Riešenia 3. kola letnej časti

3.1 Kmeň Majestátnych Saván ($\kappa \le 1$) opravovali **Bea** a **Samo**

Zadanie. *Náčelník afrického Kmeňa Majestátnych Saván zorganizoval pre svojich domorodcov turnaj. Za každé kolo turnaja, ktorého sa domorodec zúčastní, získa 17 bodov. Za každé kolo, ktoré vyhrá, získa ešte ďalšie 3 body. Na konci turnaja mal domorodec Ka-Em-Es presne o jeden bod viac ako domorodec Em-Ka-Es. Aký je najmenší počet kôl, ktorých sa mohol domorodec Ka-Em-Es zúčastniť?*

Na začiatok je fajn uvedomiť si, že ak by nastala situácia, že obaja domorodci by nejaký zápas vyhrali (prehrali), ich počet bodov by to zdvihlo o rovnakú konštantu, čo by neovplyvnilo bodový rozdiel. Zároveň by to znamenalo, že počet absolvovaných zápasov domorodca Ka-Em-Es bude väčší, čo nechceme. Budeme sa teda zaoberať len prípadmi, kedy jeden z domorodcov všetky zápasy prehral a druhý vyhral.

Po rovnakom počte absolvovaných kôl sa rozdiel bodov domorodcov zväčší o násobok 3, pričom väčší počet bodov má, logicky, domorodec, ktorý vyhráva. Tento rozdiel môžeme zmenšiť na jedna jedine tak, že prehrávajúci domorodec absolvuje niekoľko kôl navyše - pripočítavame 17. Teraz teda hľadáme najmenší násobok čísla 3, ktorý sa s nejakým násobkom sedemnástky líši o jedna. To je $3 \cdot 6 = 18$.

Vyhrávajúci domorodec teda absolvoval aspoň šesť zápasov, za ktoré spolu získal $6 \cdot 20 = 120$ bodov. Domorodec, ktorý prehrával získal $7 \cdot 17 = 119$ bodov. Vieme, že domorodec Ka-Em-Es mal na konci turnaja o bod viac, je teda domorodcom, ktorý absolvoval najmenej šesť kôl.

3.2 Konzumácia Matematiky Sýti ($\kappa \le 2$) opravovali **Gianetta** a **Kika**

Zadanie. *Kmeň Majestátnych Saván si veľmi ctí prírodu. Preto jeho členovia nehľadajú potravu v prírode, ale v matematike. V jeden deň dal náčelník svojmu ľudu nasledovné inštrukcie.*

Nájdite všetky trojice (x, y, z) celých čísel, ktoré vyhovujú sústave rovníc

$$x - yz = 1,$$

$$xz + y = 2.$$

Prvé riešenie

Budeme chcieť z tejto sústavy rovníc vyjadriť z. Najprv vyriešime prípady, keď je jedna z neznámych x, y rovná 0.

$$x = 0 \Rightarrow y = 2, \qquad -yz = 1.$$

Táto možnosť zjavne nemá celočíselné riešenie.

$$y = 0 \Rightarrow x = 1, \qquad xz = 2 \Rightarrow z = 2.$$

Našli sme jedno riešenie a to trojicu čísel $(x, y, z) = (1, 0, 2)$.

Predpokladajme, že x, y sú nenulové, potom nimi môžeme deliť a vyjadríme z z oboch rovníc.

$$z = \frac{x-1}{y},$$
$$z = \frac{2-y}{x}.$$

Dáme do rovnosti pravé strany.

$$\frac{x-1}{y} = \frac{2-y}{x},$$
$$(x-1)x = (2-y)y.$$

Výraz $x(x-1)$ je pre všetky celé čísla nezáporný, pretože ak ani jedno z čísel x, $x-1$ nie je nula, tak majú obe rovnaké znamienka (rozmyslieť). Pravá strana poslednej rovnice je nezáporná iba pre hodnoty $y = 0,\ 1,\ 2$. Pre všetky ostatné hodnoty majú čísla y, $y-2$ opačné. znamienko. Preto y môže nadobudnúť iba jednu z hodnôt 0, 1, 2. Spätným dosadením do sústavy rovníc nenulových hodnôt pre y ľahko dorátame hodnoty pre x a z. Jediné celočíselné riešenie je trojica

$$(x, y, z) = (1, 2, 0).$$

Dokopy teda máme dve trojice $(x, y, z) = (1, 0, 2)$ a $(x, y, z) = (1, 2, 0)$.

Druhé riešenie:

Z druhej rovnice vyjadríme $y = 2 - xz$, a dosadíme do prvej rovnice

$$x - z(2 - xz) = 1 \Rightarrow xz^2 - 2z + (x-1) = 0.$$

Aby táto kvadratická rovnica s parametrom x a premennou z mala riešenie, jej diskriminant musí byť nezáporný, t. j.

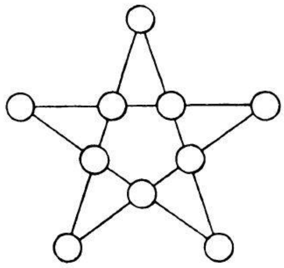
$$D = 4 - 4 \cdot (x-1)x = -4x^2 + 4x + 4 \ \geq 0 \ \Rightarrow x^2 - x - 1 \leq 0$$

Danej nerovnici vyhovujú len 2 hodnoty x a to $x = 0$ a $x = 1$ (to sa dá zistiť tak, že ju upravíme na štvorec). Dosadením do pôvodnej sústavy rovníc dostaneme neceločíselné riešenie pre $x = 0$ a dve riešenia pre $x = 1$, rovnaké ako v prvom riešení.

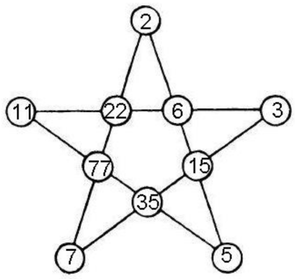
3.3 Kmeňový Magický Symbol ($\kappa \leq 3$) — opravovala **Kika**

Zadanie. *Kmeň Majestátnych saván má na svojom rituálnom oltári nakreslenú magickú hviezdu. Vždy pri ich rituáli do jej políčok vpisuje šaman čísla podľa posvätných podmienok.*

Do každého políčka hviezdy treba vpísať jedno kladné celé číslo. Každé dve susedné políčka (tie, ktoré sú spojené čiarou) musia obsahovať čísla, ktoré majú najväčšieho spoločného deliteľa väčšieho ako 1*. Každé dve nesusedné políčka musia obsahovať čísla, ktoré majú najväčšieho spoločného deliteľa* 1*. Koľko najmenej rôznych čísel možno použiť na vyplnenie hviezdy?*



Na obrázku vidíme 10 políčok, do ktorých treba vpísať číslo. Najprv sa zamyslime nad tým, či sa vôbec dá obrázok vyplniť desiatimi číslami. Po chvíľke skúšania prídeme na to, že obrázok sa vyplniť dá. Napríklad tak, ako vidíme na obrázku (ktorý nám nakreslil *Viktor Balan*). Všimnime si, že sme nepoužili číslo 1. Nemôže tam byť preto, lebo by toto políčko nemalo najväčšieho spoločného deliteľa so svojimi susedmi, ktorý by bol väčší ako 1.



Teraz sa zamyslime nad tým, či by sa dal obrázok vyplniť aj s menším počtom čísel. To by znamenalo, že aspoň dvakrát doň napíšeme rovnaké číslo, označme si ho ako n. Vieme o ňom, že je väčšie ako 1. Môžeme ho napísať na dve políčka, ktoré spolu nesusedia? Nemôžeme, lebo potom by tieto dve políčka mali najväčšieho spoločného deliteľa väčšieho ako 1 – obe sú predsa deliteľné číslom n.

Môžu byť rovnaké čísla na susediacich políčkach? Mohli by, ale iba vtedy, keby tieto políčka mali tých istých susedov. Z obrázku vidíme, že také dve políčka tam nie sú. Ak existuje aspoň jedno ďalšie políčko, ktoré susedí iba s jedným z nich, nastane problém. Predstavme si, že namiesto 6 a 22 v obrázku dáme číslo n. Políčko, na ktorom je teraz 15, potom musí byť súdeliteľné s číslom n, ktoré s ním priamo susedí. Zároveň musí byť toto políčko nesúdeliteľné s druhým políčkom s číslom n, ktoré s ním nesusedí. Takže ani na dve susedné políčka sa nedá napísať rovnaké číslo.

Najmenší počet čísel, čo potrebujeme na vyplnenie obrázka, je 10.

3.4 Kvetinky Musím Spojiť ($\kappa \leq 5$) opravoval **Dominik**

Zadanie. *Keď sa bádateľka Jane predierala Africkými džungľami, veľmi ju zaujal obdĺžnikový kvetinový záhon. Niektorí ľudia v ňom hľadajú štvorlístky, no Jane v ňom chce nájsť obdĺžnik s celočíselnými rozmermi.*

Každý bod obdĺžnika R (vrátane vnútorných bodov) so stranami 4 *a* 40 *je zafarbený práve jednou zo štyroch farieb. Ukážte, že v obdĺžniku R existujú štyri body rovnakej farby, ktoré tvoria obdĺžnik s celočíselnými dĺžkami strán.*

Cieľom riešenia je ukázať, že v obdĺžniku existujú štyri body rovnakej farby tvoriace obdĺžnik so stranami celočíselnej dĺžky. Na úvod je fajn uvedomiť si, že všetky body nového obdĺžnika musia mať rovnaký desatinný rozvoj. Keďže pôvodný obdĺžnik má celočíselné rozmery, bodov s každým desatinným rozvojom bude rovnako veľa okrem tých, ktoré sú na obvode(tam nám pribudne jeden navyše). Napríklad ak je ľavý dolný roh veľkého obdĺžnika v bode $[0,0]$, tak bodov s celočíselnými súradnicami je v jednom rozmere 5 a v druhom 41, pričom body s desatinným rozvojom 0.5 sú v jednom rozmere len 4 a v druhom ich je 40. V ďalšom riešení budeme uvažovať tie, ktorých je viac. [1]

Na základe predošlej úvahy máme namiesto obdĺžnika už len mriežku rozmerov 5×41 s bodmi s celočíselnými súradnicami. Bez ujmy na všeobecnosti, nech je v každom riadku 41 bodov a v každom stĺpci 5.

Keďže farby máme len štyri, v každom stĺpci sa nachádza dvojica vrcholov s rovnakou farbou. Ak sa pozrieme na to, koľko rôznych usporiadaní môže mať táto dvojica v tomto stĺpci, prídeme na to, že ich je $\binom{5}{2} = 10$. Každá takáto dvojica však môže byť rôznej farby, preto ak berieme ohľad aj na farbu, možností máme $4 \cdot 10 = 40$. My však máme 41 stĺpcov a keďže v každom z nich nejaká takáto dvojica byť musí, určite existujú dva stĺpce, v ktorých je dvojica bodov rovnakej farby na rovnakých pozíciách. Inak povedané, existujú štyri body rovnakej farby, ktoré tvoria obdĺžnik s celočíselnými dĺžkami strán.

3.5 Kúsok Môjho Srdca ($\kappa \leq 8$)

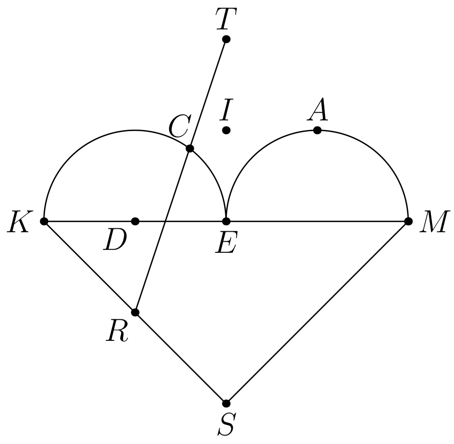
opravovala **Kika Prš**

Zadanie. *Keď sa Jane dokochala kvetinovým záhonom, tak našla ešte niečo lepšie – Tarzana. Ten jej vravel: „Jane, darujem Ti kúsok môjho srdca.“*

Kúsok Môjho Srdca je tvorený rovnoramenným trojuholníkom KMS s pravým uhlom pri vrchole S. Bod E je stred strany KM. Polkružnice v opačnej polrovine ku KMS nad priemermi KE a EM označme postupne k, m. Vyznačme si v Kúsku Môjho Srdca nasledujúce body:

- *Bod T je obraz bodu S v stredovej súmernosti so stredom v bode E.*
- *Bod R je stred strany KS.*
- *Bod D je stred úsečky KE.*
- *Bod C je priesečník priamky RT a polkružnice k.*
- *Bod I je stred úsečky ET.*
- *Bod A leží v polovici polkružnice l.*

Dokážte, že sedemuholníku SRDCIAM možno opísať kružnicu.



Riešiť túto úlohu sa dá viacerými spôsobmi. Dokázať, že jednotlivé body ležia na kružnici sa dá viacerými spôsobmi. Môžeme dokázať, že nejaký štvoruholník je obdĺžnik a teda sa mu dá opísať kružnica. (Stred kružnice

[1] V každej súradnici to môže byť iný desatinný rozvoj.

je priesečník uhlopriečok a polomer je polovica dĺžky uhlopriečky.) Môžeme dokázať, že súčet protiľahlých uhlov v štvoruholníku je 180°, a teda je to tetivový štvoruholník. Môžeme dokázať, že dva uhly, ktoré sa pozerajú na tú istú úsečku sú zhodné, sú to obvodové uhly nad tou úsečkou a teda ležia tieto štyri body na jednej kružnici. Môžeme nájsť niekde mocnosť bodu ku kružnici. V tomto riešení použijeme všetky vyššie spomenuté postupy. Existujú aj iné postupy, ktoré sú správne. Dá sa aj skromnejší počet týchto dokazovacích zbraní využiť. No poďme na to!

Trojuholník KMS je rovnoramenný a pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole S. Z toho vieme, že $|\sphericalangle KMS| = 45°$. Úsečka ME je priemer kružnice m (resp. l, zadanie sa rozhodlo značiť túto kružnicu oboma spôsobmi. Za vzniknuté komplikácie sa ospravedlňujeme.) Bod A leží na tejto Tálesovej kružnici, preto $|\sphericalangle EAM| = 90°$. Nakoľko je bod A v polovici polkružnice m, tak trojuholník EAM je rovnoramenný. Preto je $|\sphericalangle AME| = 45°$. Veľkosť uhla AMS vieme dorátať ako $|\sphericalangle AMS| = |\sphericalangle AME| + |\sphericalangle KMS| = 45° + 45° = 90°$. Ak ešte dokážeme, že bod E leží na úsečke RA, tak dostaneme obdĺžnik $SMAR$. Tento štvoruholník totiž má tri pravé uhly, z čoho už musí byť obdĺžnikom. Z trojuholníka EMA vieme, že $|\sphericalangle MEA| = 45°$. Keďže je trojuholník KMS rovnoramenný, tak výška na základňu je taktiež ťažnica a taktiež osou uhla KSM. Z toho vieme, že $|\sphericalangle SEM| = 90°$ a $|\sphericalangle ESM| = 45°$. Úsečka RE je strednou priečkou, čiže je rovnobežná s SM. Uhly RES a ESM sú striedavé, teda sú zhodné a ich veľkosť je 45°. Dopočítame veľkosť uhla REA: $|\sphericalangle REA| = |\sphericalangle RES| + |\sphericalangle SEM| + |\sphericalangle MEA| = 45° + 90° + 45° = 180°$. Teda REA je naozaj jedna úsečka a štvoruholník $SMAR$ je obdĺžnik. Vieme už, že body S, R, A, M ležia na kružnici.

Úsečka RD je strednou priečkou v trojuholníku KES. Preto platí, že úsečky RD a SE sú rovnobežné. Úsečka SE je kolmá na KM, pretože trojuholník KMS je rovnoramenný, teda SE je nielen ťažnicou ale i výškou. Potom je RD kolmá na KS, resp. $|\sphericalangle RDM| = 90°$. Vidíme, že súčet protiľahlých uhlov je $90° + 90° = 180°$. Z čoho vieme, že štvoruholník $SRDM$ je tetivový. Vieme už, že body S, R, D, A, M ležia na kružnici.

Pozrime sa teraz na trojuholník DIE. Keďže SE je výška v trojuholníku KMS, tak $|\sphericalangle SEM| = 90°$. Tento uhol je vrcholový s uhlom DEI, z čoho vyplýva $|\sphericalangle DEI| = 90°$. Trojuholník KES je tiež rovnoramenný a pravouhlý, pretože má pravý uhol pri vrchole E a zvyšné dva uhly zhodné s veľkosťou 45°. Teda $|KE| = |ES|$. Nakoľko bod T je súmerný s bodom S v stredovej súmernosti podľa E, tak aj $|TE| = |ES|$. Keď znalosti z posledných dvoch spomenutých rovností spojíme, tak získame, že $|TE| = |KE|$. Keďže body D a I sú stredy úsečiek KE a TE, tak aj $|DE| = |IE|$. Trojuholník DIE je rovnoramenný a pravouhlý. Odkiaľ vieme, že $|\sphericalangle DIE| = 45°$. Uhol DIE je taktiež uhlom DIS a uhol KMS je taktiež uhlom DMS. Uhly DIS a DMS sú zhodné a oba sa pozerajú na DS, teda sú to obvodové uhly. Preto body S, D, I, M ležia na jednej kružnici. Vieme už, že body S, R, D, I, A, M ležia na kružnici.

Už len bod C nám chýba. Keďže RD je stredná priečka, tak $|RD| = \frac{1}{2} \cdot |SE| = \frac{1}{2} \cdot |KE| = |KD|$. Bod D je stredom kružnice k. Body K a R sú rovnako vzdialené od bodu D, preto bod R leží na kružnici k (polkružnici k doplnenej na kružnicu). Úsečka ST je dotyčnica k tejto kružnici, pretože $|\sphericalangle DES| = 90°$. Z mocnosti [2] bodu T ku kružnici k máme $|TC| \cdot |TR| = |TE|^2$. Uhol EMT je vnútorným uhlom rovnoramenného pravouhlého trojuholníka EMT. Bod A leží na úsečke MT, pretože $|\sphericalangle EMT| = 45°$ aj $|\sphericalangle EMA| = 45°$ (a sú v rovnakej polrovine). Z mocnosti bodu T ku kružnici m máme $|TA| \cdot |TM| = |TE|^2$. Platí, že $|TC| \cdot |TR| = |TA| \cdot |TM|$, preto tieto štyri body musia byť na jednej kružnici (inak by k nim bod T nemal rovnakú mocnosť). Vieme už, že body S, R, D, C, I, A, M ležia na kružnici.

Ak nie si kamarát s mocnosťou bodu ku kružnici, tak máš aj inú možnosť ako plakať do vankúša, že ja ten bod C neviem dokázať. Môžeš spraviť napríklad toto: Najprv dokážeme, že $KSMT$ je štvorec a bod A je v strede TM (dokáž si!). Potom uhly TRA a ARM sú zhodné, pretože trojuholníky TRA a MRA sú zhodné (napr. lebo $|RA| = |RA|, |TA| = |MA|$ a uhol pri A je pravý). Bod D je stredom kružnice k, pretože KE je priemer a bod D je v strede KE. Už spomínaný uhol TRA je obvodovým uhlom nad oblúkom CE, teda je polovičný

[2] O mocnosti bodu ku kružnici sa dá dozvedieť viac od v zbierke KMS od strany 37: https://kms.sk/zbierka/

oproti stredovému uhlu CDE. Uvedomme si, že tento uhol CDE je aj uhol CDM. Veľkosť uhla CDM je teda $2\cdot|\sphericalangle TRA| = |\sphericalangle TRA|+|\sphericalangle ARM| = |\sphericalangle CRM|$. Vidíme, že nad oblúkom CM máme dva rovnako veľké uhly (CDM a CRM), a teda sú to obvodové uhly a teda body R, D, C, M sú na kružnici. Vieme už, že body S, R, D, C, I, A, M ležia na kružnici.

3.6 Kocky Milované Snúbencami

opravoval **Tomáš**

Zadanie. *Jane a Tarzan sa už nevedia dočkať ich svadby, preto si krátia čas tým, že si hádžu (spravodlivou) mincou a hrajú hru. Jane vyhrá, ak hodí hlavu viackrát ako Tarzan. Tarzan je džentlmen, takže ju nechá hádzať* 2019-*-krát, zatiaľ čo on sám bude hádzať iba* 2018*-krát. Aká je pravdepodobnosť, že Jane vyhrá?*

Môžeme sa na začiatok zamyslieť, čo by sme očakávali intuitívne – kto bude mať väčšiu šancu vyhrať. Jane má malú výhodu vďaka tomu, že hádže o 1 hod viac. Tarzan má ale tiež malú výhodu, lebo vyhráva pri rovnakom počte hláv. Vyzerá to, že obaja budú mať pravdepodobnosť výhry blízku $\frac{1}{2}$. Môžeme dúfať, že sa výhody vyvážia a obaja budú mať rovnakú pravdepodobnosť presne $\frac{1}{2}$. Ukáže sa, že to naozaj bude, tak si to poďme dokázať.

Uvažujme všetky možné hry, aké sa mohli odohrať. Jedna hra sa skladá z 2019 hodov Jane a 2018 hodov Tarzana, spolu 4037 hodov. Pri každom hode máme 2 možnosti čo padlo. Pre predstavu, všetkých možných hier je 2^{4037}. Chceme dokázať, že Jane a Tarzan majú rovnakú šancu vyhrať, teda, že počet hier, v ktorých vyhrá Jane, zo všetkých možných hier, je rovnaký ako počet hier, kde vyhrá Tarzan. Chceme teda všetky hry rozdeliť do dvojíc, aby v každej dvojici bola jedna víťazná hra pre Jane a druhá pre Tarzana. Tým ukážeme, že oboch typov hier je rovnako veľa. [3]

Zoberme si jednu konkrétnu hru A a chceme k nej priradiť inú hru B, aby vyhral ten druhý. Ak v hre A hodil niekto veľa hláv, potrebujeme aby v hre B hodil málo hláv a naopak. Tiež potrebujeme splniť, že keď ku hre A priradíme hru B, tak ku hre B musíme priradiť hru A. Dobrý kandidát priraďovania je nasledovný spôsob: Predstavme si, že v každom hode by padla opačná strana mince a tým dostaneme hru B. (Rozmyslite si, že takto tiež ku hre B priradíme spätne hru A, takže hry budú v dvojiciach ako sme chceli.)

Označme si J, T počty hláv, ktoré hodili Jane a Tarzan v hre A. V hre B tým pádom hodili $2019-J$, $2018-T$ hláv.

Ak hru A vyhrala Jane $J > T \Rightarrow J \geq T+1$, a teda $2019-J \leq 2018-T$, čiže hru B vyhral Tarzan.

Ak hru A vyhral Tarzan $J \leq T \Rightarrow J < T+1$, a teda $2019-J > 2018-T$, čiže hru B vyhrala Jane.

Vidíme, že v každej dvojici raz vyhrá Jane a raz Tarzan a tým sme hotoví. Pravdepodobnosť, že vyhrá Jane je presne $\frac{1}{2}$.

Iné riešenie

Zoberme si situáciu, keď Tarzan aj Jane odhádzali 2018 hodov, pre Jane teda ostáva ešte jeden hod. Tarzan a Jane hádžu rovnako veľa krát, takže pre každého je rovnaká pravdepodobnosť, že bude mať viac hláv ako ten druhý. Ak mala Jane viac hláv, bez ohľadu na posledný hod bude mať stále viac hláv, teda vyhrá. Ak mala Jane menej hláv, posledným hodom môže prinajlepšom dorovnať počet hláv, takže tak či tak prehrá.

Ak mali Jane a Tarzan po 2018 hodoch rovnako veľa hláv, tak posledným hodom môže Jane buď hodiť hlavu a vyhrať alebo hodiť znak a prehrá. Ak mali Jane a Tarzan po 2018 hodoch rôzne veľa hláv, Jane vyhrala v polovici prípadov. Ak mali po 2018 hodoch rovnako veľa hláv, Jane vyhrala tiež v polovici prípadov (keď hodila v poslednom hode hlavu), takže celkovo má Jane pravdepodobnosť $\frac{1}{2}$ na výhru.

[3] Táto technika sa nazýva princíp bijekcie a občas sa dá použiť v nejakej úlohe.

Iné riešenie

Uvedieme ešte hlavnú myšlienku ďalšieho zaujímavého riešenia. Dá sa rozmyslieť, že hry, ktoré Jane prehrala, sú presne tie hry, keď hodila viac znakov oproti tomu, koľko znakov hodil Tarzan. Jane vždy hodí buď viac hláv ako Tarzan alebo viac znakov ako Tarzan (ale oboje nie), pričom vyhrá presne tie hry, keď hodila viacej hláv. Keďže hlava a znak sú symetrické, tak vyhrá s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$.

3.7 Kubko Mapuje Stopy

opravoval **Juro**

Zadanie. *Bádateľ Kubko sa dopočul, že v Afrike sa nachádza veľmi vzácny drahokam. Stopy po jeho polohe sú zašifrované do čísel p a k. Z nich má na základe tajnej formuly zistiť jeho polohu. Bojí sa však, že mu vyjde viacero miest. Upokojte ho tým, že miesto je najviac jedno.*

Nech p a k sú kladné celé čísla také, že p je prvočíslo a $k > 1$. Dokážte, že existuje najviac jedna dvojica (x, y) kladných celých čísel, pre ktorú platí $x^k + px = y^k$.

Dôkaz spravíme ako z rozprávky: tri krát spravíme veľmi podobný postup a na tretí krát nám to dá vytúžený výsledok. Tri krát si preznačíme premenné, s takto označenými premennými si niečo dokážeme – náš cieľ je vyjadriť p ako výraz iba jednej premennej, a nie dvoch.

(1) : Označme $y = x+z$ pre nejaké prirodzené z. Ukážeme, že $z \mid x$. Upravme si našu rovnicu do nasledujúceho tvaru.

$$
\begin{aligned}
x^k + px &= y^k,\\
x^k + px &= (x+z)^k,\\
px &= (x+z)^k - x^k,\\
px &= (x+z-x)\left((x+z)^{k-1} + (x+z)^{k-2}x + \cdots + x^{k-1}\right),\\
x &= \frac{z\left((x+z)^{k-1} + (x+z)^{k-2}x + \cdots + x^{k-1}\right)}{p}.
\end{aligned}
$$

Teraz sú dve možnosti, buď $p \mid z$ alebo $p \mid (x+z)^{k-1} + (x+z)^{k-2}x + \cdots + x^{k-1}$.

Ak $p \mid z$, potom ale

$$\frac{z\left((x+z)^{k-1} + (x+z)^{k-2}x + \cdots + x^{k-1}\right)}{p} \geq (x+z)^{k-1} + (x+z)^{k-2}x + \cdots + x^{k-1} > x$$

pre $k > 1$, a teda riešenie neexistuje. Nutne teda $p \mid (x+z)^{k-1} + (x+z)^{k-2}x + \cdots + x^{k-1}$, no ale keďže

$$x = z\frac{\left((x+z)^{k-1} + (x+z)^{k-2}x + \cdots + x^{k-1}\right)}{p},$$

dostávame $z \mid x$.

(2) : Označme $x = zh$ pre nejaké prirodzené h. Ukážeme, že $h = z^{k-1}$. Upravme si pôvodnú rovnicu do nasledujúceho tvaru:

$$\begin{aligned} x^k + px &= y^k, \\ (zh)^k + pzh &= (zh + z)^k, \\ ph &= z^{k-1}((h+1)^k - h^k). \end{aligned}$$

Teraz h je nesúdeliteľné s $((h+1)^k - h^k)$, lebo ak by nejaké prvočíslo q delilo obe čísla, tak q delí aj $(h+1)^k$, takže $q \mid (h+1)$, pričom $q \mid h$, čo nemôže zároveň. Preto nutne $h \mid z^{k-1}$. Platí dokonca $h = z^{k-1}$, pretože po vydelení h dostaneme výraz

$$p = \frac{z^{k-1}}{h}((h+1)^k - h^k).$$

Keďže ale p je súčin dvoch čísel, jedno z nich musí byť 1, čo ale nutne musí byť prvý člen, a teda $h = z^{k-1}$.

(3) : Konečne, môžeme značiť $x = z^k$, čo keď dosadíme do pôvodnej rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} x^k + px &= y^k, \\ (z^k)^k + pz^k &= (x + z)^k, \\ z^{k^2} + pz^k &= (z^k + z)^k, \\ p &= \frac{(z^k + z)^k - z^{k^2}}{z^k} = z^{k^2-k} + \cdots + 1. \end{aligned}$$

V čitateli sú po roznásobení všetky mocniny z-ka aspoň na k-tu, takže výraz na pravej strane je polynóm premennej z stupňa najviac $k^2 - k > 0$ so všetkými koeficientami kladnými (sú rovné príslušným členom binomického rozvoja). Teraz príde tá hlavná myšlienka: také z môže existovať pre dané p maximálne jedno, pretože takýto polynóm je rýdzo rastúca funkcia na kladných číslach. To znamená, že zvýšením z zvýšim aj hodnotu polynómu a teda môže nadobúdať hodnotu p maximálne raz (v kladných číslach).

No nie je to pekný happy end rozprávky?

3.8 Kubka Morí Strašidlo

opravoval **Liu**

Zadanie. *Kubko zistil, že drahokam sa nachádza v jaskyni uprostred africkej džungle, kde ho stráži strašidelná príšera. Kubko sa teda vybral na dobrodružnú výpravu do Afriky. Keď tam prišiel, príšera mu zadala nasledovnú úlohu.*

Daný je lichobežník $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Kružnica k_1 sa dotýka úsečky AB a polpriamok AD, BC a kružnica k_2 sa dotýka úsečky CD a polpriamok CB a DA. Označme P bod dotkyu kružnice k_1 s úsečkou AB a Q bod dotyku kružnice k_2 s úsečkou CD. Dokážte, že priamky AC, BD, PQ prechádzajú jedným bodom.

Najprv rozoberme ak $|AB| = |CD|$. Nech Y je priesečník uhlopriečok AC a BD. Potom sú k_1 a k_2 stredovo súmerné podla bodu Y a teda nutne aj ich body dotykov so stranami P a Q. To znamená že P, Q a Y ležia na jednej priamke.

Ďalej predpokladáme že $|AB| \neq |CD|$. Nech X je priesečník priamok AD a BC. BUNV nech $|AB| > |CD|$, tým pádom k_1 je vpísanou kružnicou $\triangle ABX$ a k_2 pripísanou $\triangle DCX$ (V opačnom prípade je k_1 pripísaná, k_2 vpísaná a postup je analogický). Označme P' ako priesečník priamok XP a CD. Keďže $AB \parallel CD$ tak sú $\triangle ABX$ a $\triangle DCX$ podobné a teda rovnoľahlé podľa bodu X, tak musí byť P' zobrazením bodu P v tejto rovnoľahlosti.

To znamená, že P' je bodom dotyku kružnice vpísanej $\triangle DCX$ a podľa známej vlastnosti musí byť stredovo súmerný s bodom Q (bod dotyku kružnice pripísanej) podľa stredu strany CD, čiže musí platiť :

$$\frac{|DP'|}{|P'C|} = \frac{|QC|}{|DQ|}.$$

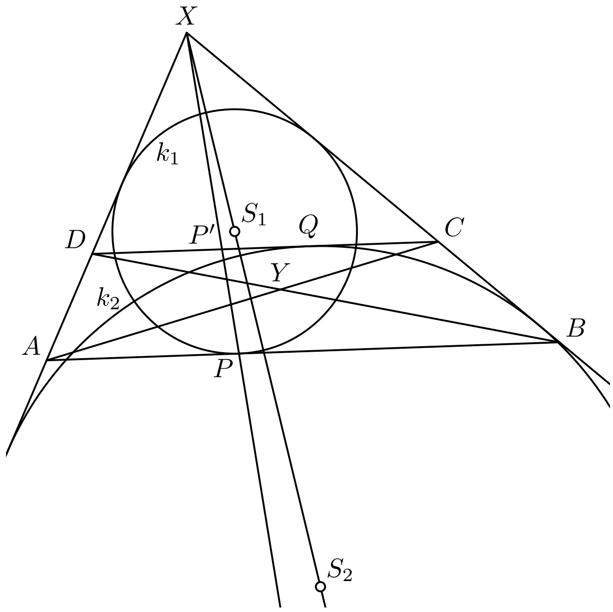
Na druhej strane, z rovnoľahlosti $\triangle ABX$ a $\triangle DCX$ dostávame rovnosť :

$$\frac{|DP'|}{|P'C|} = \frac{|AP|}{|PB|},$$

a teda musí platiť :

$$\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{|QC|}{|DQ|}.$$

Rovnako ako predtým, nech Y je priesečník úsečiek AC a BD. Trojuholníky $\triangle ABY$ a $\triangle CDY$ sú podobné, keďže nachádzame dva striedavé uhly z rovnobežiek AB a CD. Tým pádom sú tieto trojuholníky rovnoľahlé podľa bodu Y a keďže body P a Q delia strany AB a CD v rovnakých pomeroch, musia byť v tomto zobrazení navzájom obrazmi, a teda nutne musia ležať body P, Y, Q na jednej priamke.



3.9 Kódy Musím Stláčať

opravoval **Pedro**

Zadanie. *Potom, čo Kubko úspešne zdolal príšeru, ostáva mu len jediné. Musí zadať do trezora s drahokamom správny kód – postupnosť čísel. Aby sa trezor odomkol, musia medzi zadávanými číslami platiť správne nerovnosti.*

Majme ľubovoľnú postupnosť kladných reálnych čísel $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$ *Dokážte, že nerovnosť*

$$1 + a_n > a_{n-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

platí pre nekonečne veľa kladných celých čísel n.

Pri takomto type úloh sa nám celkom ponúka to dokázať sporom – budeme predpokladať, že nerovností typu > je v danej postupnosti iba konečný počet. Jediný predpoklad, ktorý v úlohe máme, je, že sa jedná o postupnosť kladných čísel, preto jediný spor, ktorý môžeme dostať je, že v postupnosti (v prípade platnosti opačného tvrdenia k zadaniu) budú nekladné čísla.

Ak je iba konečný počet nerovností >, potom určite existuje nejaká, ktorá je „najďalej" – t. j. existuje také k, že pre všetky $n > k$ platí

$$a_n + 1 \leq a_{n-1}\left(1 + \tfrac{1}{n}\right). \tag{1}$$

Dokážeme, že potom existuje také l, že $a_l \leq 0$. Odteraz, keď budeme niečo hovoriť o premennej n, tak budeme hovoriť iba o tých n, ktoré sú väčšie ako k.

Keď niečo chceme dokázať, často sa nám oplatí – ak nám to daná úloha ponúka – uvažovať najhorší možný prípad, aký pre nás môže nastať. Ak dokážeme, že tvrdenie je splnené pre najhorší prípad a zároveň že daný prípad je naozaj *najhorší* v zmysle platnosti nášho tvrdenia [4], tak sme vyhrali.

Intuitívne, najhorší prípad, aký môže nastať, je, keď pre všetky n nastáva v nerovnosti (1) rovnosť. Pretože potom jednotlivé a_i budú „najväčšie možné", a teda sa najviac budú brániť nekladnosti. Toto samozrejme musíme dokázať nejako poriadne, lebo intuícia môže často klamať. Ukážeme to nasledovne:

Nech $B = \{b_i\}_{i=k}^{\infty}$ a $C = \{c_i\}_{i=k}^{\infty}$ sú také postupnosti, že $b_k = c_k > 0$ a pre obe postupnosti platí (1), avšak pre postupnosť B sú všetky nerovnosti dosahované s rovnosťou. Ukážeme, že potom $\forall n > k$ platí $c_n \leq b_n$. Opäť sporom, predpokladajme, že existuje také m, pre ktoré $c_m > b_m$ a nech toto m je najmenšie možné s danou vlastnosťou (kombinácia sporu a extremálneho princípu je opäť veľmi silný a spoľahlivý dôkazový postup). Potom, vďaka (1) môžeme písať:

$$c_{m-1}\left(1 + \tfrac{1}{m}\right) - 1 \geq c_m > b_m = b_{m-1}\left(1 + \tfrac{1}{m}\right) - 1.$$

Keď sa pozrieme na krajné strany série nerovností, tak po použití jednoduchých ekvivalentných úprav dostávame $c_{m-1} > b_{m-1}$, čo je spor s tým, že m bolo najmenšie číslo s platnosťou danej nerovnosti.

Stačí nám teda ukážať, že v postupnosti B existuje nekladné číslo. Vyjadrime si teraz člen b_n len pomocou b_k: [5]

$$\begin{aligned} b_n &= b_{n-1}\frac{n+1}{n} - 1 = \left(b_{n-2}\frac{n}{n-1} - 1\right)\frac{n+1}{n} - 1 = b_{n-2}\frac{n+1}{n-1} - \frac{n+1}{n} - \frac{n+1}{n+1} = \\ &= \left(b_{n-3}\frac{n-1}{n-2} - 1\right)\frac{n+1}{n-1} - \frac{n+1}{n} - \frac{n+1}{n+1} = b_{n-3}\frac{n+1}{n-2} - \frac{n+1}{n-1} - \frac{n+1}{n} - \frac{n+1}{n+1} = \dots \\ \dots &= b_k\frac{n+1}{k+1} - \sum_{i=k+2}^{n+1}\frac{n+1}{i}. \end{aligned}$$

Sledujme teraz rozdiel b_n a b_{n-1}:

$$b_n - b_{n-1} = b_k\frac{n+1}{k+1} - \sum_{i=k+2}^{n+1}\frac{n+1}{i} - b_k\frac{n}{k+1} + \sum_{i=k+2}^{n}\frac{n}{i} = \frac{b_k}{k+1} - 1 - \sum_{i=k+2}^{n}\frac{1}{i} = \frac{b_k}{k+1} - 1 + \sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}.$$

Postupnosť $S = \{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\}_{i=1}^{\infty}$ sa nazýva *harmonický rad* a existuje nespočetné množstvo elegantných, aj neelegantných dôkazov, že táto postupnosť diverguje, t. j., intuitívne povedané, že členy postupnosti S rastú s ras-

[4] Formálne, nech P je predpoklad našej úlohy, nech B je nejaký prípad a nech pre všetky možné prípady C platí $(P \Rightarrow B) \Rightarrow C$. Potom $(P \Rightarrow B) \Rightarrow (P \Rightarrow C)$.

[5] Pre tých, čo nepoznajú ten zvláštny symbol, ktorý sa nachádza na konci nasledujúceho odvodzovania, odporúčam: https://cs.wikipedia.org/wiki/Sumace

túcim n nad všetky medze až do samého neba. Trochu formálnejšie: $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = +\infty$, alebo, kto nevie čo je limita, tak pre všetky $c \in \mathbb{R}$ existuje také $n_0 \in \mathbb{N}$, že pre všetky $n > n_0$: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} > c$.

My si ukážeme jeden z nich (asi najznámejší). [6] Myšlienku si ukážeme na ôsmom člene postupnosti:

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} >$$

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = 1 + 1/2 + 1/2 + 1/2 = \tfrac{3+2}{2}.$$

Vo všeobecnosti (ľahko možno uvidieť):

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{2^m} > \tfrac{m+2}{2}.$$

Keďže postupnosť S je rastúca, tak touto hodnotou sú ohraničené aj všetky ďalšie členy S po nasledujúcu mocninu dvojky. Vidíme teda, že postupnosť rastie nad všetky medze.

Vrátiac sa späť k našej úlohe, ukázali sme, že rozdiel $b_n - b_{n-1} = \frac{b_k}{k+1} - 1 + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ (kde prvé tri členy sú iba konštanta) bude klesať a klesať, až raz bude určite záporný a aj potom bude stále len klesať a klesať. To je ale rozdiel dvoch po sebe idúcich členov postupnosti B. Teda postupnosť B, bez ohľadu na veľkosť b_0, raz padne pod nulu. Teda aj postupnosť C, čo je len posunutá postupnosť A, raz padne pod nulu, čo je spor s tým, že naša postupnosť je nezáporná. A to je koniec.

3.10 Krajiny Moje Svadobno-cestové

opravoval **Jožo**

Zadanie. *Veronika a Cd sa chystajú na svadobnú cestu do Afriky. Veronika si vyberá z krajín K_3, K_4, K_5, …. Pre celé číslo $n \geq 3$, sa v krajine K_n nachádza $2n$ miest A_1, A_2, …, A_n, B_1, B_2, …, B_n. Nasledovné dvojice miest (a žiadne iné) sú spojené priamou obojsmernou leteckou linkou:*

- *mesto A_i s mestom B_i pre každé celé i $(1 \leq i \leq n)$;*
- *mesto A_i je spojené s mestom A_j práve vtedy, keď $n \mid i - j + 1$ alebo $n \mid i - j - 1$;*
- *mesto B_i je spojené s mestom B_j práve vtedy, keď $n \mid i - j + 2$ alebo $n \mid i - j - 2$.*

Veronika chce ísť len do krajiny, kde je možné spraviť okružnú cestu, na ktorej navštívi každé mesto práve raz (a vráti sa do mesta, kde začala). Medzi mestami sa možno presúvať len leteckými linkami. Nájdite všetky celé čísla $n \geq 3$ také, že Veronika chce ísť do krajiny K_n.

Príklad. Pre $n = 5$ sú letecké linky práve medzi týmito dvojicami miest:

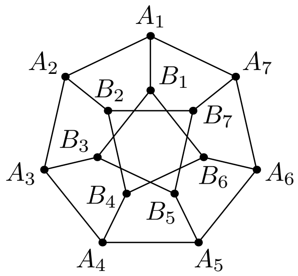
- $\{A_1, B_1\}$, $\{A_2, B_2\}$, $\{A_3, B_3\}$, $\{A_4, B_4\}$, $\{A_5, B_5\}$;
- $\{A_1, A_2\}$, $\{A_2, A_3\}$, $\{A_3, A_4\}$, $\{A_4, A_5\}$, $\{A_5, A_1\}$;
- $\{B_1, B_3\}$, $\{B_2, B_4\}$, $\{B_3, B_5\}$, $\{B_4, B_1\}$, $\{B_5, B_2\}$.

Predslov

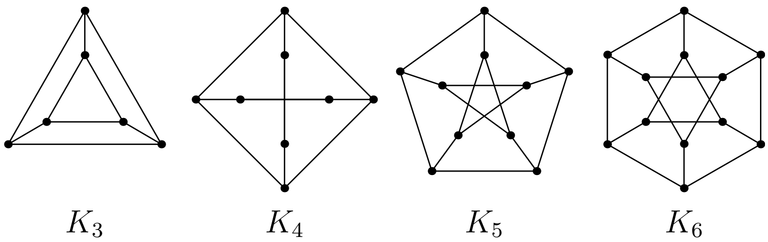
Najskôr sa poďme prehrýzť tým, ako sú mestá pospájané. Prvá odrážka je pomerne jasná. Aby sme zistili, čo hovorí druhá, je dobré skúsiť si nájsť všetky vyhovujúce dvojice i, j opísané danou podmienkou (kľudne aj vyskúšaním všetkých možností). Keď to spravíme, zistíme, že sú vlastne spojené mestá A_1 a A_2, A_2 a A_3, …, A_{n-1} a A_n, A_n a A_1. Teda A-čkové mestá sú pospájané do kruhu. Podobne, keď si B-čkové mestá usporiadame do kruhu, tak letecké linky budú lietať ob mesto ďalej, teda medzi B_1 a B_3, B_2 a B_4, …, B_{n-1} a B_1, B_n a B_2. Preto jedným pekným spôsobom, ako si môžeme kresliť takéto krajiny je nakresliť si mestá typu A do vonkajšieho

[6] https://cs.wikipedia.org/wiki/Harmonick%C3%A1_%C5%99ada

kruhu a mestá typu B do vnútorného kruhu. Krajinu K_7 môžeme vidieť na obrázku 1 a niekoľko ďalších malých krajín (už bez označenia miest) na obrázku 2.



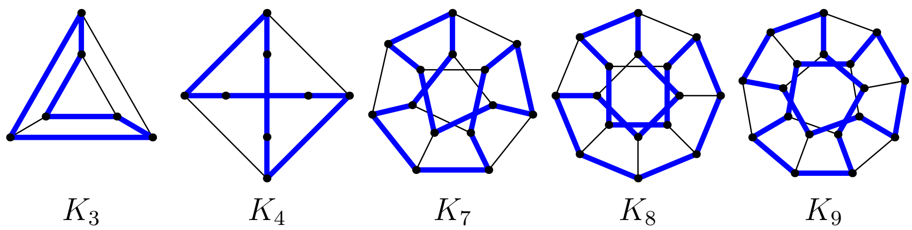
Obrázok 1: *Krajina K_7 aj s označením miest*



Obrázok 2: *Znázornenie niekoľkých malých krajín*

Táto úloha je do istej miery pekne hravá, aspoň tá časť, ktorá zahŕňa hľadanie okružných ciest v tých krajinách, v ktorých ide spraviť. Treba skúšať, všímať si a hľadať pekné vzory. Dosť nám pri tom pomôže to, že z každého mesta lietajú práve tri linky. Preto práve dve z nich budú použité v okružnej ceste a práve jedna z nich bude nepoužitá. Keď nájdeme nejakú nepoužitú linku, tak vieme, že všetky ostatné linky, ktoré lietajú z jej dvoch koncových miest musia byť použité. Taktiež linka musí byť nepoužitá, keď by sme s jej použitím dostali okruh, ktorý neprechádza všetkými mestami. Takéto a podobné úvahy nám môžu značne pomôcť pri hľadaní okružných ciest.

Takýmto skúšaním možno prísť na to, že okružnú cestu možno spraviť vo všetkých krajinách K_n, v ktorých n nie je tvaru $6k + 5$. Príklady okružných ciest v niektorých malých krajinách sú znázornené na obrázku 3.



Obrázok 3: *Okružné cesty pre niektoré malé krajiny*

V našom vzorovom riešení najprv opíšeme okružné cesty v týchto krajinách. Potom ukážeme, že pre $n = 6k+5$ nemožno spraviť v krajine K_n okružnú cestu. V celom našom riešení budeme indexy miest brať vždy modulo n. To znamená, že keď niekde napíšeme mesto X_i ($X \in \{A, B\}$) s indexom i mimo rozsahu 1, 2, …, n, tak tým myslíme mesto X_j, pre ktoré index j dáva po delení číslom n rovnaký zvyšok ako i. Napríklad $A_{2n+1} = A_1$, $A_{-3} = A_{n-3}$.

Konštrukcie

Nájsť okružnú cestu pre párne n je azda najjednoduchšie. Zjavne stačí prejsť mestami v poradí

$$A_1,\ A_2,\ B_2,\ B_4,\ \ldots,\ B_{n-2},\ B_n,\ A_n,\ A_{n-1},\ \ldots,\ A_4,\ A_3,\ B_3,\ B_5,\ \ldots,\ B_{n-1},\ B_1,\ A_1.$$

Pre $n = 6k + 3$, kde $k \geq 1$, spravíme nasledovnú okružnú cestu:

- Prechádzame mestami A_{6i+1}, A_{6i+2}, A_{6i+3}, B_{6i+3}, B_{6i+5}, B_{6i+7} pre i postupne rovné $0, 1, \ldots, k-1$.
- Ďalej prejdeme mestami A_{6k+1}, A_{6k+2}, A_{6k+3}, B_{6k+3}, B_2, B_4, čím sa dostaneme opäť k malým indexom.
- Ešte raz prehádzame v smere rastúcich indexov mestami A_{6i+4}, A_{6i+5}, A_{6i+6}, B_{6i+6}, B_{6i+8}, B_{6i+10} pre i postupne rovné $0, 1, \ldots, k-1$. Skončíme tak v meste $B_{6k+4} = B_1$, z ktorého sa vrátime späť do mesta A_1, kde sme začali.

Konštruckiu pre $n = 3$ sme uviedli na obrázku 3 Pre $n = 6k + 1$, kde $k \geq 1$, spravíme nasledovnú okružnú cestu:

- Začneme najskôr s mestami A_5, A_4, A_3, B_3, B_1, A_1, A_2, B_2, B_4, B_6.
- Potom prechádzame mestami A_{6i}, A_{6i+1}, A_{6i+2}, B_{6i+2}, B_{6i+4}, B_{6i+6} pre i postupne rovné $1, 2, \ldots, k-1$.
- Následne prejdeme mestami A_{6k}, A_{6k+1}, B_{6k+1}, B_{6k-1}, čím sa otočíme.
- Pokračujeme späť v opačnom smere A_{6i+5}, A_{6i+4}, A_{6i+3}, B_{6i+3}, B_{6i+1}, B_{6i-1} pre i postupne rovné $k-1$, $k-2, \ldots, 1$.

Všetky opísané postupnosti miest sú zjavne okružnými cestami.

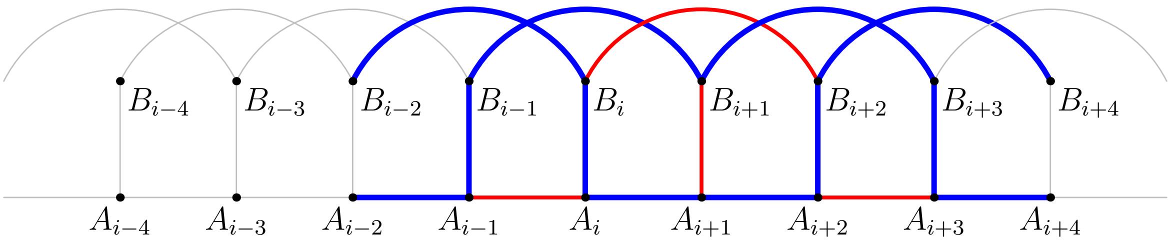
Nevyhovujúce krajiny

Ostávajú má už len $n = 6k + 5$, o ktorých ukážeme, že v nich nie je možné spraviť okružnú cestu. Začneme s najmenším prípadom $n = 5$. Krajina K_5 je pekne symetrická, preto môžeme celkom ľahko prebrať všetky možnosti. BUNV (bez ujmy na všeobecnosti) okružná cesta pôjde linkou B_1A_1 a stále si môžeme BUNV povedať, že pokračuje linkou A_1A_2. Z toho dostávame, že linka A_1A_5 nebude použitá. Preto musia byť použité linky B_5A_5 a A_5A_4. Ak by linka A_3B_3 nebola použitá, tak by musela byť použitá každá z liniek A_2A_3, A_3A_4, B_1B_3, B_3B_5, čím by sa nám použité linky uzavreli skôr ako by prešli všetky mestá. Preto musí byť linka A_3B_3 použitá. Dostali sme sa opäť do symetrickej situácie, preto si BUNV môžeme povedať, že použitá je linka A_2A_3. Potom linka A_3A_4 je nepoužitá, teda A_4B_4 je použitá. Aby sme nedostali kratšiu okružnú cestu, tak aj linka B_1B_3 je nepoužitá. Preto sú použité linky B_1B_4 a B_3B_5. Dostali sme tak opäť okružnú cestu, ktorá vynechala jednu možnosť. Žiadne iné možnosti nám neostali, preto v krajine K_5 okružnú cestu nenájdeme.

Predpokladajme teraz, že v niektorej krajine K_n, kde $n = 6k + 5$, možno spraviť okružnú cestu. Vyberme si navyše takú krajinu, ktorá má najmenší počet miest. Jej okružnú cestu si označme C. Pozrime sa na mestá typu A. Postupnosť k miest A_i, A_{i+1}, $\ldots$, A_{i+k-1} takú, že nimi za radom prechádza okružná cesta C a taktiež prechádza aj linkami A_iB_i a $A_{i+k-1}B_{i+k-1}$ nazveme *úsekom*. Počet miest typu A v úseku, teda číslo k, nazveme *dĺžkou úseku*. Dĺžka každého úseku je zjavne aspoň 2.

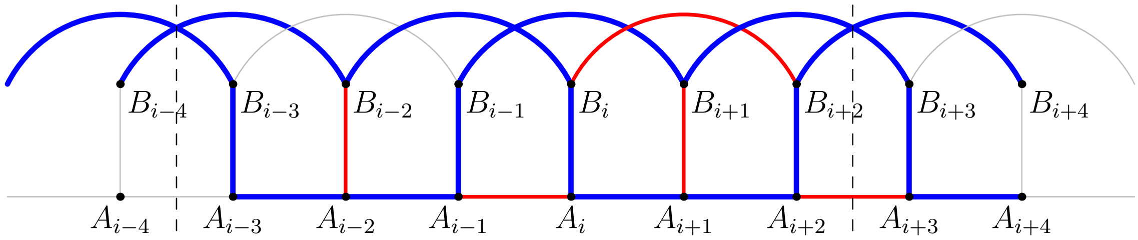
Okružná cesta C rozdelí okruh miest typu A na niekoľko úsekov. Keďže súčet dĺžok úsekov je n, čo je nepárne číslo, aspoň jeden úsek musí mať nepárnu dĺžku. Nech je to úsek A_i, A_{i+1}, $\ldots$, A_{i+k-1}, ktorý si pomenujeme U. Nech jeho dĺžka k je aspoň 5. Keďže linky $A_{i+2}B_{i+2}$, $A_{i+4}B_{i+4}$, $\ldots$, $A_{i+k-3}B_{i+k-3}$ sú nepoužité, musia byť použité linky B_iB_{i+2}, $B_{i+2}B_{i+4}$, $\ldots$, $B_{i+k-3}B_{i+k-1}$. Tieto linky však spolu s úsekom U vytvoria okruh.

Preto je náš úsek U dlhý $k = 3$. Linka $A_{i+1}B_{i+1}$ nie je použitá, preto musia byť použité linky $B_{i-1}B_{i+1}$ a $B_{i+1}B_{i+3}$. Z nepoužitých liniek B_iB_{i+2}, $A_{i-1}A_i$ a $A_{i+2}A_{i+3}$ zase dostaneme použité linky B_iB_{i-2}, $B_{i+2}B_{i+4}$, $A_{i-2}A_{i-1}$, $A_{i-1}B_{i-1}$, $B_{i+3}A_{i+3}$ a $A_{i+3}A_{i+4}$. Dostaneme tak stav ako na obrázku 4.



Obrázok 4: *Okolie úseku dĺžky 3*

Pozrime sa, aké úseky sa nachádzajú vedľa nášho úseku U. Pokiaľ je linka $A_{i-2}B_{i-2}$ použitá, dostávame, že úsek U susedí s úsekom dĺžky 2. Podobne by sme úsek dĺžky 2 dostali, ak použijeme linku $A_{i+4}B_{i+4}$. Ak by úsek U z oboch strán obklopovali úseky dĺžky 2, dostali by sme okruh cez $2 \cdot 7 = 14 < 2n$ miest, čo nie sú všetky. Preto jedna z liniek $A_{i-2}B_{i-2}$, $A_{i+4}B_{i+4}$ musí byť nepoužitá. BUNV, nech je to $A_{i-2}B_{i-2}$. V takom prípade sú použité linky $B_{i-4}B_{i-2}$ a $A_{i-3}A_{i-2}$ a taktiež aj $A_{i-3}B_{i-3}$ a $B_{i-3}B_{i-5}$. Teda sme dostali ďalší úsek dĺžky 3 (pozri aj obrázok 5).



Obrázok 5: *Dva susedné úseky dĺžky 3*

Teraz vyhodíme z krajiny K_n všetkých $2 \cdot 6$ miest s indexmi od $i - 3$ po $i + 2$. Šesť liniek, ktoré lietali do týchto vyhodených miest zo zachovaných miest nahradíme linkami $A_{i-4}A_{i+3}$, $B_{i-4}B_{i+4}$ a $B_{i-5}B_{i+3}$. Táto krajina K' má stále okružnú cestu: Prechádza z mesta B_{i-4} po pôvodnej trase po mesto B_{i-5} a potom linkou $B_{i-5}B_{i+3}$. Ďalej pokračuje z mesta B_{i+3} do mesta B_{i+4} po pôvodnej trase a vráti sa linkou $B_{i+4}B_{i-4}$ naspäť na začiatok. Navyše, táto krajina K' je totožná s krajinou K_{n-6}, akurát má inak nazvané niektoré mestá. To je však spor, lebo krajina K_n bola vybraná ako krajina s najmenším počtom miest tvaru $6k + 5$, v ktorej možno spraviť okružnú cestu.

Týmto je náš dôkaz hotový, a teda Veronika chce ísť do krajiny K_n pre všetky celé čísla $n \geq 3$, ktoré nie sú tvaru $n = 6k + 5$.