Korešpondenčný matematický seminár
XLI. ročník, 2019/2020
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Riešenia 1. kola zimnej časti

1.1 Koláčik Mojej Starkej ($\kappa \leq 1$)

opravovali **Adam** a **Juro R.**

Zadanie. *Veronika našla na povale babičkin recept na famóznu angreštovo-broskyňovo-cviklovo-dyňovú tortu. V recepte tiež stojí, že ak sa pri pečení použije čarovný súčin ingrediencií, bude torta nielen chutná, ale aj rozdeliteľná medzi 12 ľudí. Veronike sa to však sprvu nezdalo.*

Pre štyri celé čísla a, b, c, d nazvime čarovný súčin hodnotu výrazu $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$. Pomôžte Veronike nájsť všetky štvorice celých čísel (a, b, c, d) také, že žiadne dve z nich nemajú rovnakú hodnotu a ich čarovný súčin sa dá vydeliť číslom 12 bezo zvyšku.

Chceme dokázať, že čarovný súčin je vždy deliteľný 12-timi. To platí, ak je deliteľný tromi aj štyrmi.

Najskôr dokážeme, že je deliteľný tromi. Môžeme si všimnúť, že $(a-b)$ $(a-c)$ $(a-d)$ $(b-c)$ $(b-d)$ $(c-d)$ sú všetky možné rozdiely medzi celými číslami a, b, c, d.

Aby rozdiel dvoch čísel $(k-l)$ bol deliteľný celým číslom n, k a l musia mať rovnaký zvyšok po delení n. Napríklad, aby $(k-l)$ bolo deliteľné dvoma, tak k a l musia mať rovnaký zvyšok po delení dvoma.

Sú len tri možné zvyšky po delení tromi: 0, 1 alebo 2. Teda aspoň dve z čísel a, b, c, d budú mať rovnaký zvyšok po delení tromi. Rozdiel týchto dvoch čísel bude deliteľný tromi a čarovný súčin bude preto deliteľný tromi.

Teraz potrebujeme dokázať ešte deliteľnosť štyrmi. Súčin bude deliteľný štyrmi, ak budú aspoň dva z rozdielov párne. Rozdiel dvoch čísel je párny, ak majú rovnakú paritu. Ak sú všetky z čísel a, b, c, d rovnakej parity, ich rozdiely budú párne. Ak sú tri čísla rovnakej parity a jedno je opačnej, tieto tri čísla vytvoria tri párne rozdiely. Napokon, ak sú dve čísla rovnakej parity a druhé dve opačnej, obe dvojice vytvoria párny rozdiel.

Súčin všetkých rozdielov bude vždy obsahovať aspoň dva párne rozdiely a preto bude vždy deliteľný štyrmi. Okrem toho sme ukázali, že bude deliteľný aj tromi a teda bude deliteľný aj 12-timi ako tvrdí zadanie.

1.2 Ktorá Minca Spadla ($\kappa \leq 2$)

opravovali **Kika** a **Veronika**

Zadanie. *Na Veronikinu oslavu a chutný koláčik prišla tiež Bea, ktorá si so sebou priniesla aj vrecúško s 10 mincami. Deväť z nich je obyčajných, ale desiata je falošná – má na oboch stranách znak. Bea vybrala z vrecúška náhodnú mincu, hodila ju a padol na nej znak. Aká je pravdepodobnosť, že minca, ktorou hodila, bola falošná?*

Pravdepodobnosť vieme vypočítať ako podiel priaznivých možností ku všetkým možnostiam ktoré mohli nastať. Všetkých strán mincí, ktoré mohli padnúť, je 20. Každá strana každej mince mohla padnúť s rovnakou pravdepodobnosťou 1/20. Vieme, že padol znak. Z 20 strán mincí vo vrecúšku je na 11 z nich znak. Každý zo znakov má rovnakú pravdepodobnosť, že padol. Na falošnej minci sú 2 z týchto znakov, preto pravdepodobnosť, že padla táto minca je 2/11.

Túto úlohu môžeme rátať aj všeobecnejším postupom, a to pomocou podmienenej pravdepodobnosti. Myšlienka je podobná, ale ideme na to v podstate opačne. Najprv sa zamyslíme, aká je pravdepodobnosť toho, že keď Bea hodí mincu z vrecúška padne znak a bude to jeden zo znakov na falošnej minci. Táto pravdepodobnosť je 2/20 (stane sa to v dvoch z 20 prípadov).

V tejto pravdepodobnosti sú ale zahrnuté aj prípady keď namiesto znaku padla druhá strana mince. My podľa zadania vieme, že znak padol, tieto prípady teda potrebujeme nejako odstrániť. To dosiahneme tak, že pravdepodobnosť, ktorú máme, predelíme pravdepodobnosťou toho, že padol znak (na akejkoľvek minci). To je 11/20, výsledná pravdepodobnosť teda bude znova $\frac{2/20}{11/20} = 2/11$.

1.3 Krivky Mám Súbežné ($\kappa \leq 3$)

opravovali **Gianetta** a **Kika B.**

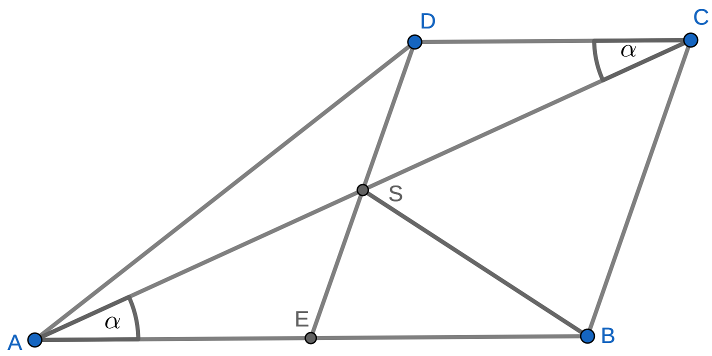
Zadanie. *Na svojom tanieri našiel Jožo nakreslený štvoruholník ABCD, ktorý mal strany AB a CD rovnobežné. Na uhlopriečke AC bol v strede vyznačený bod S. Jožo si všimol, že trojuholníky ABS a ACD majú rovnaký obsah a hneď vyhlásil, že priamka DS je preto rovnobežná s priamkou BC. Mal Jožo pravdu? Ak áno, ako na to prišiel? Ak nie, prečo?*

Potrebujeme nejakým spôsobom využiť znalosť že trojuholníky ABS a ACD majú rovnaký obsah. Obsah trojuholníka XYZ vieme vypočítať podľa vzorca $S = \frac{1}{2}|XY||XZ| \sin|\sphericalangle YXZ|$. Všimnime si že uhly CAB a ACD sú striedavé a teda $|\angle SAB| = |\angle ACD| = \alpha$.

Podľa zadania

$$\frac{1}{2}|AB||AS| \sin\alpha = S_{\triangle ABS} = S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}|CA||CD| \sin\alpha. \tag{1}$$

Sínusy v (1) sú rovnaké, preto sa vykrátia. [1]



Zo zadania vieme $2|AS| = |CA|$. Po dosadení poslednej rovnosti do (1) dostaneme

$$|AB| = 2|CD|.$$

Označme priesečník priamky AB a DS ako bod E.

Z toho že uhly ASE a CSD sú vrcholové a teda rovnako veľké, vyplýva, že trojuholníky ASE a CSD majú rovnaké 2 uhly (teda všetky 3) a pretože $|AS| = |CS|$, sú zhodné. Potom $|AE| = |CD| = \frac{1}{2}|AB|$, takže $|BE| = |AB| - |AE| = |CD|$. Ďalej vieme, že uhly CDB a EBD sú navzájom striedavé, a teda rovnako veľké. Trojuholníky EBD a CBD sú zhodné podľa vety *sus*, pretože majú rovnaké veľkosti strán EB a CD, majú spoločnú stranu, a platí $|\sphericalangle EBD| = |\sphericalangle BDC|$.

Z toho vyplýva $|DE| = |BC|$. Teda $EBCD$ je rovnobežník, a priamka DE je totožná s priamkou DS, teda DS a BC sú rovnobežné.

[1] Zrejme sínus toho uhla nemôže byť 0, lebo ten uhol by musel mať hodnotu 0° alebo 180◦ a to v trojuholníku nie je možné

1.4 Kilá Musia Sedieť ($\kappa \leq 5$) opravovali **Dominik** a **Bea**

Zadanie. *Diana neverila Jožovi, že sú obsahy trojuholníkov ABS a ACD na jeho tanieri zhodné a tak sa ich rozhodla odvážiť. Pri tomto úkone sa jej akurát tak podarilo úspešne rozbiť Veronike váhu. Veronike tak neostáva nič iné, iba si objednať novú sadu[2] závaží.*

Hmotnosť každého závažia môže byť ľubovoľné kladné reálne číslo. Veronika chce, aby sa jej závažia dali rozdeliť na 5 kôpok, z ktorých každá váži rovnako veľa. Podobne chce aj to, aby sa závažia dali takto rozdeliť na 9 rovnako vážiacich kôpok. Najmenej koľko závaží musí Veronika objednať? Aké hmotnosti majú mať?

Na riešenie úloh ako je táto, je potrebné myslieť na to, že nestačí len nejaké riešenie nájsť, ale aj dokázať, že toto riešenie je najlepšie možné. V našom prípade to znamená nájsť najmenší počet závaží, ktoré vieme rozdeliť na 5 a zároveň aj 9 rovnako vážiacich kôpok. Taktiež treba dokázať, že menší počet závaží by sme takýmto spôsobom nevedeli rozdeliť.

Označme M hmotnosť všetkých závaží, $x = \frac{M}{5}$ hmotnosť kôpky pri rozdelení na 5 kôpok, podobne $y = \frac{M}{9}$. Medzi x a y je teda takýto vzťah: $x = \frac{9y}{5}$.

Poďme nájsť najmenší možný počet závaží. Keďže celkovú hmotnosť delíme na deväť častí, závaží musí byť aspoň deväť. Je zrejmé, že deväť závaží s rovnakou hmotnosťou nevieme rozdeliť do piatich rovnako ťažkých kôpok. Pozrime sa, čo sa stane, ak by závaží bolo 10. Pri rozdelení na deväť častí by osem kôpok tvorilo práve jedno závažie s hmotnosťou y. Dve závažia by tvorili deviatu kôpku. Ak by sme takúto sadu závaží chceli rozdeliť do piatich kôpok, určite by na niektorej z nich boli aspoň dve s hmotnosťou y. To by ale znamenalo, že súčet hmotností závaží na tejto kôpke by bol aspoň $2y$. My ale vieme, že $x = \frac{9y}{5} < 2y$.

Z tohto dôvodu chceme mať nanajvýš 5 závaží s hmotnosťou y. Koľko závaží na to potrebujeme? Po podobných úvahách ako v predchádzajúcom odseku prídeme na to, že potrebujeme aspoň 13 závaží. Lebo pri rozdelení na 9 kôpok máme najviac 5 závaží s hmotnosťou y, teda na aspoň 4 kôpkach musia byť aspoň 2 závažia. Poďme zistiť, či nám bude toľkoto závaží stačiť.

Majme 5 závaží s hmotnosťou y.[3] Okrem nich potrebujeme 8 iných závaží, ktoré majú spĺňať nasledujúce podmienky:

- závažia sa dajú rozdeliť na 4 kôpky s hmotnosťou y
- závažia sa dajú rozdeliť na 5 kôpok s rovnakou hmotnosťou

Tieto podmienky spĺňa napríklad takáto sada: $y, y, y, y, y, \frac{4y}{5}, \frac{4y}{5}, \frac{4y}{5}, \frac{4y}{5}, \frac{y}{5}, \frac{y}{5}, \frac{y}{5}, \frac{y}{5}$.

Ukážme si ešte, ako sa dá rozdeliť na 5 respektíve 9 kôpok.

- rozdelenie na 9 kôpok: 5 kôpok po y, 4 kôpky po $\frac{4y}{5} + \frac{y}{5}$
- rozdelenie na 5 kôpok: 4 kôpky po $y + \frac{4y}{5}$, 1 kôpka $y + \frac{y}{5} + \frac{y}{5} + \frac{y}{5} + \frac{y}{5}$

Týmto sme dokázali, že Veronike bude stačiť objednať 13 závaží s vyššie uvedenými hmotnosťami.

1.5 Každý Miluje Sladkosti ($\kappa \leq 8$) opravovali **Tomáš** a **Robber-ta**

Zadanie. *Zatiaľ, čo ostatní vedúci riešili problémy s váhou, Ondrej, Dominik a Tomáš sa rozhodli rozdeliť si n rovnakých cukríkov, ktoré nevinne ležali na stole. Chcú si ich rozdeliť tak, aby každý z nich dostal párny[4] počet*

[2] Za sadu považujeme ľubovoľný kladný počet závaží ľubovoľnej hmotnosti.
[3] Hľadáme jednu konkrétnu sadu závaží, preto ak nájdeme riešenie, úlohu nemusíme riešiť pre iné prípady.
[4] Nula je párne číslo.

cukríkov, alebo aby každý z nich dostal nepárny počet cukríkov. V závislosti od hodnoty kladného celého čísla n určte počet spôsobov[5]*, ktorými si môžu chlapci cukríky rozdeliť.*

Všetky cukríky sú rovnaké. Rozdeľme si úlohu na dva prípady, keď je n párne a keď je n nepárne. Pozrime sa najprv na prípad, keď je počet cukríkov párny. Ak je n párne, tak nemôžu všetci traja dostať nepárny počet cukríkov, pretože súčet troch nepárnych čísel je nepárne číslo, čo je v spore s tým, že n je párne. Takže každý chlapec dostane párny počet cukríkov. Aby sme zaistili, že všetci dostanú párny počet cukríkov, môžeme dať cukríky do „balíčkov" po dvoch a rozdeľovať tie. Máme $k = n/2$ rovnakých balíčkov. Chlapci z nich môžu dostať ľubovoľne veľa, aj 0, ale musíme rozdeliť všetkých k balíčkov. Dajme si tieto balíčky do radu. Teraz chceme rad balíčkov rozdeliť na tri časti. Hranice medzi tromi úsekmi vyznačíme pomocou dvoch „zarážiek". Prvý úsek dostane Ondro, druhý Dominik a tretí Tomáš. Zarážky nám jednoznačne určia, kto koľko cukríkov dostane. Zarážku môžeme dať aj na kraj (vtedy je prvý alebo posledný úsek 0). Medzier, kam môžeme dať zarážku aj s okrajmi je $k + 1$.

Vezmime si prípad, keď druhý úsek, prislúchajúci Dominikovi nie je 0. To je presne vtedy, keď zarážky nie sú v rovnakej medzere. Spôsobov ako do týchto $k + 1$ medzier umiestniť 2 zarážky vyjadruje kombinačné číslo

$$\binom{k+1}{2} = \frac{(k+1)k}{2}.$$

Keď Dominik nič nedostane, tak zarážky musia byť v rovnakej medzere. Všetkých medzier je $k + 1$, vyberáme jednu z nich, do ktorej dáme obe zarážky, čiže máme $k + 1$ možností.

Počet všetkých spôsobov, ako rozdeliť balíčky pri párnom n teda je

$$\frac{(k+1)k}{2} + k + 1 = \frac{(k+1)k + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(n+2)(n+4)}{8}.$$

Teraz sa pozrime na prípad, keď je n nepárne. Všetci traja nemôžu dostať párny počet cukríkov, pretože súčet troch párnych čísel je párne číslo, čo je v spore s nepárnym n. Takže všetci traja chlapci musia dostať nepárny počet cukríkov a musia dostať aspoň jeden (0 je párne číslo). Každý chlapec dostane 1 cukrík plus nejaký párny počet cukríkov. Dajme každému chlapcovi ten jeden nutný cukrík, ktorý musí dostať. Ostane nám $n - 3$ cukríkov, čo je už párny počet. Z nich musí každý dostať tiež párny počet. Týchto $n - 3$ cukríkov rozdelíme rovnako, ako sme to urobili, keď bolo n párne. Takže pre nepárne n je rovnako veľa spôsobov ako pre párne $n - 3$, teda:

$$\frac{((n-3)+2)((n-3)+4)}{8} = \frac{(n-1)(n+1)}{8}.$$

Ešte stojí za to spomenúť, že v prípade keď $n = 1$ je to rovnako ako pre $n = -2$ nula spôsobov, pretože pri $n = -2$ nevieme rozdeľovať záporný počet cukríkov. Takisto ak máme 1 cukrík, nevieme ho rozdeliť trom chlapcom tak aby mal každý nepárny počet cukríkov.

1.6 Krátenie Mocniny Sedemnástky

opravovali **Juro** a **Mišo**

Zadanie. *Jerry s Pedrom sa zase chceli zahrať počas oslavy videohru. Na to však najprv museli rozdeliť 17 farebných káblov do správnych portov. Tak sa v tom zamotali až musel prísť Vodka, ktorý im prisľúbil, že im pomôže, ak vyriešia nasledovnú úlohu:*

Koľko existuje prirodzených čísel n, pre ktoré je číslo $17^{2019} \cdot n$ deliteľné číslom $17 + 2n$?

[5] Dva spôsoby považujeme za navzájom rôzne, ak aspoň jeden z chlapcov má v každom z nich iný počet cukríkov.

Pri úlohách s deliteľnosťou sa často oplatí pozerať na prvočíselné delitele. Číslo $17^{2019} \cdot n$ ich už na prvý pohľad nemá práve veľa (len 17 a delitele n), a ešte k tomu číslo $17 + 2n$ má byť jeho deliteľom. Vezmime si preto nejaké prvočíslo p, ktoré delí $17 + 2n$. Toto prvočíslo musí potom deliť aj $17^{2019} \cdot n$.

Ak má prvočíslo deliť nejaký súčin, musí deliť prvého alebo druhého činiteľa. Ak p delí činiteľa 17^{2019}, potom nutne $p = 17$. Ak naopak $p \mid n$, potom $p \mid (17 + 2n) - 2n = 17$, takže opäť $p = 17$.

Zistili sme, že jediné prvočíslo, ktoré môže deliť $17 + 2n$ je 17, takže táto hodnota musí byť nejakou mocninou sedemnástky. Nech teda $17 + 2n = 17^k$ pre nejaké celé k. Aby bolo n prirodzené, musí platiť $k \geq 2$. Vyjadrením n a následným dosadením dostaneme

$$n = \frac{17^k - 17}{2},$$

$$17^k \mid 17^{2019} \cdot \frac{17^k - 17}{2},$$

a keďže delenie dvomi neovplyvňuje deliteľnosť 17, máme

$$17^k \mid 17^{2019} \cdot \left(17^k - 17\right).$$

Táto deliteľnosť bude platiť práve vtedy, keď sa prvočíslo 17 bude nachádzať v rozklade výrazu $17^{2019} \cdot (17^k - 17)$ aspoň k-krát. Keď máme súčin viacerých činiteľov, počet výskytov prvočísla v jeho rozklade bude rovný súčtu týchto počtov pre jednotlivé činitele (prvočísla sa ponásobia dohromady).

Prvý činiteľ (17^{2019}) je deliteľný 17 práve 2019-krát. Druhý činiteľ ($17^k - 17$) je zjavne deliteľný 17 aspoň raz. Predpokladajme teraz, že by bol deliteľný aspoň dvakrát, teda by platilo $17^2 \mid 17^k - 17$. Keďže $k \geq 2$, platí $17^2 \mid 17^k$. Po odčítaní z toho vyplýva, že $17^2 \mid 17$, čo však nemôže nastať.

Dostali sme teda, že bez ohľadu na hodnotu k, je náš výraz deliteľný 17 práve 2020-krát, takže si môžeme zvoliť ľubovoľné $2 \leq k \leq 2020$ a deliteľnosť bude splnená. Naopak, pre väčšie k splnená nebude. Keďže rôzne k nám dajú rôzne hodnoty n, existuje práve 2019 vyhovujúcich čísel n.

1.7 Kradnutie Mincí Strieborných

opravovali **Jožo** a **Pali**

Zadanie. *Vo videohre sa zlodejka Robber-ta vlámala do banky. Našla tam* 120 *vriec, v každom je po* 100 *rovnakých mincí. Avšak len jedno vrece je plné strieborných mincí. Mince v ostatných vreciach sú bezcenné, ale sú na nerozoznanie od strieborných. Vie, že strieborná minca váži* 9 *gramov a bezcenná váži* 10 *gramov. Robber-ta je ale na lúpež pripravená – kúpila si v Kanianke vreckovú váhu. Lenže, ako možno od kanianskej váhy očakávať, jej nosnosť je len* 1000 *gramov. V jednom kroku môže Robber-ta položiť na váhu ľubovoľné množstvo mincí (nie nutne z rôznych vriec) a váha ukáže ich celkovú hmotnosť. Ak však Robber-ta položí na váhu väčšiu hmotnosť ako* 1000 *gramov, váha sa pokazí, nič neukáže, exploduje a Robber-ta prehrá. Nájdite najmenší počet krokov, ktorý Robber-ta zaručene potrebuje na to, aby zistila, ktoré vrece obsahuje strieborné mince.*

Úvod

Na začiatku riešenia nám môžu napadnúť nejaké spôsoby, ako môže Robber-ta nájsť vrece so striebornými mincami (ďalej len *srieborné vrece*). Napríklad môže dať v každom kroku na váhu jedno vrece. Niektorých riešiteľov môže napadnúť postup často používaný v informatike: Robberta rozdelí vrecia na polovice a z jednej polovice vriec dá na váhu po jednej minci. Pokiaľ váha ukáže násobok desiatich, strieborné vrece je v nevybranej polovici, v opačnom prípade vo váženej polovici. Takto po prvom kroku dostaneme 60 vriec, z ktorých jedno bude strieborné. Opakovaním budeme dostávať postupne najviac 30, 15, 8, 4, 2, 1 vreco. Teda už po 7 krokoch nájdeme strieborné vrece. V informatike sa postup takéhoto typu nazýva *binárne vyhľadávanie*.

Musíme však pamätať na to, že pri takomto type úloh musíme dokázať, že sme skutočne našli najmenší počet krokov. Nie len preto, aby sme sa vyhli strhnutému počtu bodov za chýbajúce zdôvodnenie, ale aj preto, aby sme sa vyhli zlému výsledku. Hoci binárne vyhľadávanie sa zdá byť dosť efektívne, po bližšom zamyslení až tak nevyzerá. Totiž nijako nevyužíva to, že v každom vreci je až 100 mincí. Nevieme to nejako využiť na to, aby sme z váženia získali viac informácie?

Úlohu si najprv trochu pozmeníme. Pokúsime sa zistiť, koľko najviac vriec môže byť v banke, aby Robber-ta vedela nájsť strieborné na jedno váženie. Potom budeme uvažovať dve váženia a takto budeme pridávať váženia, kým budeme potrebovať. Takýto prístup nám umožní nájsť správne riešenie. Navyše, takto aj zdôvodníme, prečo Robber-te nemôže stačiť menší počet vážení.

Pripomíname, že do vašich riešení stačí napísať veci, ktoré sú potrebné pre správnosť riešenia. Nie je potrebné písať, čo ste skúšali a ako ste na riešenie prišli. Konkrétne, z tohoto vzorového riešenia by na úplné riešenie stačili nasledovné dve alebo posledné dve sekcie.

Riešenie – dolný odhad

Čo ak má Robber-ta iba jedno váženie? To, že vo vreciach je viac mincí, vie Robber-ta využiť tak, že vyberie z nich na váhu rôzne počty mincí. Ak má Robber-ta 14 vriec, tak vie z nich vybrať postupne po $0, 1, 2, \ldots, 12, 13$ mincí a dať ich na váhu. Váha sa nepreťaží lebo na nej je najviac $(0 + 1 + 2 + \cdots + 13) \cdot 10 = 910$ gramov. Ak váha ukáže $910 - s$ gramov, tak vieme, že na váhe muselo byť s strieborných mincí. Podľa toho Robber-ta nájde strieborné vrece. Teda na jedno váženie vie Robber-ta nájsť strieborné vrece spomedzi 14 vriec.

Ak by vriec bolo viac, tak Robber-ta nevie z každého vybrať na váhu iný počet – položila by tam aspoň $((0 + 1 + 2 + \cdots + 13) \cdot 10 + 14 \cdot 9 = 1036$ gramov, čím by prehrala.[6] Preto by sme mali dve vrecia, označme si ich R a J, z ktorých Robber-ta vážila rovnaký počet mincí. Robber-ta teda nevie rozlíšiť situácie, kedy sú strieborné mince vo vreci R a kedy sú vo vreci J. V oboch prípadoch jej váha dáva rovnaké informácie. Preto na jeden krok vie Robber-ta rozlíšiť najviac 14 vriec.

Čo ak má Robber-ta dva kroky váženia? Aby vedela strieborné vrece nájsť v druhom vážení, nesmie jej po prvom kroku ostať skupina aspoň 15 vriec, z ktorých v prvom vážení vybrala rovnaký počet mincí. Teda do prvého váženia môže Robber-ta vybrať najviac zo 14 vriec po žiadnej minci, najviac zo 14 vriec po jednej minci a rovnako po dvoch a troch minciach. Teraz môže mať Robber-ta na váhe najviac $(0 \cdot 14 + 1 \cdot 14 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 14) \cdot 10 = 840$ gramov. Aby nepreťažila váhu, môže ešte na ňu pridať po 4 mince z najviac 4 ďalších vriec. Teraz je na váhe $(0 \cdot 14 + 1 \cdot 14 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 14 + 4 \cdot 4) \cdot 10 - s = 1000 - s$ gramov, kde s je počet strieborných mincí. Teda opäť z ukázanej hmotnosti vieme zistiť, v ktorej skupine vriec sa nachádza strieborné. Ak by Robber-ta pridala na váhu čo i len jednu ďalšiu mincu, už by sa preťažila. Teda na dva kroky vie Robber-ta rozlíšiť najviac 60 vriec.

Týmto sme dokázali, že Robber-ta potrebuje aspoň tri kroky váženia. Teraz už nepotrebujeme zisťovať, koľko vriec je schopná rozlíšiť (môžete si to však premyslieť). Stačí nám opísať, ako rozlíši 120 vriec, čo ide celkom jednoducho – stačí nám v provom kroku rozdeliť váženie na polovicu.

Postup váženia

V prvkom kroku si Robber-ta vyberie 60 vriec a vyberie z nich po jednej minci na váhu. Ak váha neukáže násobok 10, Robber-ta pokračuje s vybranými vrecami, inak s nevybranými. V druhom kroku si Robber-ta

[6] Nie všetky mince vážia 10 gramov. V našom odhade uvažujeme prípad, kedy strieborné vrece je to, z ktorého sme vybrali najviac mincí. Ak by bolo iné vrece strieborné, mali by sme na váhe ešte väčšiu hmotnosť. Teda Robber-ta by tiež prehrala.

rozdelí 60 vriec na skupiny po 14, 14, 14, 14 a 4 vrecia. Skupiny si očísluje 0, 1, 2, 3, 4. Z každého vreca zo skupiny číslo i ($i \in \{0,1,2,3,4\}$) vyberie na váhu po i mincí. Váha ukáže hmotnosť $1000 - s$, kde s je číslo skupiny vriec so strieborným vrecom. Ďalej pokračuje s touto skupinou, ktorá má teda najviac 14 vriec. Vyberie z vriec postupne po 0, 1, …, 13 minciach na váhu. Z toho zistí počet strieborných mincí na váhe, z čoho jednoznačne vie, z ktorého vreca boli vybrané. V každom vážení sme na váhu vybrali najviac 100 mincí, čím sme ju isto nikdy nepreťažili.

Najmenší počet krokov, ktorý Robber-ta potrebuje na nájdenie strieborného vreca, je teda 3.

Iný spôsob dolného odhadu

Ukážeme ešte iný spôsob, ako môžeme zdôvodniť, prečo 2 kroky váženia Robber-te nestačia. V tomto prípade nám stačí okrem neho dopísať do riešenia postup váženia ako je v predchádzajúcej sekcii.

Predpokladajme, že by Robber-ta vedela nájsť strieborné mince len na dva kroky. V prvom vážení môže Robber-ta položiť na váhu najviac 100 mincí. Preto existuje aspoň 20 vriec, ktorých mince ešte neboli vážené. Ak by Robber-ta z každého z nich vybrala rôzny počet mincí, položila by na váhu aspoň $0 \cdot 9 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 9 + 3 \ldots 9 + \cdots + 19 \cdot 9 = 1710$ gramov, čo sa nemohlo stať. Preto existujú aspoň dve vrecia, označme si ich R a J, z ktorých Robber-ta v oboch krokoch dala na váhu rovnaký počet mincí. Robber-ta teda nevie rozlíšiť situácie, kedy sú strieborné mince vo vreci R a kedy sú vo vreci J. V oboch prípadoch jej váha dáva rovnaké informácie.

1.8 Kolmicu Musím Spraviť

opravovali **Marek** a **Števka**

Zadanie. *Vodka sa na oslave začínal nudiť, lebo Robber-ta už nebola s ním, ale vo videohre. A tak sa kamarát Jožo rozhodol, že ho zabaví svojou novou geometriou.*

Je daný trojuholník ABC, v ktorom platí $|AC| = 2|AB|$. Označme O stred kružnice opísanej tomuto trojuholníku. Os uhla BAC pretína stranu BC v bode D. Nech E je kolmý priemet O na AD. Ďalej nech F je bod na priamke AD rôzny od D, pre ktorý platí $|CD| = |CF|$. Dokážte, že uhly EBF a ECF majú rovnakú veľkosť.

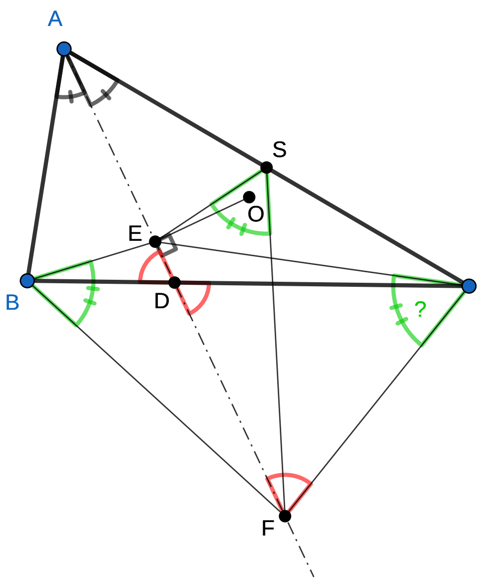
Vodka sa na úlohu pozrel, ihneď ju vyriešil a nudil sa ďalej...

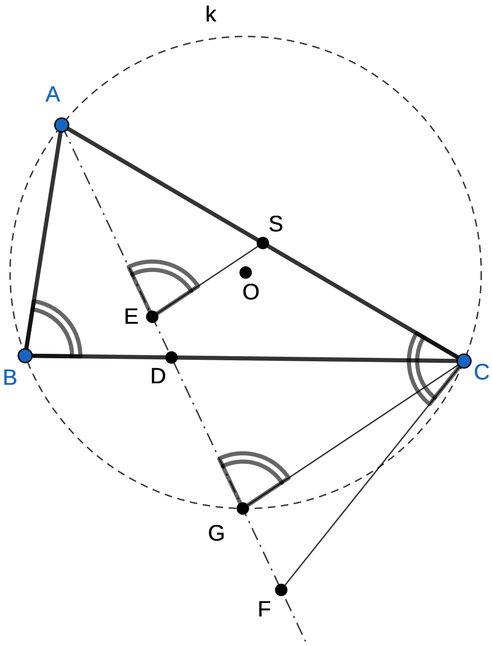
Na začiatok sa pokúsme vyťažiť niečo zo zadania. Keď si nakreslíme obrázok, asi ako prvé si poznačíme $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CAF|$, keďže AD je os uhla BAC. Tiež nám môže udrieť do očí, že $|CD| = |CF|$, z čoho vieme $|\sphericalangle CFD| = |\sphericalangle CDF|$, čo sa vďaka vrcholovým uhlom rovná $|\sphericalangle ADB|$. Takýto obrázok nás navádza k tomu, že trojuholníky ABD a ACF sú podobné.

Keďže zo zadania vieme, že $|AB| = \frac{1}{2}|AC|$, spolu s podobnými trojuholníkmi nás to istým spôsobom vedie k zadefinovaniu stredu strany AC, označme ho S. Keď ho dokreslíme do obrázka, os uhla BAC nás nabáda k osovej súmernosti podľa tejto osi. Práve vtedy sa bod B zobrazí na S. To nás zaujíma hlavne kvôli tomu, že potom $\sphericalangle EBF$ sa zobrazí na $\sphericalangle ESF$, keďže body E a F sú samodružné. Teda namiesto $|\sphericalangle EBF| = |\sphericalangle ECF|$ stačí ukázať $|\sphericalangle ESF| = |\sphericalangle ECF|$, a teda že 4-uholník $EFCS$ je tetivový.

To sa zvyčajne dokazuje buď pomocou obvodových uhlov, alebo vďaka tomu, že súčet jeho protiľahlých uhlov je $180°$. Keďže už z podobných trojuholníkov ABD a ACF vieme, že platí $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle SCF|$, chceli by sme ukázať aj rovnosť $|\sphericalangle SCF| = |\sphericalangle AES|$.

Ešte sme nevyužili, že bod E je kolmý priemet bodu O na priamku AD. Taktiež bod O je špeciálny tým, že je definovaný ako priesečník osí strán trojuholníka ABC. Z toho si môžme všimnúť, že 4-uholník $AEOS$ je tetivový. Preto si náš hľadaný uhol AES môžme preniesť na uhol AOS. Toto je už pomerne bežný a známy uhol, keďže z vety o stredovom a obvodovom uhle platí, že $|\sphericalangle AOC| = 2 \cdot |\sphericalangle ABC|$, a teda $|\sphericalangle AOS| = |\sphericalangle ABC|$. Z toho máme $|\sphericalangle SCF| = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle AES|$ a to sme chceli.





Teraz si musíme dať pozor na konfigurácie. Bod S je vždy bližšie k bodu A ako bod C, avšak to nemožno povedať o vzájomnej polohe bodov E a F. Ak bod F leží na polpriamke EA, vieme, že platí $|\sphericalangle FES| = |\sphericalangle SCF|$, a teda vďaka obvodovým uhlom ležia body F, E, C a S na kružnici (v tomto poradí).

Ak F leží na polpriamke opačnej k polpriamke EA, platí $|\sphericalangle FES| = 180° - |\sphericalangle AES| = 180° - |\sphericalangle SCF|$. Z toho vidíme, že súčet protiľahlých uhlov v 4-uholníku $SEFC$ je $180°$, a preto je tetivový (body sú na kružnici v poradí E, F, C, S). Ak $E = F$, rovnosť uhlov triviálne platí (keďže ich veľkosť je $0°$).

Iné riešenie

Ukážme si, ako inak možno dokázať tetivovosť 4-uholníka $EFCS$. Znova sme v bode, že chceme ukázať rovnosť uhlov $|\sphericalangle SCF| = |\sphericalangle AES|$. Taktiež už vieme, že $|\sphericalangle SCF| = |\sphericalangle ABC|$. Teda by sme chceli, aby platilo $|\sphericalangle AES| = |\sphericalangle ABC|$.

Môžme si všimnúť, že bod A leží na ramene oboch uhlov. Preto si prenesme uhol ABC po kružnici opísanej trojuholníku ABC tak, aby jedno jeho rameno ležalo na priamke EA. Označme si teda bod G taký, že G leží na opísanej kružnici a tiež na priamke EA.

V tomto momente chceme dokázať, že $|\sphericalangle AES| = |\sphericalangle AGC|$, kde body A, E, G ležia na priamke. Vďaka tomu je to ekvivalentné s tvrdením, že priamky ES a GC sú rovnobežné, resp. že úsečka ES je stredná priečka trojuholníka AGC. Môžme si premyslieť, že bod E je stred tetivy AG práve preto, že je kolmým priemetom bodu O na priamku AD. Preto naozaj platí $|\sphericalangle AES| = |\sphericalangle AGC| = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle SCF|$.

Samozrejme, existuje ešte mnoho ďalších riešení. Niektoré sú veľmi podobné tým vyššie uvedeným. Niektoré zas využívajú zaujímavé fakty, ako napríklad, že bod D je ťažiskom trojuholníka ACC', kde C' je obraz bodu C v osovej súmernosti podľa priamky AD.

1.9 Kuchtenie Múčnika Starkinho

opravovali **Marián** a **Majo**

Zadanie. *Po oslave sa Veronika vybrala do pivnice, kde našla ďalší babičkin recept. Tiež využíval rovnaké ingrediencie ako ten prvý, ale tentokrát ich miešal do čarovného štvorpomeru. Babička v recepte tvrdí, že z tohto koláča sa vždy naje aspoň* 0 *ľudí. Poďme to dokázať.*

Dokážte, že pre každú štvoricu kladných reálnych čísel a, b, c, d platí:

$$\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+d}+\frac{c-d}{d+a}+\frac{d-a}{a+b}\geq 0$$

Zistite, kedy nastáva rovnosť.

Dôkaz nerovnosti

O nejakom výraze máme ukázať, že nikdy nebude záporný. Keďže čísla a, b, c, d sú kladné, je aj ich súčet vždy kladný. Preto sú menovatele všetkých zlomkov výrazu na ľavej strane dokazovanej nerovnosti vždy kladné. To ale neplatí o ich čitateľoch. S číslami, ktoré môžu byť záporné, sa ale v nerovnostiach pracuje veľmi nepríjemne, lebo potom nemôžeme využívať niektoré známe nerovnosti ako napríklad AG-nerovnosť. Poďme preto najprv upraviť dokazovanú nerovnosť tak, aby boli všetky zlomky na ľavej strane vždy kladné.

Spraviť tieto zlomky kladnými vieme najľahšie tak, že k nim pripočítame nejaké konkrétne číslo. Tým sa menovatele zachovajú, no k čitateľu daného zlomku pripočítame nejaký násobok menovateľa tohto zlomku. Aby sme sa zbavili mínusov v čitateľoch a zároveň čitatele obsahovali čo najjednoduchší výraz, dáva zmysel pripočítať ku každému zlomku číslo 1. Pozrime sa, čo to spraví s prvým zo zlomkov:

$$\frac{a-b}{b+c}+1=\frac{a-b}{b+c}+\frac{b+c}{b+c}=\frac{a+c}{b+c}$$

Keď toto spravíme pre každý zo zlomkov, dostaneme na dokazovanie ekvivalentnú nerovnosť (nesmieme však zabudnúť pripočítať 4 na pravú stranu, 1 za každý zo zlomkov):

$$\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{c+a}{d+a}+\frac{d+b}{a+b}\geq 4$$

Síce sme týmto naoko sťažili to, čo chceme dokázať (nezápornosť nejakého výrazu sa zvyčajne ukazuje jednoduchšie ako to, že je niečo väčšie alebo rovné ako nejaké číslo), no na ľavej strane dokazovanej nerovnosti už máme iba kladné výrazy. Všimnime si, že zlomky na ľavej strane majú iba dva typy čitateľov: $a+c$ alebo $b+d$.

To nás môže navádzať na to, že by sa nám mohlo zísť to, že sa pozrieme na zlomky s rovnakým čitateľom. Pozrime sa najprv na zlomky s čitateľom $a+c$ a prepíšme ich do jemne krajšieho tvaru:

$$\frac{a+c}{b+c}+\frac{c+a}{d+a}=(a+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a}\right)$$

Tu si môžeme všimnúť ďalšiu zaujímavú vec – že každé z čísel a, b, c, d sa vyskytuje v niektorom z menovateľov druhej zátvorky práve raz. Zatiaľ ale nemáme spôsob, ako ich dať nejako dokopy. Keby sme ale vedeli nejako tieto zlomky prevrátiť, tak by sa pekne dali dokopy. Ak máme nejaké skúsenosti s nerovnosťami, tak tu by nám už malo napadnúť, že potrebujeme použiť AH-nerovnosť.

Na pripomenutie, AH-nerovnosť hovorí, že aritmetický priemer niekoľkých kladných reálnych čísel je vždy väčší alebo rovný ako ich harmonický priemer. Navyše nám hovorí, že rovnosť nastáva vtedy, keď sú všetky priemerované čísla rovnaké. Pre dve kladné reálne čísla x a y tak AH-nerovnosť vyzerá takto[7]:

$$\frac{x+y}{2}\geq\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$$

[7] Skús si rozmyslieť, že takáto nerovnosť pre dve čísla naozaj platí a že rovnosť v nej nastáva iba vtedy, keď $x=y$.

Keď teda použijeme AH-nerovnosť na čísla $x = \frac{1}{b+c}$ a $y = \frac{1}{d+a}$, dostaneme platnú nerovnosť:

$$(a+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a}\right) \geq (a+c)\frac{4}{(b+c)+(d+a)} = \frac{4(a+c)}{a+b+c+d}$$

Podobným spôsobom vieme dostať takúto nerovnosť aj pre zlomky s čitateľmi $b+d$. Platia tak určite tieto dve nerovnosti:

$$\frac{a+c}{b+c}+\frac{c+a}{d+a} \geq \frac{4(a+c)}{a+b+c+d}$$
$$\frac{b+d}{c+d}+\frac{d+b}{a+b} \geq \frac{4(b+d)}{a+b+c+d}$$

Ich sčítaním dostávame, že platí:

$$\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{c+a}{d+a}+\frac{d+b}{a+b} \geq \frac{4(a+c)}{a+b+c+d}+\frac{4(b+d)}{a+b+c+d} = \frac{4(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 4$$

Tým sme dokázali, že platí nami upravená nerovnosť. Tá je ale ekvivalentná s tou zo zadania, a tak sme ukázali, že platí aj tá.

Kedy nastáva rovnosť?

Zadanie od nás ale ešte chce, aby sme určili, kedy v tejto nerovnosti nastáva rovnosť. Na to musí nastať rovnosť vo všetkých nerovnostiach, ktoré sme použili. Použili sme avšak iba dve AH-nerovnosti, a tak práve v nich museli nastať rovnosti. Ako sme si už povedali, v AH-nerovnosti nastáva rovnosť iba vtedy, keď sú priemerované kladné reálne čísla rovnaké. Tie sú rovnaké v tomto prípade, ak platia pre jednotlivé AH-nerovnosti tieto vzťahy:

$$\frac{1}{b+c} = \frac{1}{d+a} \implies d+a = b+c$$
$$\frac{1}{c+d} = \frac{1}{a+b} \implies a+b = c+d$$

Keď sčítame tieto dve podmienky, dostávame:

$$2a+b+d = 2c+b+d \implies a = c$$

Dosadením naspäť napríklad do prvej z podmienok dostávame rovno $b = d$. Ľahko si overíme, že pre štvoricu kladných reálnych čísel (a,b,a,b) naozaj nastávajú rovnosti v oboch AH-nerovnostiach a aj v pôvodnej nerovnosti[8].

Takže sme ukázali, že dokazovaná nerovnosť platí pre všetky reálne čísla a aj to, že rovnosť v nej nastane pre všetky usporiadané štvorice (a,b,c,d) tvaru (a,b,a,b), kde a, b sú nejaké kladné reálne čísla.

1.10 Knižka Moja Stratená

opravoval **Pedro**

Zadanie. *Veronika v pivnici tiež našla starú ošúchanú knižku. Mimo iného v nej bola legenda o bájnom uhorskom kráľovstve a táto úloha:*

Dané sú prvočísla p a q také, že $q = 2p+1$. Dokážte, že existuje prirodzené číslo deliteľné q také, že jeho ciferný súčet v desiatkovej sústave je najviac 3.

Inšpirované skutočnou udalosťou a tiež riešením Lukáša Gáboríka.

[8] Takáto skúška ale nebola nutná, keďže to, kedy nastáva rovnosť, je pre AH-nerovnosť ekvivalenciou.

Najprv ošetrime jednoduchý prípad, a to že $q = 5$. Za tohto predpokladu je riešiaci násobok tohto čísla napríklad 10. Vidíme, že q nemôže byť rovné dvom ani trom, lebo by to nesedelo s tým, že $q = 2p + 1$, kde p je prvočíslo.

Teraz serióznejšia matika. Vhodní kandidáti na čísla s ciferným súčtom menším ako 4 sú mocniny desiatky, prípadne súčty niekoľkých mocnín desiatky. Preto nie je zlé sa hrať práve so zvyškami mocniny desiatky po delení q. Aplikujme Malú Fermatovu vetu na desiatku a upravíme:

$$\begin{aligned} 10^{q-1} \equiv 10^{2p} \equiv 1 &\pmod q, \\ 10^{2p} - 1 \equiv 0 &\pmod q, \\ (10^p - 1)(10^p + 1) \equiv 0 &\pmod q. \end{aligned}$$

Keďže q ako prvočíslo delí súčin zátvoriek v poslednej kongruencii, musí deliť aspoň jednu z nich (a môžeme si všimnúť, že dokonca práve jednu z nich). Ak $q \mid 10^p + 1$, tak sme vyhrali, lebo použijeme toto číslo ako príklad spomínaného čísla.

Uvažujme teda naopak, že $q \mid 10^p - 1$. Z toho ale vyplýva, že rád[9] prvku 10 modulo q delí prvočíslo p a teda je buď rovný 1, alebo p. Ak je rovný 1, potom musí platiť, že $10^1 \equiv 1 \pmod q$, a teda $q = 3$, čo je spor. Preto rád 10 modulo q je presne p.

Pozrime sa, aké zvyšky môže nadobúdať 10^x modulo q, pre $1 \leq x \leq p$. Zjavne prípad $10^x \equiv 0 \pmod q$ nemôže nastať, pre $q > 5$. Ak existuje x, že $10^x \equiv 2p \pmod q$, potom $10^x + 1$ je príkladom násobku q s požadovaným ciferným súčtom. Ak existuje x, že $10^x \equiv p \pmod q$, tak $2 \cdot 10^x + 1$ je oným príkladom (stále spĺňa podmienku o cifernom súčte).

V prípade, že ani jedna z predošlých možností nenastáva, musia byť zvyšky mocnín 10^x modulo q, v množine $\{1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, 2p-1\}$. Rozdeliac túto množinu na $p - 1$ dvojíc s rovnakým zvyškom po delení p a využijúc fakt, že zvyšky 10^x modulo q, pre $x \in \{1, 2, \ldots, p\}$ musia byť na základe vlastností rádu rôzne čísla, dostávame z Dirichletovho princípu, že aspoň jedna dvojica bude dosahovaná na oboch svojich prvkoch. Nech prislúchajúce mocniny 10, pre ktoré sa nadobúdajú dané zvyšky sú k, l. Potom zjavne $q \mid 10^k + 10^l + 1$ a zároveň toto číslo zrejme spĺňa podmienky zo zadania.

[9] v prípade, že ste ešte nepočuli o ráde, silno odporúčam pozrieť si prvý článok tohto pekného zborníku: http://iksko.org/files/sbornik5.pdf