Riešenia 2. kola zimnej časti

2.1 Kráľovná Milujúca Sedlákov ($\kappa \leq 1$)

opravoval **Marek**

Zadanie. *Kde bolo, tam bolo, bolo raz jedno Uhorské kráľovstvo. V tomto kráľovstve vládla kráľovná Kika. Kika však nebola iba taká hocijaká kráľovná, ale kráľovná Miest Spálených so zlatým trojuholníkom na čele.*

Majme rovnoramenný trojuholník ABC, v ktorom $|AB| = |AC|$. Bodom A veďme priamku p rovnobežnú so stranou BC. Kružnica so stredom v bode A, ktorá prechádza bodom C pretína priamku p v bode D takom, že uhol CAD je ostrý[1]*. Dokážte, že bod D leží na osi uhla ABC.*

Priamka DB bude osou uhla CBA vtedy, keď veľkosti uhlov CBD a DBA budú rovnaké a polovičné oproti veľkosti uhla CBA. My ukážeme, že veľkosť uhla DBA je polovičná oproti veľkosti uhla CBA.

Označíme $\alpha = |\sphericalangle BAC|$. Z rovnoramennosti trojuholníka ABC vieme, že

$$|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle ACB| = \frac{180^\circ - \alpha}{2}.$$

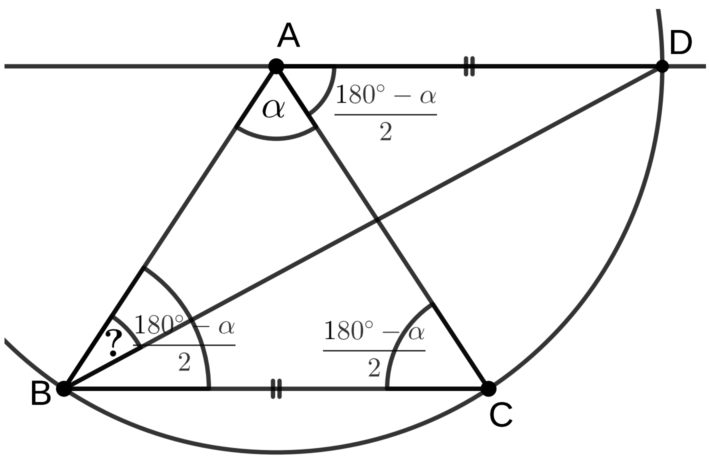
Nakoľko úsečka AD je rovnobežná s úsečkou BC, tak aj

$$|\sphericalangle CAD| = \frac{180^\circ - \alpha}{2}.$$

Nakoľko bod D je na kružnici s polomerom $|AC|$ a stredom v bode A, tak vzdialenosť $|AD| = |AC| = |AB|$. Preto je trojuholník ABD rovnoramenný a vieme vyjadriť veľkosť uhla ABD. Ten je

$$|\sphericalangle ABD| = \frac{180^\circ - |\sphericalangle BAD|}{2} = \frac{180^\circ - \alpha - \frac{180^\circ - \alpha}{2}}{2} = \frac{180^\circ - \alpha}{4}.$$

Vidíme, že $|\sphericalangle CBA| = 2 \cdot |\sphericalangle DBA|$, a preto je skutočne úsečka BD osou uhla CBA.



[1] Teda ak existujú dva možné body D, vezmime ten s ostrým uhlom.

2.2 Kubko, Medzinárodný Šašo ($\kappa \leq 2$)

opravoval **Dominik**

Zadanie. *Po tom, ako sa princ Ákos vrátil z vojny, zistil, že už nemal čo robiť so životom. Aby sa nenudil, dal si zavolať Jakuba, najslávnejšieho dvorného klauna široko-ďaleko. Avšak Jakub už mal tú česť sa s Ákosom spoznať a veľmi dobre si pamätal, že pán uhorský princ je nielen krvilačný, ale aj veľmi náladový. A tak sa stalo, že klaun dnes pre istotu princovi predvádzal iba svoje slávne čísla.*

Hovoríme, že prirodzené n-ciferné číslo také, že $3 \leq n \leq 9$, je slávne, ak spĺňa tieto dve podmienky:

- *číslo obsahuje každú cifru od 1 po n práve raz;*
- *pre každú cifru okrem prvých dvoch platí, že dvojnásobok danej cifry je väčší alebo rovný ako súčet dvoch predošlých cifier.*

a) *Ukážte, že žiadne štvorciferné číslo, ktoré je slávne, nemá cifru 4 ako druhú v poradí.*

b) *Zistite, na ktorých pozíciách sa môže nachádzať cifra 7 v sedemcifernom slávnom čísle.*

Pri riešení mnohých úloh, túto nevynímajúc, je dobré začať jednoduchými pozorovaniami. Skúsme to.

V našom prípade je dobré zamyslieť sa, kde sa v slávnom čísle môže nachádzať cifra 1. Vieme, že 1-ka bude v každom čísle, a teda je to pomerne všeobecný fakt, ktorý nám môže pomôcť. Druhé pravidlo nám hovorí, že pre každú z cifier okrem prvých dvoch platí, že jej dvojnásobok je aspoň taký ako súčet dvoch predošlých cifier. Dvojnásobok 1-ky je číslo 2. To je vždy menšie ako súčet akýchkoľvek dvoch iných cifier. Z toho vieme, že jednotka bude na niektorom z prvých dvoch miest. Podobne vieme ukázať, že 2-ka musí byť na prvých dvoch miestach alebo za dvojicou $1, 3$ v ľubovoľnom poradí. V tomto momente by sme mohli pokračovať s ďalšími ciframi, no my namiesto toho skúsime naše pozorovania využiť.

Prvé zistenie nám veľmi pomôže v časti a). Ak má byť totiž v štvorcifernom čísle 4-ka druhá, tak cifra 1 musí byť na prvom mieste. Ostali nám tak len dve možné čísla – 1423 a 1432. Ľahko overíme, že ani jedno z nich nie je slávne: v prvom $2 \cdot 2 < 1 + 4$, zatiaľ čo v druhom $2 \cdot 2 < 4 + 3$.[2]

Na úvod riešenia časti b) je dôležité povedať, že ak pre ľubovoľnú pozíciu nájdeme jedno číslo, ktoré je slávne, iné nám hľadať netreba. Zatiaľ čo ak chceme ukázať, že také neexistuje, potrebujeme to ukázať pre všetky možné čísla. Overme postupne každú pozíciu.

Ak by sa cifra 7 mala nachádzať na prvom mieste, za ňou musí byť podľa pozorovania 1-ka. Otázka je, kam môžeme dať 2-ku. Tá už nemôže byť na prvých dvoch miestach, teda ostala len možnosť, že je za dvojicou $1, 3$. Vieme, že 1-ka je druhá. Z toho musí byť 3-ka na treťom mieste, inak pre 2-ku miesto nenájdeme. Lenže $2 \cdot 3 < 1 + 7$, takže aj táto možnosť nás vedie k sporu. 7-ka preto na prvej pozícii byť nemôže.

Obe naše pozorovania využijeme aj pre prípad, že by 7-ka bola na druhej pozícii. 1-ka potom musí byť prvá a 2-ku už nemôžeme dať nikam. Teda ani na druhej pozícii 7-ka nebude.

Pre tretiu pozíciu ľahko overíme, že na prvých dvoch musí byť 1-ka aj 2-ka. Kam ale teraz dáme 3-ku? Na štvrtej pozícii byť nemôže a ani na žiadnej ďalšej, lebo jej dvojnásobok je vždy menší ako súčet dvoch čísel, ktoré sú od nej väčšie.[3] Takže zase nič.

Ak dáme 7-ku na štvrté miesto, aké číslo môže byť hneď za ňou? Môže to byť len číslo väčšie ako 4. Prečo? Dvojnásobok menších čísel je menší ako 7. Pre 4-ku to tak nie je, lenže to by musela byť presne pred sedmičkou 1-ka a z pozorovania vieme, že to tak byť nemôže. Preto na piatej pozícii je buď 5-ka alebo 6-ka. Na šiestej pozícii však potom nemôže byť nič menšie ako 6, z čoho vyplýva, že máme číslo tvaru $abc756d$. Lenže d musí byť opäť aspoň 6, čo nie je možné. Teda ani štvrtá pozícia nevyhovuje.

[2] Čitateľ môže tiež postrehnúť, že už z druhého pozorovania vieme, že dvojku nemáme kam dať.

[3] Menšie čísla sme už minuli.

Pre ďalšie pozície nie je náročné[4] nájsť slávne čísla. Sú nimi napríklad 1243756, 1234576 a 1234567.

Sedmička sa preto v sedemcifernom slávnom čísle môže nachádzať na piatej, šiestej alebo siedmej pozícii.

2.3 Katapult Monštruóznej Sily ($\kappa \leq 3$)

opravovali **Kika** a **Barbora**

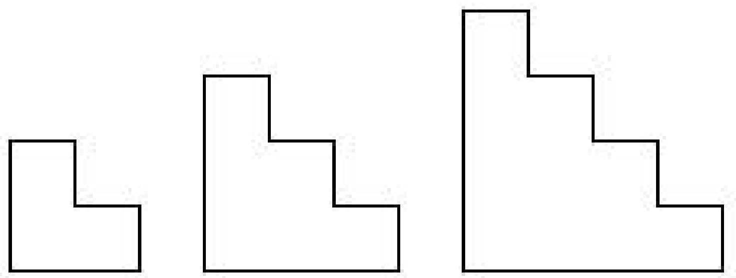
Zadanie. *Zakiaľ, čo sa uhorský princ Ákos zabával Jakubovými slávnymi číslami, potajme vyvíjal jeho úhlavný nepriateľ Kazisvet Matúš Strašný všemohúci trebuchet. Takýto katapult by navždy rozmetal kráľovské mestské steny a vyhnal Kiku z Uhorského kráľovstva. Problém však nastal, keď sa zistilo, že takýto mocný katapult možno postaviť iba na špeciálnej n-uholníkovej podstave.*

Nájdite všetky celé čísla $n \geq 3$, pre ktoré existuje n-uholník, ktorý:

- *má celočíselné dĺžky strán;*
- *každé jeho dve susedné strany sú na seba kolmé;*
- *nedá sa celý pokryť neprekrývajúcimi sa dlaždicami rozmeru 1×2, ktorých strany sú rovnobežné so stranami n-uholníka (otáčať ich možno).*

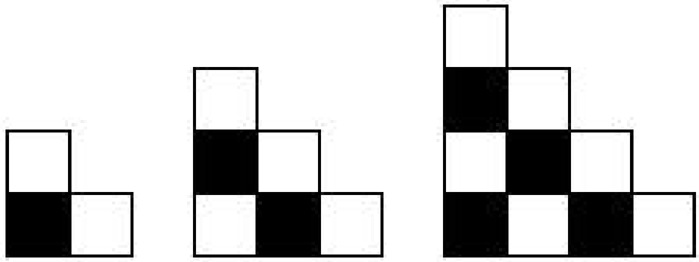
Najprv sa zamyslime koľko-uholníky spĺňajú prvé dve vlastnosti. Pre súčet vnútorných uhlov n-uholníka platí, že je rovný $(n-2) \cdot 180°$. [5] Strany n-uholníkovej podstavy katapultu majú byť na seba kolmé. Teda každý vnútorný uhol podstavy katapultu musí byť buď 90° alebo 270°. Majme k vnútorných uhlov s veľkosťou 270° a $(n-k)$ vnútorných uhlov s veľkosťou 90° (pretože spolu máme n vnútorných uhlov). Ak takýto n-uholník existuje, tak musí platiť rovnosť: $(n-2) \cdot 180° = k \cdot 270° + (n-k) \cdot 90°$. To vieme jednoducho upraviť na tvar $2n - 4 = n + 2k$. Môžeme si všimnúť, že výraz na ľavej strane je vždy párny. Výraz na pravej strane je párny práve vtedy, keď n je párne. Teda táto rovnosť môže platiť len pre párne n, čo znamená, že podstava katapultu môže mať len párny počet strán.

Teraz skúsme hľadať konkrétne n-uholníkové podstavy, ktoré spĺňajú aj tretiu vlastnosť. Ak $n = 4$, tak si môžeme zobrať štvorec veľkosti 1×1 a ten rozhodne nejde pokryť dlaždicami s rozmermi 1×2. Ďalej môžeme hľadať 6, 8, 10 a viac uholníky a podarí sa nám nájsť napr. takéto „schodíkové podstavy“:



Po troške skúšania a ukladania dlaždičiek nadobudneme dojem, že keď je najmenšia strana dĺžky 1, tak to naozaj nepôjde vydláždiť. Už to len treba dokázať. Pri úlohách s dláždením sa nám mnohokrát oplatí vyfarbiť si políčka. Bude tomu tak aj v tejto úlohe. Vyfarbime štvorčeky ako políčka šachovnice, teda striedavo na bielo a na čierno. Môžeme to vidieť aj na obrázku.

[4] Ak neveríte, skúste si to.
[5] Skúste si rozmyslieť, že toto naozaj platí aj pre nekonvexné mnohouholníky.



Dlaždica rozmerov 1×2 zakryje dva susedné štvorce, teda jeden biely a jeden čierny. Vidíme, že všetky pravé horné štvorčeky (štvorčeky, ktoré tvoria najdlhšiu diagonálu) sú biele. Štvorčeky, ktoré s nimi susedia (štvorčeky pod nimi) sú všetky čierne. Každá dlaždička, ktorá nám zakryje horný biely štvorček musí zakryť, ešte susediaci čierny štvorček. Tých je však o 1 menej. Z toho vyplýva, že takéto schodíky sa nedajú pokryť dlaždicami 1×2. Takéto podstavy spĺňajú všetky tri vlastnosti. Hľadané n sú všetky párne čísla, až na číslo 2. Mohli by sme aj zamyslieť nad počtom bielych a čiernych štvorčekov. Čiernych je vždy menej. (Rozmyslite si.) Z toho znova vyplýva, že takéto schodíky sa nedajú pokryť dlaždicami 1×2 a hľadanými n sú všetky párne čísla okrem čísla 2.

2.4 Koník Modrý Statný ($\kappa \leq 5$) opravovali **Adam** a **Roman**

Zadanie. *Štyria rytieri – Liu, Zhen, Ning a David – sa vybrali na uhorský rytiersky turnaj. Žiaľ, vybrali sa tam príliš neskoro a v ich meste ostalo už len 8 koní – čierny, modrý, sivý, biely, hnedý, béžový, brontofúzikový a kapurkový.*

Koľko je rôznych kombinácií, ako sa mohli do mesta vybrať, ak na jednom koni mohli ísť najviac dvaja rytieri a na čiernom aj modrom koníkovi musel ísť do mesta aspoň jeden rytier? Dve kombinácie považujeme za navzájom rôzne, ak aspoň jeden z rytierov prišiel na koni inej farby.

Možností ako mohli rytieri prísť do mesta je mnoho, dobrým začiatkom je rozdeliť si ich na niekoľko skupín, ktoré skúsime spočítať samostatne. Týchto rozdelení je viacero možných, v tomto vzorovom riešení to spravíme podľa toho, koľkí z rytierov išli spolu na koni. Sú tri rôzne skupiny možností ako mohli prísť do mesta – tie v ktorých išli rytieri ako dve dvojice, tie v ktorých išli ako jedna dvojica a dvaja samostatne, a nakoniec tie, v ktorých išiel každý sám. Máme tri skupiny, poďme každú spočítať.

Ak išli ako dve dvojice, vieme, že jedna dvojica išla na modrom koni a druhá na čiernom (na týchto dvoch koňoch musí vždy niekto jazdiť). Pozrime sa na modrého koňa – počet rôznych dvojíc, ktoré na ňom mohli ísť je kombinačné číslo [6] $\binom{4}{2}$, pretože vyberáme dvoch rytierov zo štyroch a nezáleží nám na poradí v rámci danej dvojice. Tým, že určíme jednu dvojicu sme automaticky určili aj druhú. Celkový počet možností v prípade, že pôjdu rytieri ako dve dvojice je teda $\binom{4}{2} = 6$.

Druhá skupina možností je, že išli ako jedna dvojica a dvaja samostatne. Najprv nás zaujíma koľko je možností ako vytvoriť tú jednu dvojicu. Je to $\binom{4}{2}$ tak ako v predchádzajúcej možnosti. Teraz ideme zisťovať koľko je možností ako rozdeliť tri posádky (jedna dvojica a dvaja samostatne) na 8 koní. Jedna posádka bude musieť sedieť na modrom koni, druhá na čiernom a tretia na jednom zo zvyšných (budeme ich zatiaľ brať ako jednu skupinu). Spočítajme možnosti tak, že budeme posádky postupne usádzať – prvá posádka má tri možnosti kde môže sedieť, druhá dve (lebo niekde už sedí prvá) a tretia si sadne tam kde ostalo miesto. To je $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ možností. Už nám ostáva vyriešiť len jednu vec, a to kam si sadne posádka ktorá bude sedieť na jednom zo zvyšných

[6] Ak vám pojem kombinačné číslo nič nehovorí, krátke vysvetlenie je napríklad tu https://cs.wikipedia.org/wiki/Kombina%C4%8Dn%C3%AD_%C4%8D%C3%ADslo

koní (nemodrom a nečiernom). To je ale jednoduché, zvyšných koní je 6, má preto 6 možností. Dajme to teda dokopy: je $\binom{4}{2}$ možností ako vznikne dvojica, 6 možností ako sa rozsadia tri posádky a 6 možností ako si sadne jedna z posádok na jedného zo zvyšných koní. V tejto skupine je teda $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ možností.

Ostáva nám už len posledná skupina – tie možnosti pri ktorých išli všetci samostatne. Najprv obsadíme modrého koňa. Na to máme štyroch možných rytierov, takže 4 možnosti. Na čierneho koňa máme 3 možnosti, lebo jeden rytier už sedí na čiernom koni. Dvaja rytieri sedia, teraz zmeníme uhol pohľadu a na situáciu sa pozrieme očami tretieho rytiera: potrebuje si sadnúť na koňa, ostáva mu 6 možností. Nakoniec ostáva posledný rytier a vyberá si z piatich koní. Dokopy je teda v tejto skupine $4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 5 = 360$ možností.

Keďže všetky tri skupiny dokopy obsahujú všetky možnosti, všetkých možností ako mohli rytieri prísť do mesta je $6 + 216 + 360 = 582$.

2.5 Kováč Mariánosza Spotvoril ($\kappa \leq 8$) — opravovali **Ľubo** a **Ondro**

Zadanie. *Knieža Mariánosz v deň rytierskeho turnaja po prvý raz v živote zočil kráľovninu nebeskú krásu zosobnenú v jej prenádhernom zlatom trojuholníku a hneď po turnaji sa rozhodol, že musí mať rovnaký. Veď musí byť najkrajší v okolí. Žiaľ, u kováča si neprečítal všeobecné obchodné podmienky a keď prišiel domov, zistil, že na čele nemá zlatý, ale bronzový trojuholník ABC.*

Na strane AB trojuholníka ABC sú dané body D a E tak, že platí $|AD| = |DE| = |EB|$ a body A, D, E, B ležia na priamke v tomto poradí. Rovnobežka so stranou AC, ktorá prechádza bodom D pretína stranu BC v bode F. Ďalej nech M je stred strany BC. Priamka EM pretína priamku AC v bode P. Dokážte, že priamka AF prechádza stredom úsečky BP.

Máme dokázať, že stranu BP pretína priamka AF na polovicu. V geometrií majú túto vlastnosť ťažnice trojuholníka. Pokúsime sa teda dokázať, že úsečka AS je ťažnica. Druhá vlastnosť, ktorá nám pomôže je, že ťažnice sa pretínajú v $\frac{2}{3}$ svojej dĺžky od vrchola. Zadefinujme si bod S ako priesečník polpriamky AF a úsečky BP.

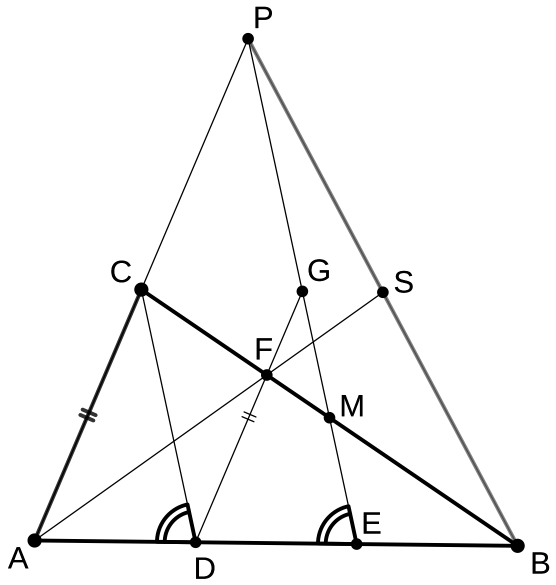
Zo zadania vieme, že $|AD| = |DE| = |EB| = \frac{1}{3}|AB|$. Keďže robíme rovnobežku so stranou AC cez bod D, dostávame dva podobné trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle DBF$ a tiež vieme, že $FC = \frac{1}{3}|BC|$. Teda ak by bol bod C stredom úsečky AP tak úsečka BC by bola ťažnica trojuholníka $\triangle ABP$ a bod F by bol ťažiskom trojuholníka $\triangle ABP$ z čoho by vyplývalo, že úsečka AS je ťažnica.

Zadefinujme si bod G ako priesečník polpriamok DF a EM. Priamky EM a CD sú rovnobežné, lebo EM je strednou priečkou v trojuholníku CDB. Trojuholníky ADC a DEG majú všeky dvojice strán rovnobežné, takže sú podobné. Tiež majú rovnako dlhé podstavy AD a DE, takže sú zhodné. Vidíme, že $\triangle ADC \cong \triangle DEG \sim \triangle AEP$. Z tohto dostaneme

$$\frac{|DE|}{|AE|} = \frac{|DG|}{|AP|} = \frac{|AC|}{|AP|} = \frac{1}{2},$$

z čoho vyplýva, že bod C je stredom úsečky AP, a teda úsečka BC je ťažnica trojuholníka ABP a bod F je ťažiskom $\triangle ABP$.

A keďže úsečka AS vychádza z vrcholu A a prechádza cez ťažisko F, tak musí byť ťažnicou trojuholníka $\triangle ABP$, a teda delí stranu BP na polovicu.

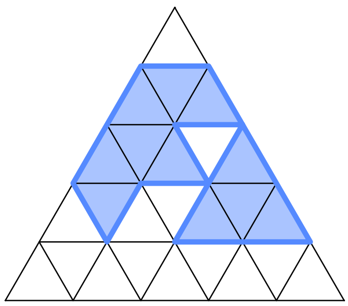


2.6 Kráľovských Múrov Skolióza

opravovali **Juro** a **Juro**

Zadanie. *Templár Slavomír, vracajúci sa zo zemí saracénskych domov, si nemohol nevšimnúť krivosť mestských stien. Ako povinnosť káže, ihneď o tom upovedomil svoju kráľovnú Kiku. Tú to tak vyviedlo z miery, až prikázala svojmu najlepšiemu architektovi Mirovi, aby hradby zdemoloval (v tom je on expert) a nahradil ich najnovším typom trojcípich hradieb stojacich na špeciálnej trojuholníkovej sieti.*

Rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky n je rozdelený na n^2 rovnostranných trojuholníkov so stranou dĺžky 1. *Miro si vyberie niekoľko z týchto trojuholníkov tak, aby sa po stranách vybraných trojuholníkov dalo prejsť medzi ľubovoľnými dvoma z nich. Následne postaví hradby na úsečkách medzi vybranými a nevybranými trojuholníkmi a tiež medzi vybranými trojuholníkmi a obvodom veľkého trojuholníka. Koľko rôznych počtov trojuholníkov si môže vybrať, ak celková dĺžka hradieb musí byť presne $3n$? Na obrázku môžete vidieť príklad možného výberu trojuholníkov, ktorý vyhovuje podmienkam.*



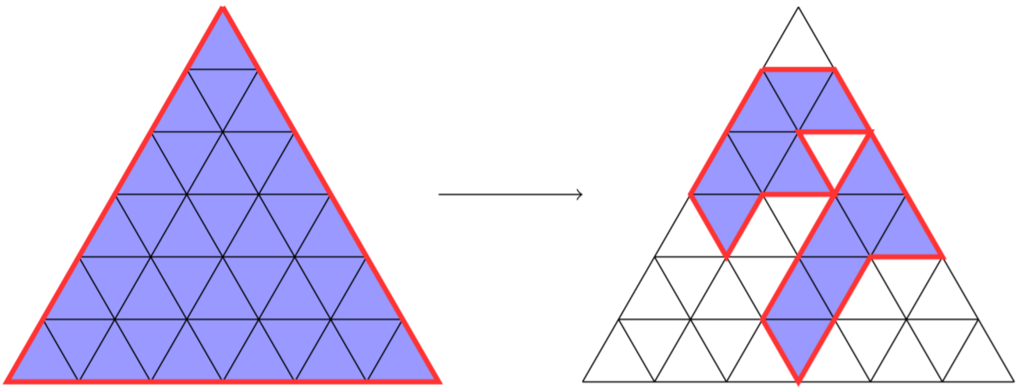
Riešenie takejto úlohy sa delí na dve časti. Najskôr dokážeme, že to nejde pre nejaké počty trojuholníkov a potom ukážeme, že všetky ostatné počty trojuholníkov vyhovujú, teda že existuje vhodný výber trojuholníkov.

Najskôr si môžeme všimnúť, že potrebujeme aspoň n trojuholníkov. Každý trojuholník môže prispieť najviac tromi hradbami. Teda aby sme mali $3n$ hradieb, potrebujeme aspoň n trojuholníkov. Najviac ich môžeme mať n^2, čo je počet malých trojuholníkov v celom veľkom trojuholníku.

Ukážeme, že všetky možné počty ktoré si Miro môže vybrať, sú presne tie, pre ktoré platí :

- počet trojuholníkov je väčší alebo rovný n

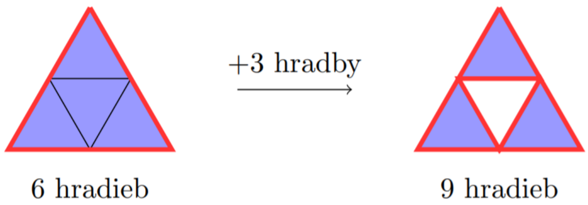
- počet trojuholníkov je menší alebo rovný n^2
- počet trojuholníkov má tú istú paritu ako n a n^2



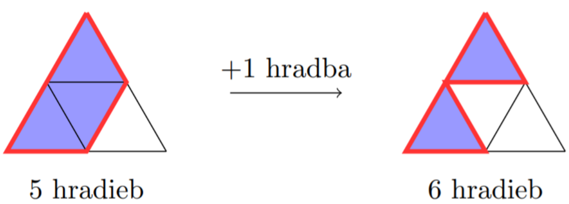
Tu máme jednu možnosť pre $n = 6$ ako si môžeme vybrať 14 trojuholníkov tak aby sme mali 18 hradieb.

Predstavme si, že nazačiatku sú vybraté všetky trojuholníky a my ich postupne budeme odoberať tak, aby ostali vybraté tie, ktoré chceme. Na predchádzajúcom obrázku sme odobrali všetky trojuholníky, ktoré už nie sú vyfarbené. Toto odoberanie trojuholníkov môžeme robiť postupne, vždy po jednom trojuholníku. V každom kroku tohto odoberania trojuholníkov máme 4 možnosti ako sa celkový počet hradieb môže zmeniť:

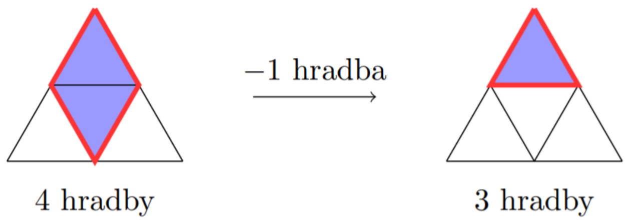
- Ak odobratý trojuholník (na obrázku vždy stredný trojuholník) má všetky 3 strany spoločné s vybranými trojuholníkmi, keď odoberieme tento trojuholník, budeme mať o 3 hradby viac.



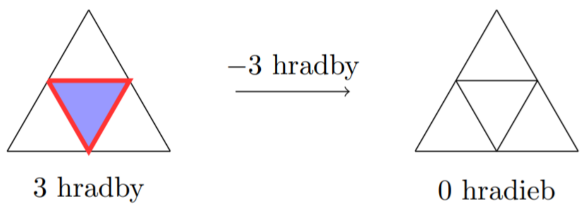
- Ak odobratý trojuholník má 2 strany spoločné s vybranými trojuholníkmi, keď odoberieme tento trojuholník, budeme mať o 1 hradbu viac.



- Ak odobratý trojuholník má 1 stranu spoločnú s iným vybraným trojuholníkom, keď odoberieme tento trojuholník, budeme mať o 1 hradbu menej.



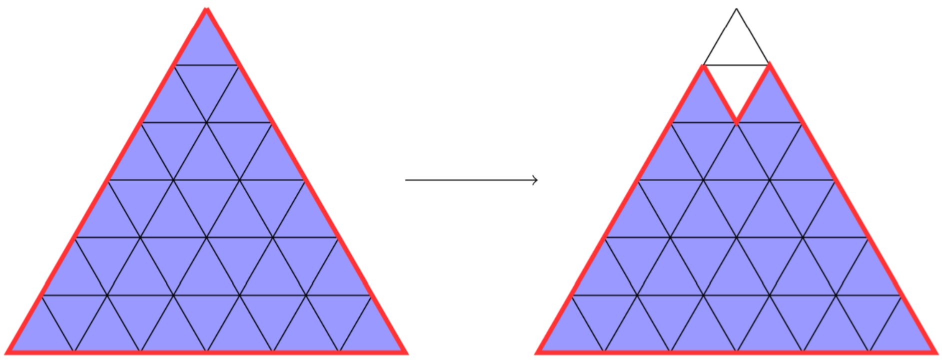
- Ak odobratý trojuholník nemá žiadnu stranu spoločnú s iným vybraným trojuholníkom, keď odoberieme tento trojuholník, budeme mať o 3 hradby menej.



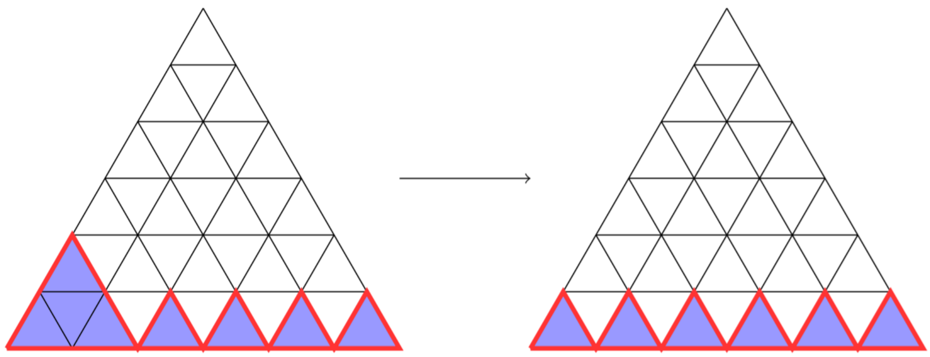
Poznamenajme, že aj keď odoberáme malý trojuholník na kraji alebo v rohu veľkého trojuholníka, počet hradieb sa bude meniť rovnako ako na predchádzajúcich obrázkoch. Podľa toho s koľkými vybranými trojuholníkmi odoberaný trojuholník susedil.

Všimnime si, že vždy zmeníme počet hradieb o nepárne číslo, takže parita počtu hradieb sa zmení zakaždým ako odoberieme jeden trojuholník. Teda aby sme sa vrátili k $3n$ hradbám rovnako ako sme mali nazačiatku procesu, musíme meniť paritu párny počet krát, teda odobrať párny počet trojuholníkov. Môžu nám teda ostať len tie počty trojuholníkov, ktoré sú medzi n a n^2 a majú tú istú paritu ako n^2. Ešte treba dokázať, že môžeme dosiahnuť všetky tieto počty.

Na to stačí nájsť nejaký postup ktorým dostaneme všetky tieto možnosti. Začneme s n^2 trojuholníkmi. V prvom kroku odoberieme 2 horné trojuholníky a zostane nám stále $3n$ hradieb.



Pokračujeme tým istým spôsobom, budeme odoberať 2 trojuholníky v tvare kosoštvorca a zostane nám $3n$ hradieb po každom kroku. Tento proces sa skončí, keď nám zostane n trojuholníkov. Posledný krok bude vyzerať takto :



Všetky možné počty trojuholníkov ktoré si Miro môže vybrať sú teda všetky počty tej istej parity ako je n a n^2 medzi n a n^2.

To je $\dfrac{n^2 - n}{2} + 1$ možných počtov trojuholníkov.

2.7 Kombat Moháčskych Soldierov

opravovali **Jožo** a **Matúš**

Zadanie. *Obdobie šaškovania a turnajov sa skončilo! Turci na čele s novým sultánom Kebabom Muhammadom Sulejmanom tiahli do vojny proti nášmu Uhorskému kráľovstvu. Urýchlene boli vydané rozkazy, aby Ákosovi podriadení začali namiesto zapatrošenej čabajky hľadať všetkých bojaschopných mužov. Nájdite ich! A rýchlo! Nech sa môžeme čo najskôr vrátiť k hľadaniu klobásky maďarskej stratenej.*

Nájdite všetky trojice reálnych čísel (a, b, c), pre ktoré platí:

$$a - b + \frac{1}{c} = 1526,$$

$$b - c + \frac{1}{a} = 1526,$$

$$c - a + \frac{1}{b} = 1526.$$

Na začiatok by sme sa vám chceli ospravedlniť za neprimeranú náročnosť tejto úlohy. Pri vybraní úlohy sme ju mali nesprávne vyriešenú, čo sme zistili len nedávno. Podobné riešenie malo aj viacero riešiteľov. Preto veríme, že táto úloha bola poučná aj pre vás riešiteľov, aj pre nás vedúcich.

Táto úloha je ukážkou toho, že nie všetky veci v matematike sú pekné a existuje veľa úloh, ktoré majú škaredé riešenie. Ako uvidíte, táto úloha je jednou z nich. Z riešení, čo nám poslali riešitelia, sme vybrali dve. Obe obsahuje pekné myšlienky. Ich spoločnou črtou je dopracovať sa k polynomiálnej rovnici, z ktorej budeme vedieť riešenia zistiť. Najprv však uvedieme pre vaše poučenie jedno nesprávne riešenie.

Nesprávne riešenie

Keďže sústava rovníc je cyklická, tak môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že a je najväčšie z čísel a, b, c (inak si premenné cyklicky preznačíme). [7] Preto je $a - b$ nezáporné, a tak z prvej rovnice dostaneme

[7] Cyklická sústava rovníc je taká, v ktorej keď cyklicky zameníme premenné, tak sa nám rovnice nezmenia. Cyklicky zameniť znamená miesto trojice premenných (a, b, c) dosadiť (b, c, a) alebo (c, a, b). Ale pozor! Nemôžeme vo všeobecnosti dosadiť aj

$\frac{1}{c} \leq 1526$. Podobne je $c - a$ a nezáporné, a preto z tretej rovnice máme $\frac{1}{b} \geq 1526$. Spojením týchto nerovností máme $\frac{1}{c} \leq 1526 \leq \frac{1}{b}$, čiže $\frac{1}{c} \leq \frac{1}{b}$. Z toho dostávame, že $b \leq c$.

Potom vieme povedať, že $b - c$ je nekladné a podobnou úvahou z prvej a druhej rovnice dospieť k tomu, že $\frac{1}{c} \leq 1526 \leq \frac{1}{a}$. Teda dostávame, že má platiť aj $a \leq c$. My však predpokladáme, že a je najväčšie, teda $a \geq c$. To sa môže stať len ak $a = c$. Z tretej rovnice tak dostaneme rovno, že $0 + \frac{1}{b} = 1526$, teda $b = 1/1526$. Sčítaním prvej a druhej zas máme, že $a - b + b - a + \frac{2}{a} = 2 \cdot 1526$, teda $c = a = 1/1526$.

Teda rovnica má len jediné riešenie $a = b = c = 1/1526$, ktoré zjavne vyhovuje.

Prečo je to riešenie nesprávne?

Skúste si toto riešenie pozorne prejsť a nájsť chybu.

Ako z nerovnosti $\frac{1}{b} \geq \frac{1}{c}$ vyplýva, že $c \geq b$? Po chvíľke zamyslenia si isto všimnete, že táto úvaha neplatí, ak $bc < 0$. Vtedy dokonca z toho dostávame, že ak a je najväčšie, tak musí platiť $b \geq c$, teda nám táto úvaha nič nepovie – nedostávame žiaden dôvod, prečo by premenné nemohli byť usporiadané ako $a > b > c$.

Správne riešenie *(podľa Lucie Krajčoviechovej)*

Označíme si $k = 1526$ a premenné si substituujeme nasledovne:[8]

$$a = k + A, \qquad \frac{1}{b} = 3k + B, \qquad c = C - k. \tag{1}$$

Sústava rovníc sa nám tak zmení na

$$k + A - \frac{1}{3k+B} + \frac{1}{C-k} = k, \qquad A = \frac{1}{3k+B} + \frac{1}{k-C}, \tag{2}$$

$$\frac{1}{3k+B} - C + k + \frac{1}{k+A} = k, \qquad C = \frac{1}{3k+B} + \frac{1}{k+A}, \tag{3}$$

$$C - k - k - A + 3k + B = k, \qquad A = B + C. \tag{4}$$

Tretia rovnica sa nám pekne zjednodušila a tak si z nej môžeme A dosadiť do prvých dvoch:

$$B + C = \frac{1}{3k+B} + \frac{1}{k-C},$$

$$C = \frac{1}{3k+B} + \frac{1}{k+B+C}.$$

Po odstránení zlomkov máme rovnice

$$(B+C)(3k+B)(k-C) = 4k + B - C, \tag{5}$$

$$(k+B+C)(3k+B)C = 4k + 2B + C. \tag{6}$$

trojicu (a, c, b). Vtedy by sme dostali napr. rovnicu $b - a + \frac{1}{c} = 1526$, ktorá v pôvodnej sústave nie je. To nám môže zmeniť aj množinu koreňov. Preto si nemôžeme bez ujmy na všeobecnosti povedať, že $a \geq b \geq c$, lebo iba cyklickým menením premenných si ich nevieme garantovane usporiadať. Síce za tohto predpokladu by sme o riešenia neprišli, ale napr. pri predpoklade $a \geq c \geq b$ by sme dostali len riešenie s $a = b = c$.

[8] K tejto substitúcii sa dá prísť napr. postupným odhadovaním a, b, c. Vieme sa dostať k tomu, že $k + \frac{1}{k} < a < k + \frac{2}{3k}$, $3k < b < 3k + \frac{2}{3k}$ a $-k + \frac{4}{3k} < c < -k + \frac{133}{k}$, čo nás môže naviesť na túto substitúciu. Inou motiváciou môže byť zjednodušiť si jednu rovnicu, aby sme z nej mohli jednoducho vyjadriť jednu neznámu.

Ľavú stranu rovnice (6) si čiastočne roznásobíme

$$kC(3k+B)+(B+C)(3k+B)C=4k+2B+C$$

a pripočítame k rovnici (5), čím dostaneme

$$kC(3k+B)+(B+C)(3k+B)k=8k+3B, \tag{7}$$

$$kC(3k+B)+kC(3k+B)=8k+3B-kB(3k+B), \tag{8}$$

$$C=\frac{8k+3B-kB(3k+B)}{2k(3k+B)}. \tag{9}$$

Dostali sme tak vyjadrenú neznámu C. Keď ju dosadíme do rovnice (5), tak na ľavej strane dostaneme

$$\frac{kB^2+(3+3k^2)B+8k}{2k(3k+B)}(3k+B)\frac{kB^2+(5k^2-3)B+6k^3-8k}{2k(3k+B)}=$$

$$=\frac{k^2B^4+8k^3B^3+(21k^4+6k^2-9)B^2+(18k^5+34k^3-48k)B+48k^4-64k^2}{4k^2(3k+B)}.$$

Na pravej strane zas máme

$$\frac{3kB^2+(17k^2-3)B+24k^3-8k}{2k(3k+B)}=\frac{6k^2B^2+(34k^3-6k)B+48k^4-16k^2}{4k^2(3k+B)}.$$

Keď dáme všetko na jednu stranu, dostaneme tak polynomiálnu rovnicu štvrtého stupňa s premennou B

$$P(B)=k^2B^4+8k^3B^3+(21k^4-9)B^2+(18k^5-42k)B-48k^2=0, \tag{10}$$

prípadne s vyčíslenými koeficientmi

$$2328676B^4+28428476608B^3+113877370172487B^2+148951600185560676B-111776448.$$

Polynóm štvrtého stupňa má najviac 4 korene. Jeden z nich je $P(-3052)=0$, ktorý zodpovedá po dosadení riešeniu $a=b=c=1/1526$. Dosadením vhodných hodnôt vieme zistiť, že $P(-4579)>0$, $P(-4578)<0$, $P(-4577)>0$, $P(0)<0$ a $P(1)>0$. Z toho vyplýva, že polynóm P má aj tri ďalšie reálne korene B_1, B_2, B_3, pre ktoré platí $-4579<B_1<-4578<B_2<-4577<0<B_3<1$. (Uvedomte si, že $-3k=4578$ a $-2k=-3052$.) Keby sme veľmi chceli, vieme určiť aj ich explicitné formy, keďže pre riešenie polynomiálnych rovníc 4. stupňa existujú vzorce. My sa však uspokojíme s tým, že toto je dostatočný opis troch reálnych čísel. Pre každé B_i (pre $i\in\{1,2,3\}$) potom vieme určiť

$$C_i=\frac{8k+3B_i-kB_i(3k+B_i)}{2k(3k+B_i)} \qquad \text{a} \qquad A_i=B_i+C_i.$$

Potom podľa substitúcie (1) určíme spätne hodnoty a, b, c.

Ostáva nám už len overiť, že štyri takto určené trojice (a,b,c) naozaj vyhovujú pôvodnej sústave rovníc. Majme číslo B, pre ktoré platí $P(B)=0$ (rovnica (10)). K nemu si určíme C, A postupne podľa vzťahov (9) a (4). Čísla A, B, C vyhovujú rovnici (4) vďaka tomu, ako sme ich zvolili. Podobne vyhovujú aj rovnici (5), lebo sme ju ekvivalentne upravili na polynomickú rovnicu (10). Rovnica (5) je však ekvivalentná s rovnicou (2), takže aj tá je splnená. Ďalej vďaka voľbe C vieme, že rovnica (7) je splnená. Tú sme dostali sčítaním splnenej rovnice (5) a rovnice (6). Preto môžeme odčítaním rovnice (5) od (7) spätne dosať rovnicu (6), ktorá je ekvivalentná s rovnicou (3). Máme tak, že čísla A, B, C vyhovujú sústave rovníc (2), (3) a (4). Spätnou substitúciu podľa vzťahov (1) zas dostaneme vyhovujúce riešenie pre pôvodnú sústavu.

Dostali sme tak, že naša sústava má 4 riešenia, a to trojicu $(1/1526, 1/1526, 1/1526)$ a tri trojice tvaru

$$\left(1526 + A_i, \frac{1}{4578 + B_i}, C_i - 1526\right), \qquad \text{pre } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Iné riešenie *(podľa Lukáša Gáborika)*

Na úvod úlohy si bolo fajn uvedomiť, že žiadne z trojice čísel a, b, c nemôže byť rovné nule, lebo sa nachádzajú v menovateli. Preto vieme, že pri rozoberaní možností nám stačí iba rozhodovať o kladnosti a zápornosti jednotlivých čísel a, b, c.

Teraz sa poďme pozrieť na jednotlivé zo zadania zadané rovnice. Keď nám porovnávanie neznámych nevyšlo, ďalším dobrým nápadom na úvod pri riešení takéhoto typu úloh je si zadané rovnice sčítavať, odčítavať, prípadne si ich ešte niečím prenásobovať, aby sme získali nejaký nadhľad a nové informácie. V tejto úlohe si môžeme všimnúť, že ak sčítame všetky 3 rovnice dokopy, tak sa nám tam veľa premenných navzájom odčíta a dostaneme sa ku takejto rovnici:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 \cdot 1526. \tag{11}$$

Ďalej sa vieme zbaviť zlomkov v jednotlivých počiatočných rovniciach tak, že ich postupne prenásobíme c-čkom, a-čkom a b-čkom. Potom sčítaním troch novovzniknutých rovníc získavame rovnicu:

$$a + b + c = \frac{3}{1526}. \tag{12}$$

Vhodnými úpravami vieme obe tieto rovnice upraviť do stavu, že na pravej strane budeme mať výraz tvaru $\frac{1}{1526}$, a teda výrazy na ľavých stranách oboch rovníc sa rovnajú. Tak si ich rovnosť zapíšme:

$$\frac{a + b + c}{3} = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

Tu si môžeme všimnúť, že ak sú všetky čísla kladné, tak ide o špeciálny prípad nerovnosti medzi aritmetickým a harmonickým priemerom[9], v ktorej rovnosť nastáva vtedy a len vtedy, keď $a = b = c$. Dosadením do ľubovoľnej rovnice potom dostávame, že $a = b = c = \frac{1}{1526}$, pričom skúškou ľahko overíme, že toto riešenie vyhovuje.

Ostáva nám ešte prešetriť prípad, keď aspoň jedno číslo z a, b, c je záporné. Ak by boli záporné všetky tri, tak na ľavej strane rovnice (12) by sme dostali záporné číslo, pričom číslo na pravej strane je kladné, čo je spor.

Pripusťme teraz, že dve čísla sú záporné. Keďže sústava rovníc je cyklická, tak môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že jediné kladné číslo je b. Potom ale ak sa pozrieme na prvú rovnicu zo zadania, tak ľahko uvidíme, že na ľavej strane rovnice dostávame záporné číslo, zatiaľ čo číslo na pravej strane je vždy kladné, čo opäť vedie k sporu.

Nakoľko sme si práve ukázali, že ani všetky tri, ani práve dve z čísel a, b, c nemôžu byť záporné, tak platí, že záporná môže byť preto najviac jedna z neznámych. Keď sa pozrieme na to, že vieme hodnoty $a+b+c$ a $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$,

[9] Pokiaľ ste o nej ešte nepočuli, môžete si o nej prečítať napr. na `https://cs.wikipedia.org/wiki/Nerovnosti_mezi_pr%C5%AFm%C4%9Bry`.

tak je kľúčové uvedomiť si ich súvis s Vietovými vzťahmi pre kubické rovnice. Poznáme hodnotu $a+b+c$ a ak by sme poznali aj hodnoty $ab+bc+ca$ a abc, tak by sme čísla a, b, c vedeli určiť ako korene kubickej rovnice. O to viac nám hrá do kariet skutočnosť, že $abc(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) = ab+bc+ca$. Teda nám stačí už určiť len jednu z hodnôt $ab+bc+ca$, abc. Postupujme teraz tak, že v počiatočných rovniciach zo zadania presunieme neznáme so záporným znamienkom na pravú stranu a potom rovnice medzi sebou vynásobíme. Dostaneme tak:

$$\left(a+\frac{1}{c}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\left(c+\frac{1}{b}\right) = (1526+b)(1526+c)(1526+a),$$

$$abc+a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{abc} = 1526^3+1526^2(a+b+c)+1526(ab+bc+ac)+abc,$$

$$(a+b+c)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{abc} = 1526^3+1526^2(a+b+c)+1526abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Teraz vieme využitím vzťahov z rovnice (11) a (12) nahradiť niektoré výrazy, čím túto rovnicu zjednodušíme.

$$\frac{3}{1526}+3\cdot 1526+\frac{1}{abc} = 1526^3+1526^2\cdot\frac{3}{1526}+1526\cdot abc\cdot 3\cdot 1526$$

$$(1526^3 abc-1)(3abc+1526) = 0$$

Z toho nám priamo vyplýva, že $abc = \frac{1}{1526^3}$ alebo $abc = -\frac{1526}{3}$. My však vieme, že práve jedno z čísel a, b, c je teraz záporné. Tým pádom tiež vieme, že aj súčin abc musí byť záporný, čiže

$$abc = -\frac{1526}{3}.$$

Teraz sa ešte pozrime, že čomu sa rovná výraz $ab+bc+ac$, čo použijeme neskôr v riešení. Vieme, že: $ab+bc+ac = abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ a súčasne vieme, že $abc = -\frac{1526}{3}$ a $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 1526$. Potom platí:

$$ab+bc+ac = abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = -\frac{1526}{3}\cdot 3\cdot 1526 = -1526^2.$$

Dostali sme teda, že pre a, b, c má platiť

$$a+b+c = \frac{3}{1526}, \qquad ab+bc+ca = -1526^2 \qquad \text{a} \qquad abc = -\frac{1526}{3}.$$

To však znamená, že a, b, c musia byť korene kubickej rovnice

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{1526}x^2 - 1526^2 x + \frac{1526}{3} = 0. \tag{13}$$

To, že táto rovnica má tri reálne korene vieme overiť tým, že $f(-1526) < 0$, $f(0) > 0$, $f(1) < 0$ a $f(1526^2) > 0$. Nech teda x, y, z sú korene rovnice (13), pričom $x > y > z$. Ako sme už ukázali vyššie, tak ak a je najväčšie, tak musí platiť $a > b > c$. Preto trojica (x,z,y) a ani jej cyklické obmeny (z,y,x) a (y,x,z) nevyhovujú. Ostáva „len“ overiť, že trojice (x,y,z), (y,z,x) a (z,x,y) vyhovujú našej sústave. Vďaka cyklickosti nám to stačí overiť pre jednu z nich.

Žiaľ, spraviť skúšku správnosti nie je také jednoduché. Oproti predchádzajúcemu riešeniu je toto nepraktický tvar riešenia. Korene kubickej rovnice síce vieme nájsť[10], ale už tieto samotné korene vyjdú dosť škaredo. Dosadiť ich do rovníc, miestami ich prevrátiť a overiť, že v každej rovnici vyjde 1526 je maximálne odpudivé.[11] V záujme ochrany nášho duševného zdravia jediné, čo nám ostáva, je prenechať túto otrockú prácu počítaču. Existujú knižnice, ktoré takýto typ úprav zvládajú – miesto toho, aby si pamätali reálne čísla približne si ich pamätajú symbolicky, podobne, ako si ich my ľudia zapisujeme na papier. Rovnako vedia takéto symbolické výrazy sčítavať, odčítavať, odmocňovať, zjednodušovať … Príkladom takej knižnice je `sympy` v programovacom jazyku Python. Pre záujemcov uvádzame program, ktorý určí korene našej kubickej rovnice, dosadí ich do pôvodných rovníc a všetky tieto obludné výrazy (vo forme ľavá strana mínus 1526) zjednoduší na 0, teda skúška prejde.

```
from sympy import Rational, Symbol, solve, simplify

m = 1526
# koeficienty polynomu
a = 1
b = Rational(-3, m)
c = - m ** 2
d = Rational(m, 3)

# Urcenie korenov a, b, c polynomu
x = Symbol('x')
a, b, c = solve(a * x**3 + b * x**2 + c * x + d)
# Teraz zapiseme vyrazy pre jednotlive rovnice (prehodime vsetko na jednu stranu).
# Program vypise zjednodusene vyrazy: su to nuly, teda a, b, c sustave vyhovuju
print(simplify(a - b + 1 / c - m))
print(simplify(b - c + 1 / a - m))
print(simplify(c - a + 1 / b - m))
```

Na záver podotkneme, že výpočtovú techniku sme použili iba na vykonanie skúšku správnosti. Vzhľadom na náročnosť tejto úlohy považujeme, že to je v poriadku. Zvyšok riešenia obsahuje dostatok pekných myšlienok. Pripomíname však, že pokiaľ by použitie výpočtovej techniky výrazne zjednodušilo riešenie úlohy, také riešenie zvykneme hodnotiť menším počtom bodov.

Explicitné formy riešenia

Dostali sme teda, že sústava rovníc má 4 riešenia: $(1/1526, 1/1526, /1526)$, (x, y, z), (y, z, x) a (z, x, y). Približné hodnoty týchto riešení sú $x \approx 1526{,}00087374437$, $y \approx 0{,}000218435998252476$, $z \approx -1525{,}99912625638$. Z Lukášovho riešenia sa nám podarilo určiť aj celkom jednoducho explicitné formy týchto riešení. Pre zvedavcov ich uvádzame.

$$x = \frac{1}{1526} - \frac{(-16268195738937)^{\frac{2}{3}}}{4578\sqrt[3]{-3 + 2328676\sqrt{3}i}} + \frac{\sqrt[3]{-16268195738937}\sqrt[3]{-3 + 2328676\sqrt{3}i}}{4578},$$

$$y = \frac{1}{1526} - \frac{(-1)^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{16268195738937}\sqrt[3]{-3 + 2328676\sqrt{3}i}}{4578} + \frac{\sqrt[3]{-1}\cdot 16268195738937^{\frac{2}{3}}}{4578\sqrt[3]{-3 + 2328676\sqrt{3}i}},$$

$$z = \frac{1}{1526} - \frac{\sqrt[3]{16268195738937}\sqrt[3]{-3 + 2328676\sqrt{3}i}}{4578} - \frac{16268195738937^{\frac{2}{3}}}{4578\sqrt[3]{-3 + 2328676\sqrt{3}i}},$$

[10] Viete si o tom prečítať napr. na `https://en.wikipedia.org/wiki/Cubic_equation`.

[11] Možno z toho bude dobrý quest na sústredení :P.

kde $i = \sqrt{-1}$ je imaginárna jednotka. Áno, v týchto zápisoch sa vyskytujú komplexné čísla, no napriek tomu ide o čísla reálne.

2.8 Kvantá Miest Spálených

opravovali **Ákos** a **Mišo**

Zadanie. *Ákosova neprítomnosť neostala nepovšimnutá. Matúš ju hneď využil na to, aby vtrhol do kráľovstva a rad za radom plienil uhorské mestá. Bez princovej armády ho už nemal kto zastaviť, a tak kráľovnej Kike ostávala len posledná možnosť – rýchlo vyslať poslov do ohrozených miest, aby evakuovali lokálne obyvateľstvo. Najprv však bolo treba rad ohrozených miest nájsť.*

Nájdite všetky kladné celé čísla d, pre ktoré existuje celé číslo $k \geq 3$ také, že čísla $1d, 2d, \ldots, kd$ možno usporiadať do radu tak, že súčet každých dvoch susedných čísel je druhou mocninou celého čísla (nie nutne toho istého).

Pre každé d nás zaujíma, či sa dá niekoľko jeho prvých násobkov (aspoň 3) zapísať do radu tak, aby súčet každých dvoch susedných bol štvorcom – druhou mocninou celého čísla.

Takmer vždy sa oplatí začať od najmenších či najjednoduchších prípadov. Pozrime sa teda najprv na prípad, kedy $d = 1$. Pre lepšiu predstavu o tom, aké máme možnosti, si môžeme na papier napísať niekoľko prvých prirodzených čísel a spojiť čiarou tie dvojice, ktorých súčet je druhou mocninou. Dostaneme tak akýsi graf a chceme vedieť, či v ňom existuje cesta po čiarach cez všetky čísla (vrcholy). S tromi číslami to zjavne nejde, preto skúšame dokresľovať postupne ďalšie a ďalšie čísla. Teda zakaždým pridáme číslo, spojíme ho so všetkými existujúcimi číslami, s ktorými dáva súčet rovný nejakej druhej mocnine a pozrieme sa, či už existuje cesta cez všetky čísla. Je to celkom efektívny spôsob ako skúšať postupne malé hodnoty k bez nutnosti skúšania úplne všetkých možností.

Keď takto pokračujeme ďalej, zistíme, že pridaním čísla $k = 15$ sa nám cesta naozaj vytvorí. Dostaneme takúto postupnosť: 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8, kde naozaj súčet každých dvoch susedov je štvorcom. To znamená, že číslo 1 je jedným z hľadaných d.

Ďalej si všimnime, že ak všetky členy prenásobíme nejakým číslom d, potom aj súčet každej dvojice sa vynásobí d-krát. Preto ak d je druhá mocnina, postupnosť

$$9d,\ 7d,\ 2d,\ 14d,\ 11d,\ 5d,\ 4d,\ 12d,\ 13d,\ 3d,\ 6d,\ 10d,\ 15d,\ 1d,\ 8d$$

je vyhovujúca. Keď totiž v pôvodnej postupnosti bol súčet dvoch susedov štvorcom, po jeho prenásobení ďalším štvorcom (číslom d) dostaneme vždy znovu štvorec.

Preskúmajme teraz prípady, kedy d nie je druhou mocninou. Keď si opäť skúsime podobné grafické znázornenie ako predtým, zistíme, že ani po pridaní dostatočne veľa čísel sa náš graf neprepojí celý, ostanú aspoň dve oddelené časti, v ktorých síce cesta existovať môže, ale z jednej sa do druhej dostať nedá. Poďme to dokázať.

Vezmime si nejaké číslo d, ktoré nie je štvorcom. Aby sme nemuseli uvažovať úplne všetky možné hodnoty d, ukážeme, že stačí uvažovať tie d, ktoré nie sú deliteľné žiadnou druhou mocninou (každé prvočíslo v jeho rozklade je v prvej mocnine). Ak by sme totiž mali vhodné usporiadanie násobkov pre $d = a^2p$, kde p už v rozklade nemá žiadne prvočíslo v druhej ani vyššej mocnine, potom môžeme vydeliť všetky členy postupnosti a^2 a dostaneme vyhovujúcu postupnosť pre $d' = p$. Ak boli všetky súčty susedov štvorcami predtým, po vydelení štvorcom ostanú štvorcami (ostanú celočíselné, keďže všetky členy postupnosti sú násobkom d, a teda aj násobkom a^2). Z toho obmenou plynie, že ak postupnosť neexistuje pre takéto p, nemôže existovať ani pre $d = a^2p$.

Predpokladajme pre spor, že pre nejaké k vieme čísla $1d,\ 2d,\ \ldots kd$ usporiadať do radu podľa podmienok v zadaní.

Súčet každých dvoch susedných čísel bude deliteľný d, pretože všetky čísla sú deliteľné d. Každý štvorec, ktorý je deliteľný d, je z vlastností d deliteľný aj d^2. Najmenší taký štvorec je d^2, druhý najmenší je $4d^2$. Keď si vezmeme ľubovoľné číslo b, ktoré nie je na začiatku ani konci predpokladaného radu a označíme jeho susedov a a c, potom $a + b$ aj $b + c$ sú štvorce, a to rôzne (pretože a a c sú rôzne). Preto niektorý súčet musí byť aspoň druhý najmenší možný ($4d^2$) a niektoré z čísel v rade musí byť aspoň jeho polovica, teda $2d^2$. Použité budú aj všetky menšie násobky d, teda použité budú určite d^2 aj d.

Teraz ukážeme, že v rade nemôžu stáť vedľa seba také dve čísla, že jedno z nich je deliteľné d^2 a druhé nie je deliteľné d^2 (teda je deliteľné iba d-čkom), teda žiadne dve čísla tvaru xd^2 a yd, kde $d \nmid y$ nemôžu v rade stáť vedľa seba. Z toho už vyplýva, že v rade máme buď len násobky alebo len nenásobky d^2, čo je v prípade $d \neq 1$ spor. Súčet $xd^2 + yd$ má byť štvorec deliteľný d^2 (všetky štvorce, ktoré vieme získať, sú deliteľné d aj d^2). Teda

$$
\begin{aligned}
d^2 &\mid xd^2 + yd, \\
d^2 &\mid yd, \\
d &\mid y,
\end{aligned}
$$

čo je spor s výberom y. Hľadané čísla d sú teda práve všetky druhé mocniny prirodzených čísel.

2.9 Kompletne Márna Situácia

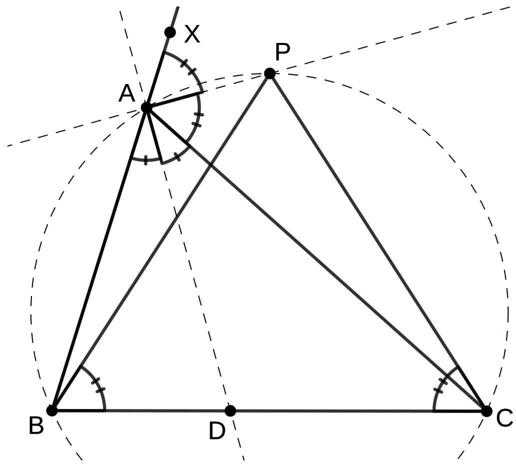
opravoval **Tomáš**

Zadanie. *Vzhľadom na to, že Ákosa s vojskami stále nebolo a Matúšova armáda sa nezadržateľne blížila k Vyšehradu, rozhodla sa kráľovná Kika povolať svojich troch najspoľahlivejších pomocníkov – Kubka, Marianosza a Slava. Tí dostali za úlohu preskúmať blížiacu sa hrozbu z nového uhla a nájsť rozumné východisko z tejto šlamastiky. Žiaľ, nech sa na problém pozerali ako len chceli, výsledok bol vždy rovnaký...*

V trojuholníku ABC, v ktorom platí $|AB| < |AC|$, označme D priesečník osi vnútorného uhla pri vrchole A a strany BC. Nech P je priesečník osi vonkajšieho uhla pri vrchole A a kružnice opísanej trojuholníku ABC rôzny od A. Uvažujme kružnicu k, ktorá prechádza bodmi A a P. Predpokladajme, že k pretína úsečku BP v jej vnútornom bode E a úsečku CP v jej vnútornom bode F. Dokážte, že uhly DEP a DFP majú rovnakú veľkosť.

Nazačiatok sa zamyslime, čo za bod je bod P. Je to priesečník osi vonkajšieho uhla a opísanej kružnice trojuholníka ABC. Tento bod je význačný pre trojuholník. Nazýva sa Antišvrčkov bod a je o ňom známe, že leží presne v strede horného oblúka BC (toho oblúka, ktorý obsahuje bod A) na opísanej kružnici. Ak ste o ňom ešte nepočuli, nevadí, teraz si spomínanú vlastnosť dokážeme.

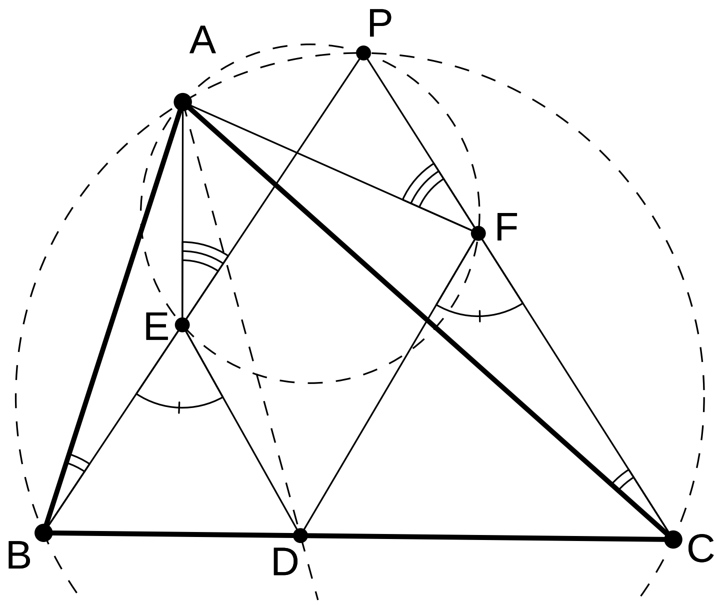
Označme si X nejaký bod na priamke AB taký, že A leží vnútri úsečky BX, aby sa nám lepšie popisovali uhly. Priamka AP je os vonkajšieho uhla, čo je inak povedané, že $|\sphericalangle PAX| = |\sphericalangle PAC|$. Nad tetivou PC máme obvodový uhol PAC. Nad tetivovou PB máme obvodový uhol $|\sphericalangle PCB| = 180° - |\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle PAX| = |\sphericalangle PAC|$. Nad tetivami PB a PC sú rovnako veľké obvodové uhly, takže $|PB| = |PC|$. Z toho priamo vyplývajú zaujímavé veci, napríklad že trojuholník PBC je rovnoramenný, že dĺžky oblúkov CP a PB sú rovnako veľké, a že bod P leží na ose úsečky BC.



Pozrime sa teraz na úlohu z opačnej strany. Aby sme dokázali $|\sphericalangle DEP| = |\sphericalangle DFP|$, stačí nám dokázať rovnosť ich doplnkových uhlov DEB a DFC. Všimnime si, že trojuholníky EBD a FCD už majú jednu dvojicu rovnakých uhlov $|\sphericalangle EBD| = |\sphericalangle FCD|$, keďže trojuholník PBC je rovnoramenný. Teda potrebujeme dokázať, že EBD a FCD sú podobné, aby mali rovnaké všetky uhly. Ak majú byť podobné, tak v akom pomere to bude? Predsa v pomere $|BD| : |DC|$. To je presne pomer úsečiek, na ktoré delí priamka AD (čo je os uhla BAC) úsečku BC. No a to všetci vieme, že os uhla delí protiľahlú stranu v pomere zvyšných dvoch strán trojuholníka. V našom prípade v pomere

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Chceli by sme ukázať, že aj strany BE, CF sú v tomto pomere, aby trojuholníky DBE a DCF boli podobné.



Poďme nájsť nejaké iné podobné trojuholníky, aby sme vedeli vypočítať daný pomer. Keďže $|AB| < |AC|$, bod A leží na opísanej kružnici medzi bodmi B, P. Dokážeme, že trojuholníky ABE a ACF sú podobné. Platí $|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle ACF|$, lebo ide o obvodové uhly nad tetivou AP na opísanej kružnici. Takisto $|\sphericalangle AEP| = |\sphericalangle AFP|$, lebo sú obvodové na kružnici k, takže sa rovnajú aj ich doplnkové uhly $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle AFC|$. Trojuholníky ABE

a ACF majú rovnaké dva uhly, takže sú podobné. Zapíšme pomer podobnosti.

$$\frac{|EB|}{|FC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

Následne sú podobné aj trojuholníky EBD a FCD, lebo $|\sphericalangle EBD| = |\sphericalangle FCD|$ a obe dvojice strán sú v rovnakom pomere:

$$\frac{|EB|}{|FC|} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|DC|}.$$

Preto $|\sphericalangle DEB| = |\sphericalangle DFC|$, čo sme chceli dokázať.

2.10 Konštrukčný Mirov Seminár

opravoval **Marek**

Zadanie. *Nakoniec sa trio KMS rozhodlo povolať architekta Mira. Miro ako správny znalec miestnych pomerov hneď vedel, že jediným možným riešením v danej situácii bude konštrukcia všetkých možných obranných funkcií na našich kráľovských mestských stenách. Taktiež tušil, že lokálne obyvateľstvo si pri tom vytrpí svoje...*

Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ také, že

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

platí pre všetky $x, y \in \mathbb{N}$ také, že $10^6 - 10^{-6} < x/y < 10^6 + 10^{-6}$.

Riešenie *(podľa Lucie Krajčoviechovej)*

Keďže $y \in \mathbf{N}$, tak určite $y \neq 0$, a preto môžeme podmienku zo zadania prepísať na podmienku $(10^6 - 10^{-6})y < x < (10^6 + 10^{-6})y$. Pre jednoduchosť si označíme $m = 10^6 - 10^{-6}$ a $M = 10^6 + 10^{-6}$.

Teraz by nám stačilo hľadať funkcie splňujúce rovnicu $f(x+y) = f(x) + f(y)$ na množine $[x, y] \in Z \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ danou $my < x < My$. Toto budeme nazývať podmienkou množiny Z. Zadefinujme si ešte množinu Z' danú $my + 2m + 1 < x < My$, ktorá je podmnožinou Z. Toto budeme nazývať podmienkou množiny Z'. Všetky dvojice $[x, y] \in Z'$ sú tiež z množiny Z, takže pre ne platí funkcionálna rovnica zo zadania.

Teraz vieme, že pre $[x, y] \in Z'$ platí $my + 2m + 1 < x < My$. A preto platia aj následujúce vzťahy:

$$my < x < My,$$

$$m(y+1) < x - 1 < M(y+1),$$
$$m(y+1) < x < M(y+1),$$
$$m(y+2) < x - 1 < M(y+2).$$

Nechávam na rozmyslenie. Preto môžeme napísať, že

$$f(x+y) = f(x) + f(y) = f(x-1) + f(y+1),$$

$$f(x+y+1) = f(x) + f(y+1) = f(x-1) + f(y+2).$$

Na to, aby sme toto mohli ukázať, tak sme potrebovali ukázať, že dvojice $[x, y]$, $[x-1, y+1]$, $[x, y+1]$, $[x-1, y+2]$ vyhovujú tiež podmienke množiny Z. To presne hovoria predchádzajúce nerovnosti.

Úpravou dostaneme

$$f(x) - f(x-1) = f(y+1) - f(y),$$

$$f(x) - f(x-1) = f(y+2) - f(y+1).$$

Porovnaním pravých strán dostaneme

$$f(y+1) - f(y) = f(x) - f(x-1) = f(y+2) - f(y+1).$$

Táto rovnica musí teda platiť, pre ľubovoľné y, pre ktoré existuje x také, že $[x, y] \in Z'$. Kedy také x existuje? Napríklad určite vtedy keď $My - (my + 2m + 1) > 1$, lebo medzi dvomi číslami, ktoré sú odseba ďalej ako 1 je určite celé číslo. To je vtedy keď

$$y > \frac{2+2m}{M-m} = 10^{12} + 10^6 - 1.$$

Čiže $y \geq 10^{12} + 10^6$. Také najmenšie y označíme $y_0 = 10^{12} + 10^6$. A označíme konštantu $c = f(y_0 + 1) - f(y_0)$. Potom vieme, že pre všetky prirodzené čísla $y \geq y_0$ platí $f(y+1) - f(y) = f(y+2) - f(y+1)$, takže pre všetky $y \geq y_0 + 2$ platí

$$f(y) = 2f(y-1) - f(y-2). \tag{14}$$

Teraz indukciou ukážeme, že pre všetky $y \geq y_0$ platí

$$f(y) = f(y_0) + (f(y_0+1) - f(y_0))(y - y_0) = f(y_0) + c(y - y_0). \tag{15}$$

Pre $y = y_0$ aj pre $y = y_0 + 1$ tvrdenie zjavne platí. Pre $y \geq y_0 + 2$ použijeme indukciu využívajúcu posledné dva kroky a rovnicu 14, a indukčný predpoklad 15 pre $y - 1$ a $y - 2$. Dostaneme

$$\begin{aligned} f(y) &= 2f(y-1) - f(y-2) = 2f(y_0) + 2c(y - 1 - y_0) - f(y_0) - c(y - 2 - y_0) \\ &= f(y_0) + c(y - y_0). \end{aligned}$$

Tým sme induckiou ukázali, že pre všetky $y \geq y_0$ platí $f(y) = f(y_0) + c(y - y_0)$. Teraz zvoľme $x = 10^6 y_0$, $y = y_0$. Zjavne $x + y_0$ aj x sú väčšie ako y_0, taktiež $my < x < My$. Takže využitím 15 musí platiť aj

$$f(y_0) = f(x + y_0) - f(x) = f(y_0) + c(x + y_0 - y_0) - (f(y_0) + c(x - y_0)) = cy_0.$$

Teraz to iba vhodne dosadíme do 15

$$f(y) = f(y_0) + c(y - y_0) = cy_0 + c(y - y_0) = cy. \tag{to}$$

Teraz potrebujeme dokázať, že aj pre všetky $y < y_0$ platí $f(y) = cy$. To dokážeme indukciou, avšak tentokrát indukčný krok bude klesajúci, tj. z toho, že *(to)* platí pre $y = y_0$ ukážeme, že *(to)* platí pre $y = y_0 - 1$ a z toho následne ukážeme, že *(to)* platí pre $y = y_0 - 2$ atď. Zároveň môžeme predpokladať, že pre všetky $y \geq y_0$ už tvrdenie platí, pretože sme ho dokázali. Pre $y = y_0$ pochopiteľne máme tvrdenie dokázané. Poďme dokázať, že *(to)* platí aj pre $y < y_0$. Zvoľme $x = 10^6 y$ zjavne podmienka množiny Z je splnená, a keďže $x > y$ aj $x + y > y$ tak z *(to)* máme:

$$f(y) = f(x+y) - f(x) = c(x+y) - cx = cy.$$

Rovnosť $f(y) = cy$ teda platí ako aj pre $y \geq y_0$ tak aj pre $y < y_0$, a teda platí pre všetky $y \in \mathbf{N}$.

Teraz nastala vhodná chvíľa, keď treba overiť, že všetky funkcie $f(y) = cy$, pre ľubovoľné $c \in \mathbf{R}$ vyhovujú zadaniu. Našťastie $f(x+y) = c(x+y) = cx + cy = f(x) + f(y)$ platí, a preto je to riešením našej funkcionálnej rovnice.

Iný záver *(podľa Jakuba Paradu)*:

Teda záverom máme na mysli dôkaz, že pre $y < y_0$ *(to)* platí.

Zvoľme si najväčšie y pre, ktoré $f(y)$ nie je lineárna funkcia tj. $f(y) \neq cy$. Nech $[x, y] \in Z$. Potom môžeme písať $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Platí však, že $f(x+y)$ je tvaru $c(x+y)$ a $f(x)$ je tiež tvaru cx. Potom nutne aj $f(y)$ je nutne cy. Čo je spor. Také x, $x > y$ vždy existuje, stačí zobrať $x = 10^6 y$, a pre také číslo je *(to)* zaručené.