Riešenia 3. kola zimnej časti

3.1 Krajina Matematických Špásov ($\kappa \leq 1$) opravovala **Robberta**

Zadanie. *Uprostred stola stála krištáľová guľa. Z jedného konca na ňu hľadel jasnozrivý králik a z druhej zúfalý Kebab. Teraz už vedel, že naháňať pred bitkou králika a skočiť za ním do nory bola osudová chyba. Skončí rovnako ako Aňa, navždy stratený v Krajine matematických špásov a nikdy odtiaľto neujde. A mal pravdu, pretože vševidiaca guľa už hľadala náhodné číslo, zatiaľ čo králik mu položil prvú hádanku.*

Nech vševidiaca guľa ukáže náhodné celé číslo x medzi 1 a 10^{12}(vrátane). Aká je pravdepodobnosť, že posledné dvojčíslie čísla x^3 bude 11?

Najprv sa pozrime na to, ktoré čísla medzi 1 a 10^{12} dajú po umocnení na tretiu posledné dvojčíslie 11. Nemusíme na to skúmať každé jedno číslo zvlášť. Stačí, ak sa pozrieme na zvyšky po delení číslom 100, teda na všetky možné posledné dvojčíslia. Totiž posledné dvojčíslie x nám určuje posledné dvojčíslia x^3. Tieto zvyšky môžu byť len čísla 0 až 99. Pravdepodobnosť výskytu každého dvojčíslia je rovnaká, pretože máme čísla od 1 do 10^{12}.

Teraz nás zaujíma, koľko z týchto posledných dvojčíslí po umocnení na tretiu končí 11. Môžme to urobiť dvoma spôsobmi, šikovnejšie a pracne. Pracný spôsob je jednoduchý. Iba vyskúšame všetky možnosti tak, že každé číslo od 0 po 99 umocníme na tretiu a zistíme, či vyhovuje. Šikovnejší spôsob je pre tých, ktorým sa nechcelo skúšať 100 možností.

Vieme, že žiadne číslo deliteľné 2 po umocnení nebude končiť 11, lebo posledná cifra musí byť nutne párna. Rovnako, ani číslo deliteľné 5 nebude končiť 11, lebo posledná cifra bude buď 0, alebo 5. Teraz by už stačilo vyskúšať len 40 možností. Ak sa pozrieme na čísla 0 až 99, ako na zvyšky po delení 10, dostaneme poslednú cifru čísla. Tá po umocnení na tretiu musí byť nutne 1 (aby bolo posledné dvojčíslie 11). Takže nám stačí vyskúšať len 4 možnosti $(1, 3, 7, 9)$ a zistíme, že posledná cifra dvojčíslia pred umocnením môže byť len 1. Už len overíme, koľko z čísel $01, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91$ po umocnení na tretiu končí 11.

Nakoniec zistíme, že len $71^3 = 357911$. Preto jediné vyhovujúce posledné dvojčíslie zo 100 možných je 71. Každé posledné dvojčíslie sa medzi číslami 1 až 10^{12} vyskytuje rovnako veľa krát. Pravdepodobnosť, že posledné dvojčíslie čísla x^3 bude 11 je 1/100.

3.2 Králik Mätie Sultána ($\kappa \leq 2$) opravovali **Jožo** a **Veronika**

Zadanie. *Sultánovi sa už z úloh zatmieval mozog, niekde pri dvadsiatej hádanke ich už aj prestal počítať. Nevládal. Bol porazený. Vedel, že sa už nikdy odtiaľto nedostane a bez jeho velenia turecké vojská isto prehrajú bitku pri Moháči. A králik? Ten sa bavil. S potmehúdskym úškrnom vyčaroval na stôl balíček matgických kariet a povedal:*

„Tu máš balík 52 matgických kariet, ktoré som ti práve náhodne pootáčal tvárou nahor alebo tvárou nadol[1]. V jednom kroku smieš rozdeliť tento balík, jednu časť otočiť naopak a umiestniť ju späť na druhú časť. Moja otázka znie: ‚Vieš otočiť všetky karty lícom nahor bez ohľadu na to, ako som ich otočil?‘ “

[1] Karty pritom naďalej ostali v balíku.

Zadanie tejto úlohy sa dalo pochopiť dvoma spôsobmi. Nebolo v ňom jasne povedané, či vidíme otočenie všetkých kariet v balíčku alebo len jednej karty navrchu.

Ak otočenie kariet na začiatku nevidíme, tak si ho vieme zistiť napríklad takto:

Otočenie i-tej karty zistíme tak, že prvých i kariet v balíčku otočíme. Teraz máme i-tu kartu navrchu balíčka a vidíme jej otočenie. Potom otočíme všetkých i kariet naspäť.

Potom vieme pokračovať postupom, ako keby sme karty videli, ktorý ilustrujeme nižšie. Preto veríme, že vám táto nejasnosť v zadaní nespôsobila problémy.

Riešenie *(podľa Martina Štepánka)*

Niekoľko kariet na vrchu (aspoň 1) je otočených rovnako. Ak nie je rovnako otočený celý balíček, je priamo pod nimi niekoľko (tiež aspoň 1) kariet otočených opačne (inak by patrili k pôvodným kartám). Ak tieto rovnaké karty zoberieme, otočíme opačne a položíme naspäť, tak budú stále na vrchu kôpky, ale otočené rovnako ako tie karty tesne pod nimi. To znamená, že počet kariet na vrchu, ktoré sú otočené rovnako, sa pri každom takomto kroku zväčší. Preto sa opakovaním tohto kroku napokon dostaneme až na koniec balíčka.

Potom je buď úloha splnená a karty sú lícom nahor, alebo sú všetky lícom nadol a celý balíček ešte raz otočíme.

3.3 Komorná Múdro Slúži ($\kappa \leq 3$) opravoval **Ondrej**

Zadanie. *Vďaka Konštrukčnému Mirovmu Semináru mesto ustálo všetky útoky Kazisveta Matúša Strašného a jeho Katapultu Monštruóznej Sily. O chvíľu obom stranám došlo, že priamym útokom nikto túto vojnu nevyhrá a tak Matúš zahájil blokádu mesta. Aby sa kráľovná Kika vyhla hladomoru, povolala svoju najmúdrejšiu komornú Magdu a dala jej za úlohu nájsť všetky zásoby jedla. Zásoby sú však poschovávané po celom meste podľa veľmi sofistikovaného vzorca tak, aby ich Ákos nenašiel a nezjedol ich. Magda vďaka svojmu umu hravo našla všetky zásoby jedla v meste. Nájdete ich aj vy?*

Nájdite všetky trojice kladných celých čísel (a, b, n), pre ktoré platí:

$$a! + b! = 2^n$$

Máme nájsť všetky trojice kladných celých čísel(a, b, n), čiže $a, b, n \in \mathbb{N}$, že $a! + b! = 2^n$. Keďže vidíme, že tam máme dva faktoriály a 2^n tak sa pokúsime nájsť tieto trojice pomocou prvočíselného rozkladu.

Faktoriál je také číslo ktoré vieme zapísať ako $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, čo už samo o sebe vyzerá podobne ako prvočíselný rozklad. Číslo 2^n zas vieme napísať ako $2^n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2$, čo je prvočíselný rozklad čísla 2^n.

Zoberme si dva veľké faktoriály, také že $a, b \geq 3$. Tie vieme napísať do rovnice ako $a!+b! = 1\cdot2\cdot3\cdot o+1\cdot2\cdot3\cdot s = 2^n$ kde o a s sú zvyšné činitele faktoriálu. Z toho vieme vyňať 3 a dostaneme $3 \cdot (1 \cdot 2 \cdot o + 1 \cdot 2 \cdot s) = 2^n$, z čoho ale vyplýva, že číslo 2^n by malo byť deliteľné tromi. To ale nie je pravda, lebo v prvočíselnom rozklade má len dvojky. Takže nám z tohto vyplýva, že a,b nemôžu byť naraz obidve väčšie ako 2.

Teraz sa pozrime na prípad, že BUNV [2] $a \geq 4$, $b < 3$. Pre $b = 2$ dostaneme rovnicu $a! + 2! = 2^n$, túto môžeme predeliť 2. Dostaneme $\frac{a!}{2} + 1 = 2^{n-1}$. O $\frac{a!}{2}$ vieme, že je párne, keďže obsahuje ešte minimálne 4-ku v rozklade na súčin. Z toho vyplýva, že $\frac{a!}{2} + 1$ je nepárne, a teda sa nemôže rovnať 2^{n-1} (2^{n-1} je nepárne len keď $n = 1$,

[2] Bez ujmy na všeobecnosti si môžeme vybrať, ktoré z čísel a, b je menšie. Ak by to bolo naopak, tak len vymeníme značenie, pretože a, b hrajú rovnakú úlohu v našej rovnici (rovnica je symetrická vzhľadom na výmenu a, b).

čo nemá žiadne riešenie, lebo súčet dvoch prirodzených čísel je minimálne 2). Pre $b = 1$ tiež nesedí parita, dokonca ak je jedno z čísel a, b rovné 1, tak kvôli parite musí byť aj to druhé 1.

Takže sme zistili, že obe $a, b \leq 3$, ale nemôžu byť obe naraz rovné 3, a že keď sa len jedno rovná 1 tak to nemá riešenie. Z toho máme 4 možné kombinácie a a b, a to $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$ a $(3, 2)$. Tieto vieme dosadiť a dostaneme z toho trojice $(1, 1, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(2, 3, 3)$ a $(3, 2, 3)$.

Našli sme štyri trojice $(1, 1, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(2, 3, 3)$ a $(3, 2, 3)$, ktoré spĺňajú našu rovnosť a dokázali sme, že žiadne iné neexistujú.

3.4 Korytnačka Maďarských Šermiarov ($\kappa \leq 5$)

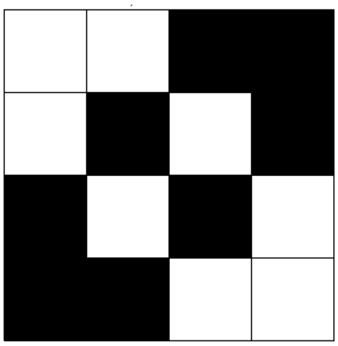
opravovali **Kika** a **Juro R.**

Zadanie. *Zatiaľ, čo Turci pri Moháči márne hľadali svojho sultána, uhorskí generáli domýšľali novú vojenskú taktiku, ktorou by získali prevahu nad nepriateľom. Šlo o štvorcovú formáciu s krycím názvom „Korytnačka", v ktorej by podľa istých pravidiel spolu bojovalo niekoľko šermiarov s bielymi a čiernymi štítmi ako jeden celok. Žiaden generál však nevedel predpovedať, či táto formácia môže byť dostatočne veľká na to, aby porazila Turkov. A to i napriek tomu, že sa im podarilo daný problém zúžiť na nasledovnú úlohu:*

Majme štvorcovú tabuľku zloženú z $n \times n$ menších štvorčekov. Každý štvorček je zafarbený buď nabielo, alebo načierno. Pre každú dvojicu stĺpcov a každú dvojicu riadkov platí, že štyri štvorčeky ich prieniku nesmú byť jednej farby. Aké najväčšie môže byť n?

Najväčšie možné n je 4. Dokážeme, že pre tabuľku 4×4 sa nám podarí nájsť vhodné zafarbenie a pre n väčšie ako 4 také zafarbenie sa nedá nájsť.

Pre $n = 4$, takéto vhodné zafarbenie vieme nájsť, stačí skontrolovať, že všetky štvorice štvorčekov, ktoré sú prieniky dvoch riadkov a dvoch stĺpcov (Akoby tvoria rohy obdĺžniky) majú aspoň jeden štvorček z každej farby.

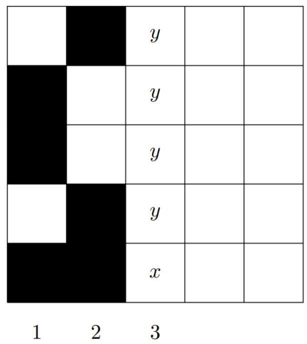


Pre n väčšie ako 4, vždy môžeme nájsť tabuľku veľkosti 5×5 v tabuľke $n \times n$. Ak dokážeme, že nemôžeme nájsť vhodné zafarbenie pre $n = 5$, tak nebudeme môcť nájsť ani vhodné zafarbenie pre $n > 5$.

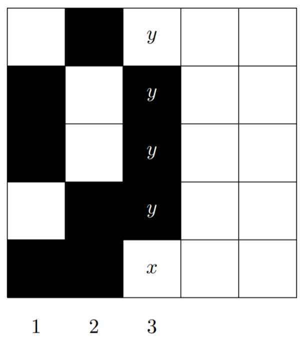
V tabuľke 5×5 má každý riadok a stĺpec 5 štvorčekov. Teda v každom riadku a stĺpci budú aspoň 3 čierne štvorčeky alebo aspoň 3 biele štvorčeky. Povieme, že stĺpec alebo riadok má dominantnú čiernu alebo bielu farbu.

Keďže máme 5 stĺpcov, tak aspoň tri z nich budú mať rovnakú dominantnú farbu. Môžeme predpokladať že táto dominantná farba je čierna a prvé 3 stĺpce majú čiernu dominantnú.

Keď nakreslíme prvé dva stĺpce, tak najviac jeden riadok môže mať dva čierne štvorčeky, inak by sme mali prienik ktorý má 4 štvorčeky rovnakej farby. Vždy tam bude riadok s dvomi čiernymi štvorčekmi, takže to musí vyzerať ako na našom obrázku, len riadky môžu byť poprehadzované.



Keď chceme pridať 3 čierne štvorčeky do tretieho stĺpca, nemôžeme dať čierny štvorček do toho istého riadku, kde už sú dva čierne štvorčeky. Keby štvorček x bol čierny, tak ostatné 4 štvorčeky v tomto stĺpci by museli byť biele. Ale predpokladali sme, že v tomto stĺpci sú 3 čierne štvorčeky. Teda štvorček označený x bude určite biely.



Teda 3 zo 4 štvorčekov y budú čierne. A teda buď 1. a 4. riadok alebo 2. a 3. riadok budú mať čierne štvorčeky v treťom stĺpci a vznikne v tých dvoch riadkoch prienik z dvoma stĺpcami tej istej farby. Teda pre n väčšie ako 4, nemôžeme nájsť také zafarbenie, kde ani jeden prienik pozostávajúci zo štyroch štvorčekov nie je jednofarebný.

3.5 Kráľovičova Manifestácia Stožiarom ($\kappa \leq 8$)

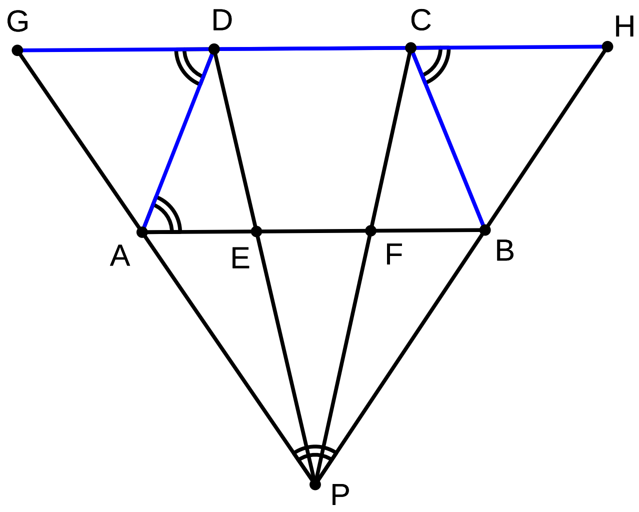
opravovali **Števka** a **Tomáš**

Zadanie. *Po vojne je každý generálom. O to horšie, keď nemáte generála ani pred bitkou. To bol nakoniec i dôvod neslávneho konca tureckej armády, ktorá nedokázala odolávať nájazdom uhorských koníkov. Na počesť tohto veľkolepého víťazstva sa Uhori rozhodli na bojisku vztýčiť víťazný stĺp, ktorý by bol symbolom tohto veľkolepého víťazstva pre mnohé generácie. Ukázalo sa však, že vztýčiť víťazný stĺp len tak uprostred bojiska je omnoho ťažšie, ako sa predpokladalo a na jeho vztýčenie bude potrebných kopec obskúrnych prerekvizít. Veď usúďte sami:*

Nech $ABCD$ je lichobežník, kde $AB \parallel CD$, $|AB| > |CD|$ a $|BC| = |CD| = |DA|$. Body E a F delia stranu AB na tri rovnako dlhé časti s tým, že bod E je medzi bodmi A a F. Priamky CF a DE sa pretínajú v bode P. Dokážte, že $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle DAB|$.

Hneď na prvý pohľad nám môže byť podozrivé (keď si zakreslíme všetky priamky a uhly spomínané v zadaní), že bod P je spojený 4-mi úsečkami so všetkými zadanými bodmi. Dokonca na dvoch z nich je tých bodov viac. Zároveň všetky tieto body ležia na dvoch rovnobežných priamkach. Vďaka tomu máme podobné trojuholníky PEF a PDC, o ktorých navyše vieme, že strana CD je rovnobežná so stranou EF a zároveň $|EF| = |AE| = |FB|$. Skúsenejším by to už mohlo napovedať, že narazili na rovnoľahlosť z bodu P.

Tak si skúsme predĺžiť aj úsečky PA a PB tak, aby sa preťali s priamkou CD. Ich priesečníky označme postupne G a H. Tým dostaneme niekoľko dvojíc podobných (rovnoľahlých) trojuholníkov, medzi nimi aj dvojice trojuholníkov PAE, PGD a PBF, PHC. Ľahko ukážeme, že koeficient podobnosti všetkých troch spomínaných dvojíc je rovnaký. Preto keď platí $|AE| = |EF| = |FB|$, tak potom aj $|GD| = |DC| = |CH|$.



Vďaka tomu sú trojuholníky ADG a BCH rovnoramenné. Keďže lichobežník je tiež rovnoramenný, máme $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle BCD|$, preto platí aj $|\sphericalangle ADG| = |\sphericalangle BCH|$. Vďaka tomu vieme, že trojuholníky ADG, BCH sú zhodné.

To nám zároveň hovorí, že $|\sphericalangle AGD| = |\sphericalangle BHC|$, preto trojuholník GPH je tiež rovnoramenný a podobný s trojuholníkmi ADG a BCH. Z podobnosti máme $|\sphericalangle ADG| = |\sphericalangle GPH|$. Už iba posledný krok, uhly ADG a DAB sú striedavé, preto $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ADG| = |\sphericalangle APB|$.

3.6 Kompulzorná Mestská Súťaž

opravovali **Gianetta** a **Mišo**

Zadanie. *Vzhľadom na nudný charakter obliehania nebolo prekvapením, že sedláci v meste sa začali nudiť. Aby sa predišlo zbytočným problémom s obyvateľstvom, vydala kráľovná v mene latinského úslovia panem et circenses nový kráľovský dekrét, ktorý prikazoval sedlákom hrať sa vo dvojiciach nasledovnú hru. A tak sa sedláci začali povinne hrať nasledovnú hru:*

Sedlák 1 nakreslí na mapu 2019 *miest a n ciest, pričom každá cesta spája dve rôzne mestá a každé dve mestá sú spojené najviac jednou cestou. Potom hrá so sedlákom 2 hru, v ktorej na striedačku mažú mestá z mapy spolu s cestami, ktoré z nich vychádzajú. Prvé mesto maže sedlák 1. Hra končí, keď ostanú na mape len dve mestá. Pokiaľ sú spojené cestou, vyhrá sedlák 2, inak vyhrá sedlák 1. Nájdite najmenšie celé číslo n, pre ktoré má sedlák 2 víťaznú stratégiu.*

Pri hľadaní víťazných stratégií často tvoríme stratégie tak, že reagujú na ťah súpera. Keď chceme nájsť najmenšie n, pre ktoré sedlák 2 vie vyhrať, musíme dokázať, že pre všetky menšie n vie vyhrať sedlák 1. Pozrime sa teda najprv na jeho stratégiu.

Hlavnou myšlienkou stratégie pre sedláka 1 bude, že si mestá budeme chcieť rozdeliť do dvojíc, pričom dve mestá v dvojici nikdy nebudú spojené cestou. Sedlák 1 sa bude usilovať o to, aby na konci hry ostala práve jedna z takýchto nespojených dvojíc, čím vyhrá. Na začiatku sedlák 1 zmaže niektoré mesto, čím ostane párny počet miest. Potom vždy zmaže druhé mesto v dvojici, z ktorej v predchádzajúcom ťahu zmazal mesto sedlák 2. Sedlák 1 je ten, kto tvorí mapu, a teda môže nakresliť všetky cesty okrem ciest medzi svojimi vybranými 1009 dvojicami miest.

Všetkých dvojíc miest je $\binom{2019}{2} = \frac{2019 \cdot 2018}{2}$, pričom $\binom{2019}{2}$ je kombinačné číslo, ktoré nám vyjadruje, koľko existuje dvojíc z 2019 prvkov. Sedlákovi 1 stačí vynechať 1009 z nich. Ak teda $n \leq \binom{2019}{2} - 1009$, sedlák 1 má víťaznú stratégiu, ktorá funguje presne takto:

1. Sedlák 1 si na začiatku popáruje mestá do 1009 dvojíc, jedno ostane nespárované.
2. Medzi všetky dvojice miest okrem týchto 1009 párov pridá cestu, čím vznikne $\binom{2019}{2} - 1009$ ciest. Ak je n menšie, tak nejaké cesty nepridá, na stratégiu to nemá vplyv.
3. V prvom ťahu sedlák 1 zmaže nespárované mesto.
4. V každom ďalšom ťahu zmaže sedlák 1 mesto, ktoré je vo dvojici s mestom, ktoré práve zmazal sedlák 2. V každej dvojici po sebe idúcich ťahov (najskôr sedlák 2 a potom sedlák 1) zmizne jedna dvojica miest.
5. Keď už budú existovať iba 2 mestá, je to jedna z dvojíc, ktorú si sedlák 1 zvolil na začiatku, teda nie sú spojené cestou, čiže sedlák 1 vyhral.

Pozrime sa teraz na prípad, kedy $n \geq \binom{2019}{2} - 1008$. To už máme cesty takmer medzi každou dvojicou miest. Presnejšie, existuje najviac 1008 dvojíc miest, ktoré nie sú spojené. Všimnime si, že sedlák 1 má 1009 ťahov a sedlák 2 má 1008 ťahov (aby nakoniec ostali práve dve mestá). Sedlák 2 vie teda (nezávisle na ťahoch sedláka 1) v každom svojom ťahu zmazať jedno mesto z niektorej nespojenej dvojice. Ak už z každej nespojenej dvojice zmazal aspoň jedno mesto, ďalšie ťahy môže robiť ľubovoľne (napríklad ak n je ešte väčšie alebo nejaké mesto patrilo do viacerých dvojíc atď.). V každom prípade z každej dvojice pôvodne nespojených miest bolo aspoň jedno mesto zmazané, a teda dvojica miest, ktorá ostala na konci, je nutne spojená cestou a sedlák 2 vyhral.

Ukázali sme, že najmenšie n, pre ktoré ma sedlák 2 víťaznú stratégiu, je $\binom{2019}{2} - 1008 = 2018 \cdot 1009 + 1$.

Poznámky opravovateľa

Mnohí z vás si poriadne neuvedomili, čo všetko zadanie úlohy požadovalo. Keďže máme hľadať najmenšie celé n spĺňajúce danú podmienku, musíme ukázať, že pre všetky menšie n má víťaznú stratégiu sedlák 1, zatiaľ čo pre nájdené n má víťaznú stratégiu sedlák 2. Keď ukazujeme, že niektorý sedlák má víťaznú stratégiu, musí táto stratégia fungovať bez ohľadu na to, čo robí druhý sedlák.

Mnohé riešenia postupovali nesprávne tak, že našli nejaké rozmiestnenie ciest (väčšinou sa zvolilo 1010 miest, ktoré sa pospájali všetky navzájom a ešte sa napojili na všetky zvyšné mestá, čím vzniklo $\binom{1010}{2} + 1010 \cdot 1009$ ciest, asi o štvrtinu menej ako $n = \binom{2019}{2} - 1008$) a o tomto rozmiestnení ukázali, že ak doň pridáme ľubovoľnú ďalšiu cestu, sedlák 2 vyhrá. To však nie je správne, pretože sedlák 1 môže cesty nakresliť úplne inak (ako môžete vidieť v riešení) a vyhrať aj pri ešte vyššom počte ciest.

3.7 Kruhy Medzinárodnej Šarvátky

opravoval **Marek**

Zadanie. *Mesto odolalo obliehaniu. Matúš pokušeniu vyhodiť svojich neschopných generálov zo skupiny. A Ákos nutkaniu zastaviť sa cestou z bojiska v najbližšom mäsiarstve po klobásku. Tak sa stalo, že všetko toto sa stretlo na jednej kope a všetci žili v obliehaní, síce nie šťastní, ale aspoň dokým nepomreli. Mesto obkľúčili Mirove hradby, ktoré obkľúčil Matúš, ktorého obkľúčila Ákosova armáda. A pletky s kružnicami sa mohli začať.*

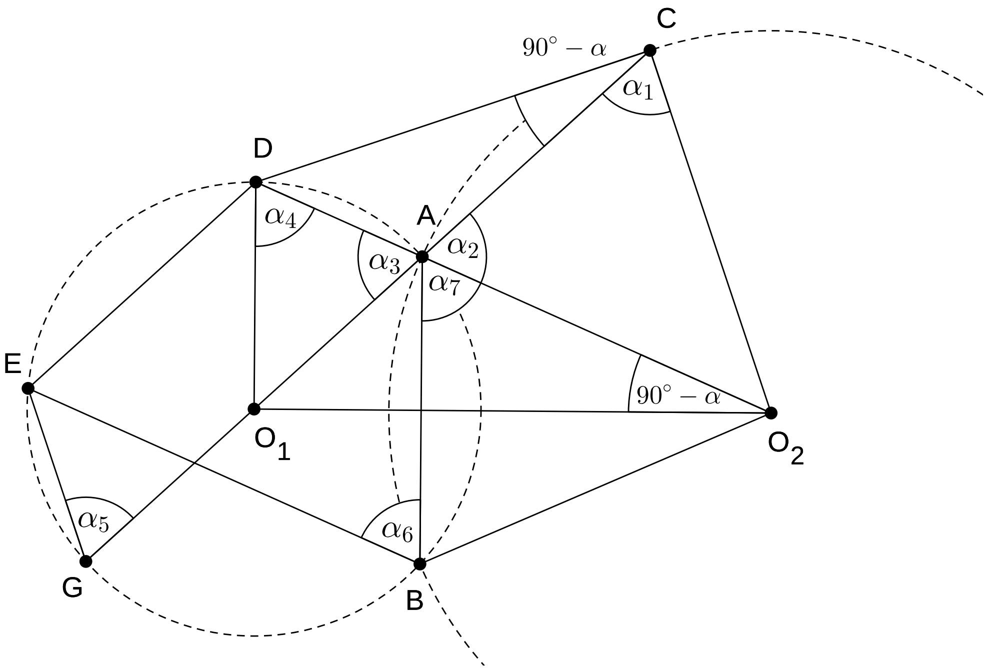
Dané sú kružnice k_1 a k_2, ktoré majú stredy O_1 a O_2 a ktoré sa pretínajú v bodoch A a B. Priamka O_1A pretína k_2 v bodoch A a C a priamka O_2A pretína k_1 v bodoch A a D, pričom A je vnútorným bodom úsečiek O_1C aj O_2D. Priamka rovnobežná s priamkou AD, ktorá prechádza cez bod B pretína k_1 v bodoch B a E. Predpokladajme, že priamky AC a DE sú navzájom rovnobežné. Dokážte, že priamka CD je kolmá na priamku CO_2.

Príprava pred úlohou. Plán útoku na túto úlohu bude nasledovný, dokážeme, že O_1, O_2, C, D ležia na kružnici. Potom dokážeme, že $|\sphericalangle DCO_1| + |\sphericalangle O_1CO_2| = 90°$. Na to však využijeme niektoré poznatky z geometrie, ktoré bez dôkazov sformulujeme do *Lemy 1* a *Lemy 2*. Dôkazy si môžete skúsiť spraviť na domácu úlohu. :)

Lema 1. Majme kružnicu k a v nej dve rovnobežné tetivy t_1 a t_2, potom body $A, B \in k \cap t_1; A \neq B$ a $C, D \in k \cap t_2; C \neq D$ tvoria rovnoramenný lichobežník.

Lema 2. Predpokladajme, že body Y, Z ležia v tej istej polrovine danej priamkou WX. Potom body W, X, Y, Z ležia na kružnici práve vtedy, keď platí $|\sphericalangle WYX| = |\sphericalangle WZX|$.

Riešenie. Označme $|\sphericalangle ACO_2| = \alpha$. Keďže trojuholník ACO_2 je rovnoramenný, tak aj $|\sphericalangle O_2AC| = \alpha$. Potom aj $|\sphericalangle DAO_1| = \alpha$, pretože, sa jedná o vrcholové uhly. Taktiež vieme, že trojuholník O_1AD je rovnoramenný s ramenami O_1A a O_1D. Teda aj $|\sphericalangle O_1DA| = \alpha$ a z rovnosti $|\sphericalangle ACO_2| = \alpha = |\sphericalangle O_1DA|$ vidíme, že body O_1, O_2, C, D vďaka Leme 2 ležia na kružnici. Ešte podotkneme, že body C, D vskutku ležia v tej istej polrovine danej priamkou O_1, O_2.



Dodefinujme bod G ako druhý priesečník priamky AO_1 s kružnicou k_1. Keďže tetivy GA a ED sú rovnobežné tak podľa Lemy 1 je $GADE$ rovnoramenný lichobežník, a preto platí pre uhly $|\sphericalangle DAG| = |\sphericalangle AGE| = \alpha$. Ďalej, keďže body $AEGB$ ležia na kružnici tak musí taktiež platiť, že $|\sphericalangle AGE| = |\sphericalangle ABE| = \alpha$. Keďže priamky O_2D a BE sú rovnobežné (zo zadania), tak uhly $|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle BAO_2| = \alpha$. A nakoniec, keďže AO_2B je rovnoramenný trojuholník tak $|\sphericalangle AO_2B| = 180° - 2\alpha$.

Je známe, že spojnica AB je rozpolená spojnicou stredov kružníc O_1O_2 a preto uhol $|\sphericalangle AO_2O_1| = 90° - \alpha$. No ale z tetivovosti O_1O_2CD je jasné, že aj $|\sphericalangle O_1CD| = 90° - \alpha$. A teraz si spomenieme, že na začiatku sme si povedali, že $|\sphericalangle ACO_2| = \alpha$, takže dokopy, $|\sphericalangle O_1CD| + |\sphericalangle ACO_2| = 90° - \alpha + \alpha = 90°$. Čo je to, čo sme chceli dokázať.

3.8 Končíme s Márnou Situáciou

opravoval **Juro**

Zadanie. *Viacnásobné obliehania nevyhovovali nikomu. Bolo preto prirodzené, že kráľovná potrebovala nájsť rozumné riešenie tejto situácie. A tak sa stalo, že poverila svojich troch najlepších pomocníkov Kubka, Mariánosza a Slava, aby jej našli všetky možné riešenia. Potom by si už sama vedela poľahky vybrať to najlepšie z nich.*

Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že rovnica

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$$

má práve 2019 riešení tvaru (x, y), kde x a y sú prirodzené čísla také, že $x \geq y$.

Začnime jednoducho - vynásobme rovnicu všetkými menovateľmi. Dostávame $n(x+y) = xy$. Označme $\delta = NSD(x, y)$. Ďalej označme

$$a = \frac{x}{\delta}, \quad b = \frac{y}{\delta}, \quad c = \frac{n}{ab}.$$

Lema. a, b, c sú celé čísla.

Dôkaz lemy. a, b sú zjavne celé. Čo sa týka c, máme

$$n(x+y) = xy,$$

$$n\delta(a+b) = (\delta a)(\delta b),$$

$$n(a+b) = ab\delta.$$

Vieme ale že a, b sú nesúdeliteľné, a teda $a \nmid (a+b) \Rightarrow a \mid n$. Obdobne $b \mid n$, a aj spolu $ab \mid n$.

Hľadajme počet všetkých prirodzených trojíc a, b, c takých, že spĺňajú nasledujúce podmienky:

$$abc = n, \quad NSD(a, b) = 1, \quad a \geq b. \tag{1}$$

Lema. Pre každú trojicu čísel a, b, c spĺňajúcu podmienky (1) existuje práve jedna dvojica čísel x, y spĺňajúca zadanie. Opačne tiež, pre každé x, y spĺňajúce zadanie existuje práve jedna trojica a, b, c. Teda je ekvivalentné počítať počet trojíc a, b, c spĺňajúcich (1) ako počítať počet dvojíc x, y spĺňajúcich zadanie.

Dôkaz lemy. Platí

$$\frac{1}{a\delta} + \frac{1}{b\delta} = \frac{1}{abc} \iff \delta = (a+b)c.$$

Stačí zvoliť $x = a\delta = a(a+b)c, \quad y = b\delta = b(a+b)c$. Opačne, triviálne vieme že x, y jednoznačne určujú trojicu a, b, c. Takže existuje jednoznačné prepojenie medzi a, b, c a x, y.

Čo sme tým získali a čo sme vlastne spravili? Zjednodušili sme si zadanie tak, aby sme dostali nesúdeliteľné čísla a, b, u ktorých vieme ľahko počítať súčin – sledujte ďalej. Hľadajme teda koľko trojíc a, b, c spĺňajúcich (1) existuje. Uvažujme prvočíselné rozklady. Označme

- $n = p_1^{N_1} \cdots p_k^{N_k}$,
- $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$,
- $b = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_1}$,
- $c = p_1^{\gamma_1} \cdots p_k^{\gamma_1}$.

Z prvej podmienky v (1) musí platiť $N_i = \alpha_i + \beta_i + \gamma_i$, z druhej podmienky musí byť bud $\alpha_i = 0$ alebo $\beta_i = 0$. Tretiu podmienku využijeme neskôr aby sme iba vydelili počet riešení dvoma.

Nech je **dané** n (a teda dané N_1). Ľubovoľne si zvoľme $\alpha_1 \leq N_1$. Na to máme presne $N_1 + 1$ možností. Ak $\alpha_1 \neq 0$, tak máme jednoznačne určené aj $\beta_1 = 0, \gamma_1 = N_1 - \alpha_1$. Ak $\alpha_1 = 0$, tak máme $N_1 + 1$ možností čo môže byť $\beta_1 \leq N_1$. Takže $N_1 + 1$ možností pre α_1, $N_1 + 1$ možností pre β_1, spolu $2N_1 + 2$ možností. Pozor, možnosť že $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ sme započítali dvakrát, teda celkový počet možností ako sa môžu pokombiť mocniny pri p_1 je $2N_1 + 1$.

Obdobne pre $p_2, \ldots, p_k$. Celkový počet možností bude teda $(2N_1 + 1)(2N_2 + 1)\ldots(2N_k + 1)$. Týmto sme ale našli všetky možnosti, nie len také kde $a \geq b$. Ak $a = b$ tak musí zjavne byť $a = b = 1$, $c = n$ a je to iba jedna možnosť. Pre zvyšné platí $a > b$. My sme ale započítali v našich možnostiach aj tie, kde $b < a$, teda skutočný počet riešení bude

$$1 + \frac{(2N_1 + 1)(2N_2 + 1)\ldots(2N_k + 1) - 1}{2} = 2019$$
$$(2N_1 + 1)(2N_2 + 1)\ldots(2N_k + 1) = 2 \cdot (2019 - 1) + 1 = 4037 = 11 \cdot 367$$

Nutne teda $N_3 = \cdots = N_k = 0$, pretože súčin viac ako troch čísel nemôže byť 4037. Čo mimo iné znamená že n bude mať maximálne dva prvočíselné delitele.

Ďalej $(2N_1 + 1)(2N_2 + 1) = 11 \cdot 367$. Platí teda buď $N_2 = 0$ a $N_1 = 2018$, alebo $N_1 = 5, N_2 = 183$. Ak si tieto čísla dáme do definície čísla n, získame výsledok.

Odpoveď: Rovnica má 2019 riešení práve vtedy keď $n = p_1^{2018}$ alebo $n = p_1^5 p_2^{183}$ pre ľubovoľné prvočísla p_1, p_2.

3.9 Kamoši Mysľou Sprznení

opravoval **Jožo**

Zadanie. *Nakoniec sa v kráľovstve rozhodli pre mierumilovné riešenie a vyslali Kubka aj s jeho úžasnými trikmi za Matúšom, aby mu roztopil srdiečko a našiel dobro v jeho duši. Keby mal Matúš nejakých kamarátov, tak by nemal potrebu si nič dokazovať a z vlastných rozmarov plieniť polku uhorského kráľovstva. Nakoniec sa Kubko zjavil v Matúšovom stane a začal s čelným útokom na možného nového priateľa.*

Kubko si napíše na čelo n reálnych čísel vrátane nuly. Potom sa s nimi hrá. V jednom kroku si zoberie nenulový mnohočlen, ktorý má za koeficienty čísla, ktoré sú napísané na čele[3], a pripíše si na čelo všetky jeho korene. Koľko najmenej čísel si musí Kubko napísať na čelo, aby po konečnom počte krokov vedel na čele dostať čísla $-2019, -2018, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, 2018, 2019$*?*[4]

Predhovor

Skôr, ako sa pustíme do riešenia úlohy sa skúsme zamyslieť, čo chceme robiť. Potrebujeme nájsť konštrukciu, ako napísať správne čísla na Kubkovo čelo a potrebujeme ukázať, že s menším počiatočným počtom čísel to nie je možné. Ako však pristúpime k tej druhej časti? Ak začneme už len s dvomi číslami na tabuli, tak úloha má veľmi veľkú voľnosť. Môžeme si totiž zvoliť veľké množstvo kadejakých mnohočlenov, ktoré budú mať kadejaké, často veľmi nepekné korene. S každými ďalšími koreňmi sa nám možnosti len zväčšujú a zväčšujú a nájsť v nich poriadok sa zdá byť priam až nemožné. Neschodnosť tejto cesty by nás mohla naviesť k tomu, že by sme sa mohli posnažiť potiahnuť riešenie úlohy poriadne nízko. Teda využiť veľkú voľnosť úlohy v náš prospech a vystačiť si aj s malým počtom čísel na začiatku.

Cesta k riešeniu

Pre lepšie zoznámenie sa s úlohou sa skúsme pozrieť, aké čísla vieme dostať, keď si na Kubkovo čelo napíšeme nejaký malý počet čísel. V jednom kroku si zoberieme mnohočlen $p(x)$ a dostaneme z neho koreň r. Takéto kroky budeme skrátene zapisovať $p(x) \to r$. Síce podľa pravidiel úlohy sa na Kubkovovm čele ocitnú aj ďalšie korene, no tie, ktoré nebudeme potrebovať budeme takto ignorovať.

[3] Každé z čísel na čele môže byť použité ľubovoľný počet krát, nemusia byť použité všetky.

[4] Okrem týchto čísel sa tam môžu nachádzať aj iné.

Keďže iba s nulou toho moc nespravíme, tak začnime s tým, že si napíšeme dve čísla: 0, a. Priamočiaro vieme spraviť kroky $ax + a \to -1$, $ax - 1 \to 1/a$. Lineárne rovnice nás ďalej nezavedú. Môžeme si skúsiť kvadratické, kde sa nám však začnú objavovať škaredé čísla. Preto sa oplatí skúsiť hľadať nejaké rozumné kroky. Ak už máme na Kubkovom čele napísané číslo a, tak by bolo fajn, ak by sme vedeli dostať aj $-a$. Potom by nám stačilo nájsť spôsob ako napísať Kubkovi na čelo iba kladné čísla. Záporné by sme si potom dorobili. Priamočiaro by to išlo v kroku

$$x + a \to -a.$$

Na to však musí mať Kubko na čele 1. Môžeme ju mu tam napísať aj rovno na začiatok – je to veľmi užitočné číslo. Nevieme si ju však nejako vyrobiť? Ak je a celé číslo, tak si ho vieme rozložiť na a jednotiek: $a = 1 + 1 + \cdots + 1$. Keďže sa jednotky pri umocňovaní nemenia, tak ju vieme dostať v kroku

$$-x^a - x^{a-1} - \ldots - x^2 - x + a \to 1.$$

Keďže jednotku vieme dostať vždy, keď začíname s nulou a kladným celým číslom, tak sa môžeme pozrieť na dvojku. Aké musí byť číslo a, aby sme vedeli dostať číslo 2 na Kubkovo čelo? Skúsme spraviť podobnú úvahu ako pri jednotke. Za konštantný člen mnohočlenu zvolíme a a zvyšok vyskladáme ako $-k_n x^n - \ldots - k_2 x^2 - k_1 x$. Chceme teda, aby 2 bola koreňom rovnice

$$k_n x^n + \cdots + k_2 x^2 + k_1 x = a,$$

pričom za čísla $k_1, k_2, \ldots, k_n$ si môžeme voliť čísla z Kubkovho čela, teda zatiaľ tam máme $0, 1, -1$ (a ešte ďalšie). Nepripomína vám to niečo? Kde sa umocňuje dvojka a násobí nejakými koeficientmi? Tu prichádzame k hlavnej myšlienke riešenia – niečo také vieme stretnúť v dvojkovej sústave. Ak dosadíme za $x = 2$, tak máme zápis čísla a v dvojkovej sústave, teda len ak a je párne. Napríklad ak $a = 42$, tak

$$1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 = 42,$$

$$\text{teda} \qquad -x^5 - x^3 - x + 42 \to 2.$$

Táto myšlienka s číselnými sústavami nám stačí pre dokončenie riešenia. Takto si vieme na Kubkovo čelo dopisovať ďalšie čísla. Potrebujeme začať s takým číslom, ktoré je deliteľné každým číslom od 1 po 2019 (aby malo v každej sústave na mieste jednotiek nulu). Dobrým kandidátom je 2019!. Aby sme to sformalizovali, dôkaz dokončíme matematickou indukciou.

Riešenie

Na Kubkovo čelo si napíšeme 2 čísla: 0 a $a = 2019!$. Na začiatok si dopíšeme čísla

$$2019!x + 2019! \to -1,$$

$$-x^{2019!} - \ldots - x^2 - x + 2019! \to 1,$$

$$x + 2019! \to -2019!.$$

Ďalej dokážeme, že pre všetky celé čísla $2 \le n \le 2019$ platí nasledovné tvrdenie: Ak máme na Kubkovom čele napísané čísla $-2019!, 0, 1, \ldots, n-1$, tak vieme na Kubkovo čelo dopísať číslo n.

Číslo 2019! si vieme v sústave so základom n zapísať ako

$$2019! = k_r n^r + \cdots + k_2 n^2 + k_1 n + 0,$$

kde $r \in \mathbb{N}$, $k_1, k_2, \dots, k_r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ (to, že posledný člen je 0 máme vďaka tomu, že $n \mid 2019!$). Všetky koeficienty k_i sú menšie ako n, a teda ich Kubko má na čele. Preto n vieme dostať v kroku

$$k_r x^r + \cdots + k_2 x^2 + k_1 x - 2019! \to n$$

Tým sme ukázali, že s dvomi číslami vieme požadované čísla dostať. Iba s nulou to nie je možné, keďže pomocou nej nevieme vytvoriť žiaden nenulový mnohočlen.

3.10 Kubkova Maškaráda Šťastia

opravoval **Juro**

Zadanie. *Nutno uznať, že po prvom kole bol Matúš očarený Kubkovým šarmom a genialitou jeho kúzelníckych trikov. Ostávalo naozaj už len trošku, aby si Matúš uvedomil svoj veľký omyl a stiahol sa i so svojou armádou preč z Uhorska. Kubko vedel, čo bolo v stávke, no i tak sa rozhodol staviť všetko na jednu kartu - svoj ultimátny trik s kartami, ktorý ak vyjde, tak roztopí srdiečko každému, aj tomu najstrašnejšiemu kazisvetovi na svete.*

Definícia. *Keď máme v rade usporiadané karty* $1, 2, \dots, n$, *tak dvojicu kariet* (a, b) *voláme* inverzia, *pokiaľ* $a > b$ *a karta s číslom a sa nachádza v rade skôr ako karta s číslom b. Napríklad, v rade kariet* $3, 1, 4, 2$ *máme* 3 *inverzie:* $(3, 1)$, $(3, 2)$, *a* $(4, 2)$.

Kubko má n kariet očíslovaných číslami $1, 2, \dots, n$, *ktoré má v nejakom poradí usporiadané v rade. Postupne pre* $i = 1, 2, \dots, n$ *urobí Kubko nasledovnú operáciu: Zoberie kartu s číslom i a keď naľavo od nej je k kariet, tak ju presunie v rade tak, aby napravo od nej bolo k kariet. Dokážte, že bez ohľadu na to, s akým poradím kariet Kubko začínal, bude mať jeho výsledné poradie kariet rovnaký počet inverzií ako počiatočné poradie kariet.*

Príklad. *Pokiaľ Kubko začína s poradím* $3, 1, 4, 2$, *tak preusporiadavanie bude vyzerať nasledovne:*

$$3, 1, 4, 2 \to 3, 4, 1, 2 \to 2, 3, 4, 1 \to 2, 4, 3, 1 \to 2, 3, 4, 1.$$

Po vyskúšaní si pár príkladov zistíme, že množstvo inverzií sa v každom kroku veľmi mení, nie je v ňom žiadny poriadok a na konci iba akoby zázrakom skočí vždy na správny počet inverzii. Môže nás to viesť k myšlienke, že na to bude treba ísť inak a bude treba vymyslieť nejaký trik.

Hlavná myšlienka je, že zadanú operáciu môžeme pozmeniť podľa našej ľubovôle, ak na konci dostaneme správne poradie kariet. Navyše, je celkom logické hľadať takú operáciu, ktorá v jednom kroku nemení počet inverzii. Keď už máme tento cieľ, po chvíli skúšania (hoci práve tento krok bol na úlohe to najťažšie), vyjde vhodná operácia nasledovná.

Definícia. Definujme si *novú operáciu*, ktorá zároveň s tým, že vymení poradie karty na opačnú pozíciu, navyše zväčší toto číslo o n. Názornejšie to bude na príklade:

$$3, 1, 4, 2 \to 3, 4, 5, 2 \to 6, 3, 4, 5 \to 6, 4, 7, 5 \to 6, 7, 8, 5 \to 2, 3, 4, 1.$$

Všimnime si dve veci. Prvá je, že po poslednom kroku sú karty usporiadané rovnako ako po pôvodných operáciach, ibaže sú všetky o n väčšie (keďže každú sme posunuli práve raz, teda raz sme pridali n). A teda finálne poradie bude mať presne rovnako veľa inverzií ako po pôvodných operáciach. Druhá je, nasledovná.

Lema. Po každom kroku novej operácie je počet inverzii rovnaký.

Dôvod je takýto: Zjavne krok môže ovplyvniť iba tie inverzie, ktoré obsahujú kartu, ktorú akurát presúvame.

V každom kroku presúvame kartu s najmenším číslom, a teda počet inverzií ktoré obsahujú túto kartu je práve počet kariet naľavo od nej. Po presune sa z nej stane najväčšia karta, a teda počet inverzií ktoré obsahujú túto kartu je práve počet kariet napravo od nej. Ale tieto dva počty sú rovnaké práve vďaka spôsobu akým ju presúvame.

Najnázornejšie je to znova na príklade. Vezmime si prvý krok $3, 1, 4, 2 \rightarrow 3, 4, 5, 2$. Inverzie obsahujúce 1 sú práve tie karty ktoré ležia naľavo od jednotky. Na druhej strane, inverzie obsahujúce 5 sú práve tie ktoré ležia napravo od 5-ky. Tých je ale rovnako veľa, a teda počet inverzii sa nezmenil.

Vytvorili sme operácie ktoré majú rovnaký výstup a pri žiadnom kroku nezmenia počet inverzii. Takže finálne usporiadanie má rovnaký počet inverzii ako pôvodné.