspoň jeden krok spravia navyše.

Keď si to spočítame, štyri rohové dámy spravia aspoň 5 ťahov, zvyšných 6 dvojíc každá spraví aspoň tri ťahy, spolu $5 + 6 \cdot 3 = 23$.

Konštrukcia na 23: rohové dámy posunieme ako sme opisovali pred tým. Štvoricu dám oproti sebe presunúť síce nejde, lebo by sa musela jedna farba pohnúť dva krát po sebe. Po chvíľke hrania sa zistíme, že to ale spraviť nasledovne:

$B8 \mapsto F4$, $B1 \mapsto B8$, $C8 \mapsto G4$, $C1 \mapsto C8$, $D8 \mapsto B6$, $D1 \mapsto D8$.

$G4 \mapsto D1$, $G1 \mapsto C5$, $F4 \mapsto C1$, $F1 \mapsto B5$, $G8 \mapsto G1$, $E1 \mapsto G3$,

$E8 \mapsto E1$, $B5 \mapsto E8$, $B6 \mapsto B1$, $G3 \mapsto G8$, $F8 \mapsto F1$, $C5 \mapsto F8$.

Pekne to graficky znázornil účastník *Lukáš Gáborik* na tomto odkaze.

2.8 Konzervovaný Mokrý Spotrebič

opravoval **Ákos**

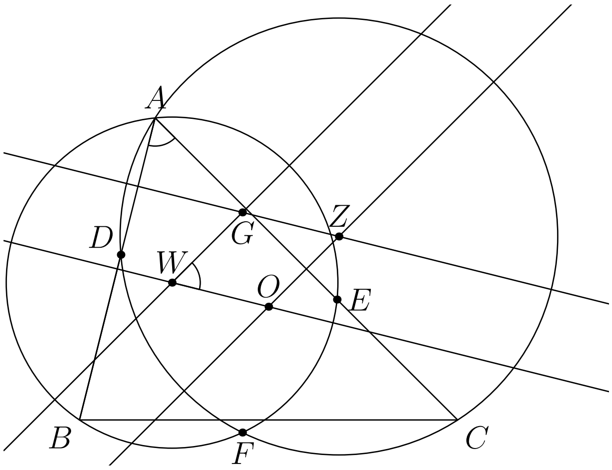
Zadanie. *Slavo našiel v potoku starý televízor zapadnutý prachom. Všimol si, že do prachu na obrazovke sa dobre kreslí, tak si ihneď začal kresliť.*

Na stranách AB, AC trojuholníka ABC ($|AB| \neq |AC|$) ležia body D, E tak, že $|BD| = |CE|$. Druhý priesečník kružníc opísaných trojuholníkom ABC a ADE označme X. Druhý priesečník kružníc opísaných trojuholníkom ABE a ACD označme Y. Dokážte, že $|\sphericalangle XAY| = 90°$.

Najprv si ukážeme, že X je stred oblúku BC obsahujúceho A.Tento bod nazývame $\check{N}_A$, je to takzvaný Antišvrčkov bod v trojuholníku ABC. Uvažujme trojuholníky $\check{N}_A DB$ a $\check{N}_A EC$. Strany $\check{N}_A B$ a $\check{N}_A C$ sú rovnako dlhé, a tiež strany DB a EC sú rovnako dlhé. Ďalej z tetivovosti $A\check{N}_A BC$ vieme, že uhly medzi nimi ($\sphericalangle DB\check{N}_A$ a $\sphericalangle EC\check{N}_A$) sú tiež rovnaké. Trojuholníky $EC\check{N}_A$ a $DB\check{N}_A$ sú zhodné, teda aj podobné. To ďalej implikuje podobnosť trojuholníkov $CB\check{N}_A$ a $ED\check{N}_A$, teda nakoľko bol uhol $|\sphericalangle B\check{N}_A C| = \alpha$, je aj $|\sphericalangle D\check{N}_A E| = \alpha$. Potom je ale štvoruholník $A\check{N}_A DE$ tetivový. Teda naozaj platí, že $\check{N}_A$ je priesečník kružníc ABC a ADE. Teda $\check{N}_A = X$. Všimnime si, že teraz nám stačí ukázať, že Y leží na osi uhla BAC, pretože o bode X je známe, že leží na osi vonkajšieho uhla. [1]

Tak ako na to? Môžeme napríklad uvažovať stredy Z a W kružníc opísaných trojuholníkom ADC a ABE. Ideme si ukázať, že ich spojnica je kolmá na os uhla pri vrchole A, pretože druhý priesečník je obrazom A-čka podľa priamky ZW. A to nejak platí. Stačí si nám iba všimnúť, že ak sa pozrieme na rovnobežník tvorený osami úsečiek AB, AD, AC, AE, tak kvôli rovnosti $|BD| = |EC|$ tie dvojice rovnobežných priamok budú mať rovnaké vzdialenosti. To ale práve znamená (premyslite si!), že je to kosoštvorec. To ale znamená, že trojuholník WOZ je rovnoramenný, s uhlom $180° - \alpha$ pri vrchole O. Z toho plynie, že spojnica WZ, ktorá je osou uhla pri vrchole W musí byť kolmá na os uhla BAC, pretože ak otočíme ten kosoštvorec o 90°, tak jeho strany budú práve rovnobežné so stranami AB, AC, pretože strany kosoštvorca sú osi úsečiek ležiacich na spomínaných priamkach AB, AC. To ale znamená, že aj otočením osi uhla pri vrchole W dostaneme niečo rovnobežné s osou uhla pri A. A práve toto sme chceli ukázať, sme hotoví, AX a AY sú naozaj kolmé.

[1] Viď napríklad https://mks.mff.cuni.cz/archive/36/uvod2s.pdf



2.9 Krutý Miro Sabotér

opravoval **Miro**

Zadanie. *Tomáš a Tomáš si stavajú vežu z dominových kociek. Veža pozostáva z niekoľkých poschodí a na každom poschodí sa nachádza niekoľko kociek. Na začiatku veža pozostáva z jedného poschodia obsahujúceho jednu kocku. Hru začína Tomáš a následne sa s Tomášom striedajú v ťahoch. Hru vyhráva Tomáš, ktorý ako prvý postaví 42. poschodie. V jednom ťahu spraví Tomáš na ťahu práve jednu z nasledovných možností:*

1. *Vyberie si poschodie, na ktorom je aspoň jedna kocka, a počet kociek na tomto poschodí strojnásobí.*
2. *Vyberie si poschodie, na ktorom je aspoň jedna kocka, a pridá tam 5 kociek.*
3. *Pokiaľ je na najvrchnejšom poschodí počet kociek deliteľný 17, môže vytvoriť nové poschodie, na ktoré uloží jednu sedemnástinu kociek z poschodia pred ním.*

Keď už ich veža mala 17 poschodí, prišiel Miro, vežu im zbúral a zadal im nasledovnú úlohu: Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre ľubovoľné dve reálne čísla x, y platí

$$f(x+y)f(x^2-xy+y^2) = x^3+y^3.$$

Po chvíľke zamyslenia zistíme, že ak hru niekto môže vyhrať, tak je to Tomáš. Tak poďme na to.

Predpokladajme že Tomáš má víťaznú stratégiu, ľahko si rozmyslíme, že potom už musí platiť veľmi jednoducho BUM!!, PRÁSK!, TRESK!!!, !!!...

Hmmmmmmm, vežu už nevidíme, riešenie nemá zmysel, tak poďme aspoň nájsť zmysel funkcionálky.

Na začiatok dosaďme[2] postupne $[0,0], [1,0]$:

$$f(0)f(0) = 0,$$

$$f(1)f(1) = 1.$$

Z prvého vidíme, že $f(0) = 0$, a z druhého, že $f(1) = \pm 1$. Ďalej dosadením $[x,0], [x,x]$:

$$f(x)f(x^2) = x^3,$$

$$f(2x)f(x^2) = 2x^3.$$

[2] $[a,b]$ bude značiť dosadenie $x = a, y = b$

Z prvej rovnosti vidíme, že ak $x \neq 0$ tak $f(x) \neq 0$. To nám umožní dať beztrestne do rovnosti výrazy $f(x^2)$ z oboch rovníc, za predpokladu $x \neq 0$:

$$\frac{2x^3}{f(2x)} = f(x^2) = \frac{x^3}{f(x)},$$

$$2f(x) = f(2x)$$

a zároveň určiť, že funkcia musí byť nepárna (s využitím dosadenia $[-x, 0]$, $f(0) = 0$ a za predpokladu $x \neq 0$):

$$f(-x) = \frac{-x^3}{f(x^2)} = -\frac{x^3}{f(x^2)} = -f(x).$$

Ďalší krok bude všimnúť si rovnosť $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$. Zvolením $[x, 1-x]$ dosiahneme $x + y = 1$, a teda dosiahneme rovnaké výrazy, s ktorými sa dá ďalej pracovať:

$$f(1)f(x^2 - x(1-x) + (1-x)^2) = x^2 - x(1-x) + (1-x)^2,$$

$$f(1)f(3x^2 - 3x + 1) = 3x^2 - 3x + 1.$$

Definičný obor funkcie $3x^2 - 3x + 1$ je $\langle 1/4, \infty)$. Predpokladajme teraz, že $f(1) = 1$. Pre $t \geq 1/4$ môžeme spraviť substitúciu $3x^2 - 3x + 1 = t$ a z toho máme $f(t) = t$ pre $t \geq 1/4$. To vieme rozšíriť na všetky kladné čísla využitím vzťahu $2f(x) = f(2x)$. Najprv na interval $\langle 1/8, 1/4)$, následne na $\langle 1/16, 1/8)$, … (v poriadnom dôkaze využijeme indukciu). S využitím nepárnosti a $f(0) = 0$ dostávame $f(x) = x$. Podobne pre $f(1) = -1$ dostávame $f(x) = -x$.

Skúškou overíme, že funkcie $f(x) = x$ a $f(x) = -x$ sú naozaj riešeniami.

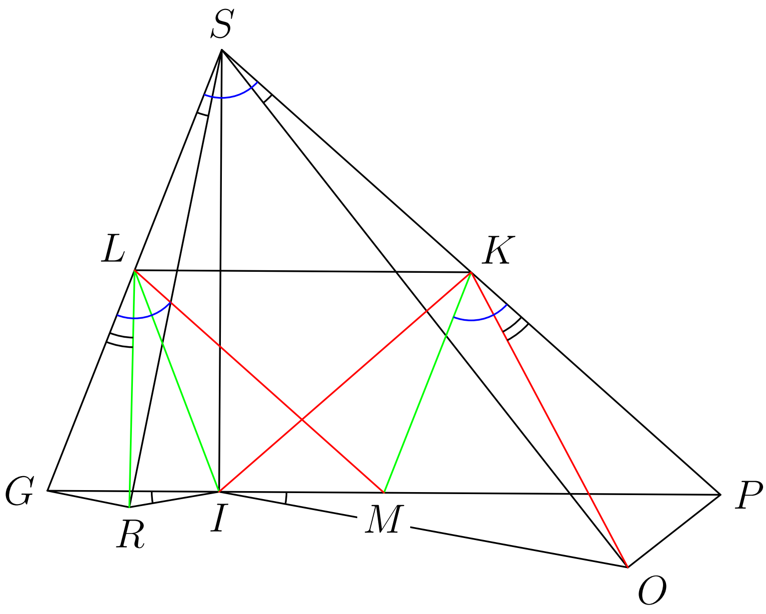
2.10 Kam Miro Smeruje? opravoval **Jožo**

Zadanie. *Miro sa stratil v Bermundskom ostrouhlom trojuholníku GPS. Rozhodol sa použiť GPS, no tá v trojuholníku GPS funguje netriviálne. O svojej polohe sa dozvedel nasledovné: Bod M je stred strany GP a I je päta výšky na stranu GP. Predpokladajme, že R a O sú body v opačnej polrovine danej priamkou GP než bod S také, že* $GR \perp SR$, $PO \perp SO$ *a* $|\sphericalangle PSO| = |\sphericalangle GSR|$. *Dokážte, že Miro sa točí do kolečka, t. j. že MIRO je tetivový štvoruholník.*

Označme si $|\sphericalangle GSP| = \alpha$ a $|\sphericalangle PSO| = |\sphericalangle GSR| = \varphi$. Ďalej si označme stredy strán SP a SG postupne K, L. Vďaka pravým uhlom GRS a GIS ležia body S, G, R, I na kružnici so stredom v bode L. Podobne, body S, P, O, I ležia na kružnici so stredom v bode K. Vďaka obvodovým uhlom v týchto kružniciach máme $|\sphericalangle GIR| = |\sphericalangle GSR| = \varphi = |\sphericalangle PSO| = |\sphericalangle PIO|$. Z toho vidíme, že priamka GP je osou vonkajšieho uhla RIO. Aby sme ukázali, že $MIRO$ je tetivový štvoruholník, stačí nám ukázať, že bod M leží na osi strany RO, teda že bod M je antišvrkom prislúchajúcim k bodu I v trojuholníku RIO, ktorý leží na kružnici jemu opísanej.[3]

Keďže LM je stredná priečka trojuholníka GPS, tak $|LM| = |PS|/2 = |KS| = |KI|$. Analogicky tiež získame $|KM| = |GS|/2 = |LS| = |LR|$. Ďalej z vlastností stredných priečok vieme, že $|\sphericalangle GLM| = |\sphericalangle PKM| = \alpha$. Z obvodového a stredového uhla zas máme $|\sphericalangle GLR| = 2\varphi = |\sphericalangle PKO|$. Preto aj $|\sphericalangle RLM| = \alpha - 2\varphi = |\sphericalangle MKO|$. Dostávame tak, že trojuholníky RLM a MKO sú zhodné podľa vety *sus*. Preto $|MR| = |MO|$, čo sme chceli dokázať.

[3] Je známa vec, že v trojuholníku ABC sa os vonkajšieho uhla pri vrchole A a os strany BC pretínajú na opísanej kružnici – dokážte si to! Tento ich spoločný bod sa neoficiálne nazýva *antišvrkom*. Viac si môžete o ňom prečítať na na str. 34 v seriáli PraSe Geometrie trojuholníka.



Ďalšie riešenia

Skoro každý riešiteľ tejto úlohy mal iné riešenie. Preto sme vybrali hlavné myšlienky tých riešení, ktoré nám pripadali zaujímavé či poučné. V niektorých riešeniach sme vynechali zistenia z prvého odseku riešenia vyššie. Nasledovné riešenia využívajú geometrické zobrazenia. Pokiaľ ich nepoznáte, dočítate sa o nich v seriáli PraSe Geometrická zobrazení.

- Nech $G' = S_R(G)$ (takto budeme ďalej značiť obraz bodu G v stredovej súmernosti so stredom R) a $P' = S_O(P)$. Trojuholník SGP' sa v otočení so stredom S o uhol 2φ zobrazí na trojuholník $SG'P$. Preto priamky GP' a $G'P$ zvierajú uhol 2φ. Potom už len dopočítame, že $|\sphericalangle RMO| = 180° - (|\sphericalangle GMR| + |\sphericalangle PMO|) = 180° - (|\sphericalangle GPG'| + |\sphericalangle PGP'|) = 180° - 2\varphi$.
- Definujeme si bod L ako priesečník kružnice opísanej trojuholníku RIO a úsečky GP a ukážeme, že $L \equiv M$.[4] Rovnoramenné trojuholníky RLO a SKO sú podobné (uu), preto existuje špirálová podobnosť so stredom v bode O, ktorá zobrazuje jeden na druhý. Keďže špirálová podobnosť „chodí po dvoch“, tak existuje aj špirálová podobnosť so stredom O zobrazujúca RS na LK. Preto $|\sphericalangle LKO| = |\sphericalangle RSO| = \alpha - 2\varphi$ a $|\sphericalangle LKP| = |\sphericalangle MKP| = \alpha$.
- Označme $A = S_R(S)$ a $B = S_O(S)$. Rovnoramenné trojuholníky SGA a BPS sú podobné. Body O, M, R sú stredy spojníc zodpovedajúcich si bodov. Preto vďaka kĺzaniu je s nimi podobný aj trojuholník OMR a $|\sphericalangle RMO| = 180° - 2\varphi$.

V úlohe sa dali nájsť aj ďalšie pekné kružnice:

- Na priamkach SR a SO zvoľme postupne body X a Y tak, aby $SR \perp XP$ a $SO \perp YG$. Bod M leží na osiach rovnobežkových pásov GY, PO a GR, PX. Dá sa ukázať, že M je stred kružnice opísanej štvoruholníku $ROXY$. Ide to cez mocnosť bodu S k tejto kružnici alebo vyuhlením $|\sphericalangle RYO| = |\sphericalangle RXO| = 90° - \varphi$.

Napokon, ukázať tetivovosť štvoruholníka $MIRO$ bolo možné cez to najpriamočiarejšie kritérium – ukázať, že sa osi jeho strán pretínajú v jednom bode, teda, že existuje bod, ktorý má od všetkých jeho vrcholov rovnako ďaleko. Dajte si však pozor, takýto prístup moc často nefunguje :).

[4] Takéto preformulovanie úlohy je celkom vhodné a pomôže aj pri iných prístupoch riešenia. Lepšie sa pri riešení využíva kružnica ako stred strany.

- Bodmi L a K prechádzajú postupne osi úsečiek IR a IO, ktoré sa pretínajú v bode X. Možno ukázať, že LKX je rovnoramenný trojuholník. Preto bodom X prechádza os úsečky LK, ktorá je totožná s osou úsečky MI ($MILK$ je rovnoramenný lichobežník).