Riešenia 1. kola letnej časti

1.1 Kapusta Magalhãesovi Skvasila ($\kappa \leq 1$)

opravovali **Adam** a **Veronika**

Zadanie. *Moreplavec Fernão de Magalhães si pred plavbou na svoju loď naložil* 100 *sudov s čerstvou chrumkavou kapustou postupne s hmotnosťami* 10, 20, 30, …, 1000 *kilogramov. Bohužiaľ, kapusta mu v niekoľkých sudoch skvasila, čím prišla o svoju chrumkavosť. Jeho pobočník Enrique de Malacca mu však po tom, ako sa na lodi popýtal ostatných námorníkov, čo vedia o sudoch, oznámil: „Nezúfaj, síce neviem presne ktoré sudy skvasili. Ale stále viem zo všetkých sudov vybrať* 19 *sudov s čerstvou chrumkavou kapustou tak, že spolu budú vážiť aspoň* 14 060 *kilogramov. Dokonca bez ohľadu na to, ktoré sudy ti skvasili.“ Zistite, koľko najviac sudov mohlo Magalhãesovi skvasiť.*

Riešenie

Vieme, že niekoľko sudov s kapustou sa pokazilo a že zo zvyšných sudov sa dá vybrať 19 takých, že majú dokopy aspoň 14060 kilogramov. Keďže nevieme ktoré sudy presne sa pokazili, musíme rátať s najhorším možným prípadom – že sa pokazili tie najťažšie sudy. Nič nám nebráni zaradom skúšať odoberať najťažšie sudy a pozerať sa, či zo zvyšných stále ešte vieme vybrať 19 s dostatočnou váhou.

Toto skúšanie nie je príliš náročné – vždy vezmeme 19 najťažších sudov ktoré sa nepokazili a pozrieme sa akú majú spolu váhu. Ak raz narazíme na situáciu kedy sa pokazilo n sudov a zo zvyšných sudov 19 najťažších nemá váhu aspoň 14060 kilogramov, vieme, že n je príliš veľké a muselo sa pokaziť menej sudov.

Skúšať zaradom všetky možnosti až kým nenarazíme na tú správnu vie byť ale celkom otrava, môžeme si to teda ešte zjednodušiť. Predpokladáme, že nastal najhorší možný prípad, teda že sa pokazili najťažšie sudy $1000, 1000-10, \dots, 1000-10n+10$). Hľadáme vlastne postupnosť 19 za sebou idúcich sudov $1000-10n$, $1000-10n-10$, …, $(1000-10n-180)$ so súčtom váh ktorý je väčší alebo rovný 14060. Túto nerovnosť vieme zapísať pomocou počtu pokazených sudov n takto:

$$(1000-10n)+(1000-10n-10)+\cdots+(1000-10n-180) \geq 14060$$
$$19000-190n-10-20-\cdots-180 \geq 14060$$
$$17290-190n \geq 14060$$
$$17 \geq n$$

Z toho vyplýva, že n musí byť menšie alebo rovné 17, preto sa mohlo pokaziť najviac 17 sudov.

1.2 Karavely Majúce Smer ($\kappa \leq 2$)

opravovali **Adam Š.** a **Krtko**

Zadanie. *Zo Seville vyplávali lode L, O a Ď. Plavili sa na západ v trojuholníkovej formácii. Zrazu si Magalhãesov pobočník Enrique de Malacca uvedomil, že sa neplavia v len tak hocijakej formácii, ale tvoria rovnostranný trojuholník. Magalhães mu to však nechcel uveriť...*

Nech LOĎ je trojuholník. Body P a Q sú na strane OĎ a platí $|OP| = |PQ| = |QĎ| = |OĎ|/3$. *Na strane ĎL sú body R a S a platí* $|ĎR| = |RS| = |SL| = |ĎL|/3$. *Body T a U sú na strane LO a platí* $|LT| = |TU| = |UO| = |LO|/3$. *Body P, Q, R, S, T a U sú na jednej kružnici. Pomôžte Enriquemu dokázať, že trojuholník LOĎ je naozaj rovnostranný.*

Riešenie

V tomto vzoráku si spomenieme tri riešenia. Sú síce aj mnohé iné, rovnako správne, ale tieto sme vybrali na ilustráciu rôznych prístupov a rôznej použitej artilérie. Prvé riešenie je veľmi jednoduché, ale trošku pracné, prakticky sa v ňom vyskytne iba veľa a veľa uhlov. Nebudeme v ňom však využívať žiadne vedomosti, ktoré by sa neučili v škole. Druhé riešenie využije trošku pokročilejšie vedomosti, ale zato v ňom nebudú takmer žiadne uhly. No a nakoniec si ukážeme veľmi elegantné riešenie pomocou jednej trošku viac pokročilej techniky.

Všetky riešenia začneme narysovaním si trojuholníka *LOĎ* a rozdelením strán na tretiny.

Cieľ všetkých postupov je rovnaký, dokázať rovnostrannosť trojuholníka *LOĎ*. Spokojní teda budeme, keď sa nám podarí dokázať buď priamo to, že všetky jeho strany sú rovnako dlhé, alebo ekvivalentne, všetky jeho (vnútorné) uhly sú rovnako veľké. Keďže zadanie nehovorí o žiadnej zo strán nič iné než o zvyšných dvoch, k spokojnosti nám bude stačiť dôkaz rovnosti len dvoch strán/uhlov, keďže vykonaním adekvátnej cyklickej zámeny dostaneme dôkaz rovnosti iných dvoch, a takéto dva dôkazy dokopy sú dôkazom rovnosti všetkých troch.

Pracnejšie riešenie

Prvé riešenie je o čosi dlhšie a o poznanie menej elegantné než zvyšné dve, ale je priamočiarejšie. Jednoducho vezmeme to, čo nám zadanie jasne hovorí a odvádzame z toho bezprostredné dôsledky.

Označme $\lambda = |\sphericalangle ĎLO|$, $\omega = |\sphericalangle LOĎ|$ a $\delta = |\sphericalangle OĎL|$. Možno si ľahko všimnúť, že v konštelácii zo zadania jestvuje mnoho trojuholníkov podobných trojuholníku *LOĎ*. V tomto postupe využijeme tri z nich, menovite *LTS*, *UOP*, a *SPĎ*. Napríklad trojuholník *SPĎ* je podobný s *LOĎ* podľa vety sus, lebo majú spoločný uhol a dve dvojice strán v pomere 2/3. Ostatné podobnosti sa dokážu analogicky. Vďaka týmto podobnostiam vieme, že $SP \parallel LO$, $|\sphericalangle LTS| = \omega$, a $|\sphericalangle OUP| = \lambda$. Z prvej z vedomostí vieme určiť veľkosť (teraz už) striedavých uhlov $|\sphericalangle TSP| = |\sphericalangle LTS| = \omega$ a $|\sphericalangle UPS| = |\sphericalangle OUP| = \lambda$.

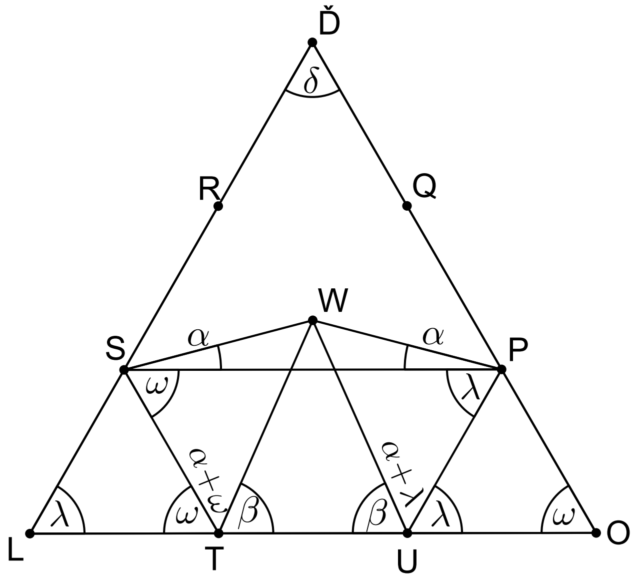
Zatiaľ sme vôbec nevyužili, že body *P*, *Q*, *R*, *S*, *T* a *U* ležia na jednej kružnici. To (napríklad) znamená, že jestvuje bod *W*, pre ktorý platí $|SW| = |TW| = |UW| = |PW|$. Máme dostatočný morálny kredit na vynesenie súdu o rovnoramennosti trojuholníkov *STW*, *TUW*, *UPW*, *SPW*. Označme $\alpha = |\sphericalangle WSP| = |\sphericalangle SPW|$ a $\beta = |\sphericalangle UTW| = |\sphericalangle TUW|$. Tým pádom $|\sphericalangle PUW| = \alpha + \lambda$ a $|\sphericalangle STW| = \alpha + \omega$.

Z priamosti uhlov pri bodoch *T* a *U* dostávame sústavu rovníc:

$$\alpha + \beta + 2\omega = 180^\circ$$

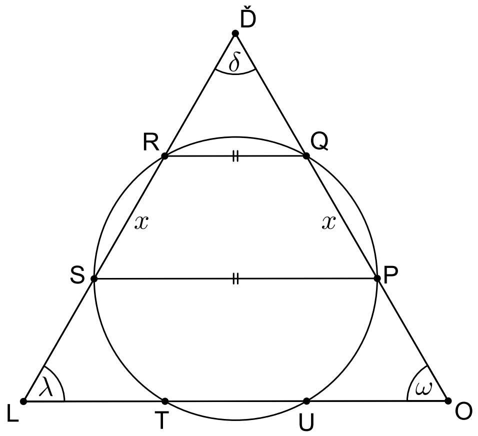
$$\alpha + \beta + 2\lambda = 180^\circ$$

Z nej vyplýva $\lambda = \omega$, čím sa naša túžba naplnila.



Stručné riešenie

Znova budeme stavať na podobnosti trojuholníkov s trojuholníkom $LOĎ$. Los tentoraz padol na dvojicu $RQĎ$ a nadčas ťahajúci $SPĎ$. Vieme teda, že $SP \parallel RQ$ a tiež, že S, P, Q, R ležia na jednej kružnici. Obkľúčme to z druhej strany. Máme kružnicu a dve rovnobežky, ktoré ju pretínajú. Z povahy súmernosti týchto útvarov vždy jestvuje zrkadliaca os zobrazujúca kružnicu aj rovnobežky samé na seba, a to konkrétne kolmica na rovnobežky zároveň prechádzajúca stredom kružnice. Spojnica priesečníkov rovnobežiek s kružnicou na jednej strane osi (úsečka RS) bude teda rovnako dlhá ako spojnica priesečníkov na druhej strane (úsečka PQ). Vrátiac sa späť k našej úlohe možno pobadať, že táto úvaha nám hovorí $|LĎ|/3 = |SR| = |PQ| = |OĎ|/3$, teda $|LĎ| = |OĎ|$. Zapojac úvahu z úvodu, máme fajront.



Pokročilé riešenie

Na toto riešenie potrebujeme vedieť, čo je to mocnosť bodu A ku kružnici k. Vezmime si sečnicu kružnice k prechádzajúcu naším bodom A. Nech pretína kružnicu k v bodoch B a C. Potom mocnosť m je rovná súčinu vzdialeností bodu A od priesečníkov. Teda $m = |AB| \cdot |AC|$.

Teraz aplikujme novo získanú vedomosť na náš trojuholník. Vezmime si vrchol L a jeho mocnosť ku kružnici k vieme vyjadriť ako $|LS| \cdot |LR|$ a zároveň aj $|LT| \cdot |LU|$. Čo si podľa zadania vieme upraviť na $2|LS|^2 = 2|LT|^2$, teda zjavne aj $|L\check{D}| = |LO|$.

Rovnakú úvahu aplikujeme aj na vrchol O a dostaneme, že $|LO| = |O\check{D}|$, a teda všetky strany trojuholníka $LO\check{D}$ majú rovnakú dĺžku, teda trojuholník je rovnostranný.

1.3 Kormidelníkova Mincová Senzácia ($\kappa \leq 3$)

opravovali **Kika** a **Diana**

Zadanie. *Magalhães má troch hlavných kormidelníkov iniciálkami L O a Ď, ktorým potrebuje vyplatiť mzdu za ich rovnomernú plavbu. Každému chce zaplatiť podľa toho, ako zodpovedne si svoju prácu plnil.*

Nájdite všetky usporiadané trojice kladných celých čísel (a, b, c), ktoré spĺňajú nasledovné podmienky:

- *každé dve z čísel a, b, c sú nesúdeliteľné;*
- *číslo a delí $a + b + c$;*
- *číslo b delí $a + b + c$;*
- *číslo c delí $a + b + c$.*

Riešenie

Čísla sú nesúdeliteľné práve vtedy keď ich najväčší spoločný deliteľ je 1. Keďže prirodzené čísla a, b, c sú navzájom zameniteľné, všetko, čo má platiť pre jedno z nich, platí obdobne aj pre ostatné, tak si bez ujmy na všeobecnosti môžeme povedať, že $a \leq b \leq c$. Medzi číslami a, b, c môže byť aj rovnosť, hoci len vtedy, ak sú rovné 1. Podmienky zo zadania si vieme upraviť nasledovne:

$$a \mid (a+b+c) \Rightarrow a \mid (b+c),$$

$$b \mid (a+b+c) \Rightarrow b \mid (a+c),$$

$$c \mid (a+b+c) \Rightarrow c \mid (a+b).$$

Pozrieme sa na tretiu podmienku. Keďže $c \mid (a+b)$, tak existuje prirodzené číslo m, pre ktoré platí $m = (a+b)/c$, resp. $mc = a + b$. Nakoľko $a \leq c$ a súčasne aj $b \leq c$, tak spolu $a + b \leq 2c$ (rovnosť nastáva len v prípade, že $a = b = c$). Máme dva vzťahy, v ktorých sa vyskytuje $a + b$, teda to môžeme zapísať ako $mc = a + b \leq 2c$. Dostávame nerovnosť $mc \leq 2c$, z ktorej vyplýva, že $m \leq 2$.

Ak $m = 2$, tak $a + b = 2c$, čo platí len v prípade rovnosti čísel a, b, c. Keďže musia byť navzájom nesúdeliteľné, tak jediné možné riešenie je $a = b = c = 1$. Tým získavame prvú usporiadanú trojicu $(1, 1, 1)$, ktorá vyhovuje všetkým podmienkam.

Pre $m = 1$ platí $a + b = c$. Keď si to dosadíme do druhej podmienky, dostávame $b \mid (a + a + b)$, resp. $b \mid 2a$. Toto môžeme interpretovať aj tak, že existuje prirodzené číslo n, pre ktoré platí $n = 2a/b$, resp. $nb = 2a$. Vieme, že $a \leq b$, teda platí aj $2a \leq 2b$. Máme dva vzťahy, v ktorých sa vyskytuje $2a$, čo môžeme zapísať ako $nb = 2a \leq 2b$. Dostávame nerovnosť $nb \leq 2b$, z ktorej vyplýva, že $n \leq 2$.

Nech $n = 2$, potom dostávame vzťah $2a = 2b$, teda $a = b$. Aby bola splnená podmienka nesúdeliteľnosti čísel, tak musí platiť $a = b = 1$. Dosadením do rovnice $a + b = c$ zistíme, že $c = 2$. Týmto sme našli ďalšiu usporiadanú trojicu $(1, 1, 2)$. Ešte skontrolujeme, či spĺňa všetky podmienky a uvidíme, že to tak naozaj je.

V prípade, že $n = 1$, tak $2a = b$. Potom $c = a + b = a + 2a = 3a$. Hľadaná trojica je $(a, 2a, 3a)$. Tieto tri čísla sú nesúdeliteľné len ak $a = 1$. Z toho vyplýva, že poslednou usporiadanou trojicou je $(1, 2, 3)$. Aj táto trojica spĺňa všetky podmienky zo zadania.

Konkrétnu podobu usporiadaných trojíc nám určila nami zvolená podmienka $a \leq b \leq c$. Teda k riešeniam tejto úlohy patria aj permutácie (preusporiadania) nájdených riešení. Všetky riešenia sú: $(1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(1,2,1)$, $(2,1,1)$, $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$, $(3,2,1)$.

1.4 Kamarátov Magalhães Stratil ($\kappa \leq 5$)

opravovali **Jožko** a **Matúš**

Zadanie. *Kormidelníkom sa nepáčilo, ako málo im Magalhães zaplatil, a tak sa rozhodli aj so svojimi vernými opustiť flotilu. Člny, ktoré chceli použiť na odchod, sú však len dvojmiestne.*

Utiecť sa rozhodlo 16 *námorníkov a každý z námorníkov má práve troch kamarátov, pričom kamarátstvo je vzťah vzájomný. Rozhodnite, či možno námorníkov rozdeliť do dvojíc tak, aby každý námorník bol vo dvojici so svojim kamarátom, bez ohľadu na to, ako sa námorníci kamarátia.*

Riešenie

Pri taktom type úloh môžu nastať len dve možnosti: buď tvrdenie v úlohe platí – vtedy ho treba dokázať – alebo naopak existuje takzvaný protipríklad, konkrétna situácia, v ktorej tvrdenie zo zadania neplatí. Pre vyriešenie úlohy v tomto prípade nám stačí nájsť aspoň jeden konkrétny protipríklad, pre ktoré tvrdenie neplatí, a – samozrejme – vysvetliť, prečo protipríkladom naozaj je.

Zo začiatku riešenia takýchto úloh je dobrým zvykom, aj na matematickej olympiáde, si nakresliť niekoľko konkrétnych prípadov možných kamarátstiev a na ich základe sa snažiť všimnúť si niektoré okolnosti, ktoré v danej úlohe platia. Tiež sa oplatí skúsiť nájsť nejaký protipríklad, zákerné rozmiestnenia kamarátov, ktoré sťažia alebo znemožnia rozdelenie do dvojíc.

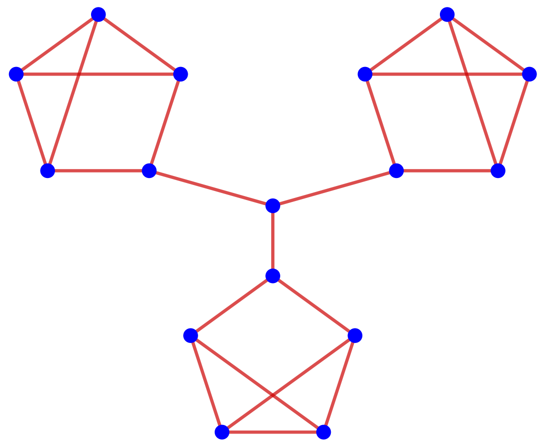
Napríklad pri tejto úlohe sme si mohli po chvíľke kreslenia konkrétnych príkladov všimnúť, že pri nepárnom počte námorníkov by sme ich nevedeli do člnov rozumne usporiadať. Do dvojmiestnych člnov sa nepárny počet námorníkov proste nezmestí. To je ale asi tak všetko, čo sa nám v tejto fáze riešenia úlohy podarilo odhaliť. Následne sme sa zrejme pokúšali nejakým rozumným spôsobom tvrdenie dokázať, napríklad opísať všeobecný postup, ktorým nájdeme správne dvojice. Nejako však žiaden z daných spôsobov k riešeniu neviedol.

Vtedy, ak žiadna metóda nevedie k vytúženému dôkazu, je vcelku rozumné sa pozrieť na úlohu z opačného uhla pohľadu a skúsiť nájsť protipríklad. Pretože rovnako tvrdenie z úlohy nemusí platiť a vtedy riešením je ukázať ten prípad, kedy riešiteľná nie je.

Samotné riešenie – protipríklad exituje

Pri hľadaní protipríkladu je tiež dobrým nápadom vychádzať z toho, čo sme už objavili, ale použiť to proti úlohe samotnej. Napríklad sme zistili, že pri nepárnom počte námorníkov by úloha riešenie nemala. Preto pri hľadaní protipríkladu sa budeme usilovať nakombinovať kamarátstva tak, aby nám vznikla nejaká uzavretá skupina nepárneho počtu kamarátov. Vytvoriť takúto skupinu sa nám však nejak nedarí. Vždy v takejto uzavretej skupine skončí aspoň jeden námorník s najviac dvomi kamarátmi (rozmyslite si prečo). My pritom potrebuje kamarátstva tri. To nám môže robiť problémy, pretože nám to spojí uzavretú skupinu s ostatnými.

Jedine, že by nám to ani až tak nevadilo. Kamarátstvo, ktoré vychádza z nepárnej skupiny námorníkov, musí byť isto vybrané do člna. Máme tak teda dvojicu kamarátov, ktorá musí byť spolu v člne pri každom rozdelení. Preto si vieme zobrať tri takéto „uzavreté“ skupiny a toho námorníka s nedostatočným počtom kamarátov spojiť s jedným námorníkom, ktorý je „niekde mimo od ostatných“. Tak nám vzniknú tri skupiny po päť námorníkoch, ktoré sú spojené s jedným námorníkom v strede ako na obrázku. Na ňom sú námorníci vyznačený bodkami a čiarou sú spojení tí, ktorí sa kamarátia. Pri takomto rozložení nevieme námorníkov popárovať tak, aby každý námorník bol v člne so svojím kamarátom. Pretože „osamotený“ námorník v strede si môže zobrať do člna len jedného kamaráta, a tým pádom nám ostanú dve pätice námorníkov, ktorí sa kamarátia len medzi sebou. A nepárny počet námorníkov do dvojíc nevieme rozdeliť.



Vieme to napraviť?

Hoci tvrdenie zo zadania úlohy neplatí, môžeme sa pozrieť, ako ďaleko od toho má. Koľko ďalších rozložení kamarátstiev vieme nájsť, pre ktoré námorníci nepôjdu popárovať? A ako to bude vyzerať, ak námorníkov bude viac? Nevieme na ich kamarátstva uložiť nejakú podmienku navyše, ktorá by nám zaručila, že pôjdu popárovať?

Keď sa pozrieme na náš protipríklad, tak tam nájdeme dvojicu námorníkov, ktorí ak by sa prestali kamarátiť, tak by sa sieť kamarátstiev rozpadla na dve izolované skupiny. Odborne sa takáto dvojica nazýva *most*. Pochopiteľne, samotná prítomnosť mostu nám úlohu ešte nepokazí – skúste si nájsť také rozloženie kamarátstiev, ktoré obsahuje most, ale námorníci v ňom popárovať idú. Avšak, pokiaľ most zakážeme, tak už je zaručené, že námorníci vždy popárovať idú. Presne toto hovorí výsledok teórie grafov známy pod názvom Petersenova veta, ktorý je dôsledkom Tuttovej vety, ktorá presne hovorí, kedy má graf úplné párovanie. Oba tieto výsledky však ďaleko presahujú rámec Korešpondenčného matematického seminára a dokázať ich by bolo priveľa aj na 10. úlohu. Ich dôkaz zaberie vyše hodiny intenzívnej prednášky.

Komentár

Mnohým riešiteľom sa nepodarilo úlohu vyriešiť. Dostali sme veľa „dôkazov“, že námorníkov možno vždy rozdeliť do dvojíc. Väčšina takýchto riešení bola principiálne nesprávne, ani by sme sa ich neodvážili nazvať dôkazmi. Cieľom tejto úlohy bolo postaviť vás pred tvrdenie, ktoré neplatí, ale nie je to zjavné na prvý pohľad. Skúsiť si dokázať neplatné tvrdenie je veľmi poučné zvlášť pre tých z vás, čo s dôkazmi začínate. Ľahšie tak uvidíte, kde vaša argumentácia zlyhala a pomôže vám to vyvarovať sa nedôsledným dôkazom pri ďalších úlohách. Okrem toho, pokiaľ máte ťažkosti s dokazovaním tvrdenia, tak je veľmi užitočná schopnosť vedieť prepnúť svoje zmýšľania, pozrieť sa na tvrdenie z druhej strany a pokúsiť sa ho vyvrátiť. To, že niečo nevieme dokázať, môže znamenať, že to neplatí.

Častou argumentáciou bolo, že keďže nemôže existovať skupina nepárne veľa námorníkov, ktorí sa kamarátia medzi sebou, tak námorníci musia ísť popárovať. Je pravda, že ak by sme takú skupinu s nepárnym počtom námorníkov mali, párovanie by nebolo možné. To však vôbec nič nehovorí o tom, keď takú skupinu nemáme – nijako nám to nezaručuje existenciu párovania. Hovoríme tomu, že neexistencia takejto nepárnej skupiny je *nutnou podmienkou*. To znamená, že ak táto podmienka nie je splnená, naše tvrdenie nemôže platiť. Pokiaľ nutná podmienka je splnená, tak nezaručuje ešte platnosť tvrdenia. Napr. nutnou podmienkou na to, aby číslo bolo deliteľné 10-timi je, aby bolo párne. Ak je však číslo párne, nemusí byť ešte deliteľné 10-timi.

Objavilo sa aj niekoľko serióznejších pokusov. Niektorí riešitelia sa snažili miesto hľadania dvojíc kamarátov najprv zrušiť každému námorníkovi dve kamarátstva. Hoci to môže na prvý pohľad vyzerať sľubne, nejde o nič prevratné – je to len inak preformulovaná úloha, ktorá je podobne náročná. Iní riešitelia sa zas pokúšali zoradiť všetkých námorníkov do radu, aby vedľa seba stáli vždy kamaráti alebo hľadali podobné štruktúry v ich kamarátstvách. Pri dôkaze ich existencie však nepostupovali dôsledne, zabudli na dôležitý prípad, ktorý im pokazil argumentáciu. Odhliadnuc od toho, nájdenie podobných štruktúr vie byť dosť náročné a pre mnohé z nich nie zú známe žiadne rozumne použiteľné postačujúce podmienky.

1.5 Komplikácia Malovaných Sukovíc ($\kappa \leq 8$) — opravovali **Ondro** a **Janko**

Zadanie. *Magalhãesovi sa po dlhej ceste začínali míňať zásoby jedla. Preto zakotvil svoje lode pri najbližšom ostrove. Útočište našiel u jedného domorodého kmeňa. Starejší by ich aj rád pohostil, ale momentálne bol zaneprázdnený skladaním jednofarebného trojuholníka prehrabávajúc sa hromadou trojfarebných paličiek. Kým trojuholník nezloží, tak žiadne jedlo nebude.*

Starejší má 100 *žltých,* 100 *červených a* 100 *zelených paličiek, pričom paličky považujeme za úsečky, ktorých dĺžky môžu byť, aj v rámci jednotlivej farby, rôzne. Vedia, že pokiaľ si vyberú tri paličky, po jednej z každej farby, je možné z týchto paličiek poskladať trojuholník. Dokážte, že existuje taká farba, že z ľubovoľných troch paličiek tejto farby možno poskladať trojuholník.*

Riešenie

V tejto úlohe skúmame, kedy z rôznych kombinácií troch paličiek je možné spraviť trojuholník. Na toto nám poslúži trojuholníková nerovnosť, ktorá hovorí o tom, že dĺžky ľubovoľných dvoch strán trojuholníka musia byť dokopy dlhšie ako tretia strana. Čo je splnené presne vtedy, keď súčet dvoch najkratších strán je väčší ako tretia.

Máme dokázať, že existuje minimálne jedna farba, kde keď zoberieme hocijakú kombináciu troch paličiek z tej farby, tak dostaneme trojuholník. To je ekvivalentné s tým, že chceme, aby v tej jednej farbe bol súčet dvoch najkratších paličiek dlhší ako najdlhšia palička tej farby – lebo ak dve najkratšie sú dlhšie ako najdlhšia, tak nám z toho vyplýva, že ak zoberieme ľubovoľné iné dve, ktoré sú dlhšie, tak tiež budú dlhšie ako najdlhšia, teda aj ako ľubovoľná tretia palička. Čo je presne to, čo chceme dokázať.

Zoraďme si pre jednoduchosť paličky v každej farbe od najkratšej po najdlhšiu, žlté $A_1 \leq A_2 \leq \cdots \leq A_{100}$, červené $B_1 \leq B_2 \leq \cdots \leq B_{100}$, zelené $C_1 \leq C_2 \leq \cdots \leq C_{100}$. Teraz si môžeme BUNV (bez ujmy na všeobecnosti) povedať, že najkratšie paličky zo všetkých farieb sú usporiadané takto: $A_1 \leq B_1 \leq C_1$.

Zo zadania vieme, že musí platiť $A_1 + B_1 > C_{100}$, kde C_{100} je najdlhšia zo zelených. Ale ak platí táto nerovnosť, tak musí platiť aj nerovnosť $C_1 + C_2 > C_{100}$, keďže vieme, že platí $A_1 \leq B_1 \leq C_1 \leq C_2$. Spojením týchto troch nerovností dostávame, že pre hocijakú trojicu i, j, k kde $i < j < k$ platí, že

$$C_i + C_j > C_k,$$

čo znamená, že v zelenej farbe vieme z hocijakých troch paličiek spraviť trojuholník.

1.6 Kam Má Smerovať

opravovali **Števka** a **Slavo**

Zadanie. *S doplnenými zásobami sa hneď plaví lepšie. Niet preto divu, že Magalhães svižne oboplával Patagóniu, až sa dostal k zvláštnemu lichobežníkovému súostroviu. Pomôžte mu zistiť, pod akým uhlom sa má teraz vydať, aby bezpečne preplával medzi ostrovmi.*

Je daný lichobežník $ABCD$ so základňami AB a CD, ktorého uhlopriečky sa pretínajú v bode P. Vieme, že platí $|BC| = |DP|$ a $|AB| = |CP|$. Navyše BD je osou uhla ABC. Vypočítajte veľkosť uhla DAB.

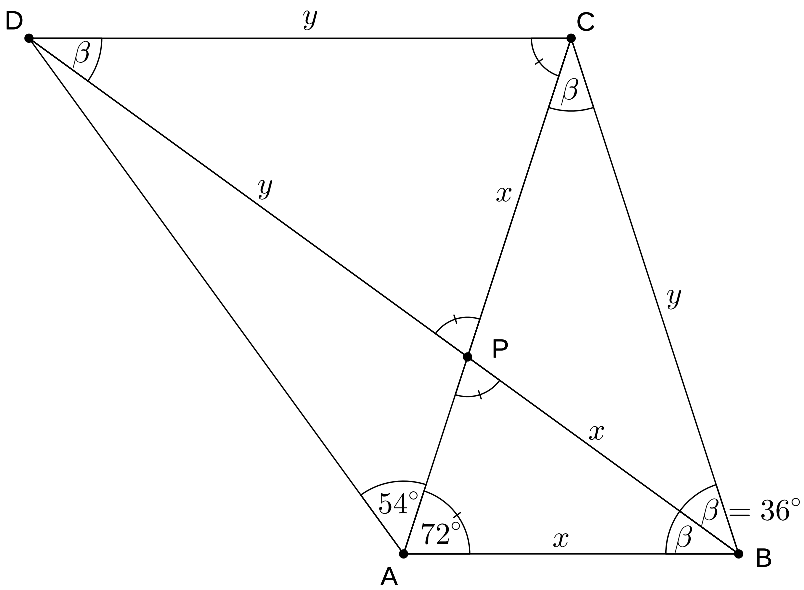
Riešenie

Našou úlohou je vypočítať veľkosť uhla BAC. Podľa zadania vieme, že niektoré dĺžky úsečiek sú rovnaké. Rovnosť dĺžok budeme chcieť neskôr použiť, pre ľahšie odkazovanie sa, si označme x, y, pre $x = |AB| = |CP|$ a $y = |BC| = |DP|$. Taktiež určite budeme chcieť použiť, že priamka BD je osou uhla ABC, preto si tiež označme $\beta = |\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle DBC|$. Pozrime sa, kde všade sa uhol β nachádza a aké všetky uhly možno pomocou neho vyjadriť.

Vďaka rovnobežkám AB a CD sú uhly ABD a BDC striedavé, čo znamená $|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle ABD| = \beta$. Všimnime si, že v trojuholníku BCD sa β vyskytuje dvakrát, takže trojuholník je rovnoramenný. Vďaka tomu $|CD| = |BC| = y$, a teda aj trojuholník CDP je rovnoramenný s uhlom β pri vrchole D, preto pre uhly pri základni platí $|\sphericalangle DCP| = |\sphericalangle DPC| = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$. Zároveň je k nim uhol BAP striedavý a uhol BPA vrcholový, preto aj $|\sphericalangle BAP| = 90^\circ - \frac{\beta}{2} = |\sphericalangle BPA|$. Tým znova dostávame rovnoramenný trojuholník BPA, kde $|BP| = |BA|$. Keďže aj $|AB| = |CP|$, máme rovnoramenný trojuholník BCP, $|\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle CBP| = \beta$.

Predchádzajúcimi úvahami sa nám podarilo vyjadriť väčšinu uhlov v obrázku pomocou uhla β. Keď sa pozrieme, čo všetko sme pomocou uhla β vyjadrili, tak si môžeme všimnúť, že vlastne vieme vyjadriť aj samotnú veľkosť uhla β. To vieme spraviť veľa rôznymi spôsobmi, napríklad cez súčet uhlov ABC a BCD. Dostaneme $3\beta + 90^\circ - \frac{\beta}{2} = 180^\circ$, z čoho vypočítame $\beta = 36^\circ$. Teraz už môžeme vyjadriť väčšinu uhlov číselne.

Keď tak spravíme, všimneme si, že pri danej bete platí $90^\circ - \frac{\beta}{2} = 2\beta$, teda aj $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABC| = 72^\circ$. Následne, trojuholník ABC je rovnoramenný, $|AC| = |BC| = |CD| = y$. To nám dáva, že aj trojuholník ADC je rovnoramenný a $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle DAC|$.



Na zistenie veľkosti uhla BAC nám už iba stačí nájsť presnú veľkosť uhla DAC a to napríklad cez súčet vnútorných uhlov trojuholníka ACD. Tým získame $|\sphericalangle DAC| = 54°$. Potom $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle DAC| + |\sphericalangle CAB| = 54° + 72° = 126°$.

Komentár - všeobecnejší pokec: Ak by sme si do nakresleného obrázku označili viaceré prebytočné uhly, bolo by oveľa ťažšie všimnúť si podstatné veci. Preto sa pred začatím označovania uhlov oplatí zamyslieť, ktoré uhly sa pravdepodobne využijú. Tiež sa oplatí zamyslieť, od koľkých rôznych uhlov závisí náš obrázok. Pomenovať viac uhlov v obrázku väčšinou nie je potrebné.

Počas riešenia geometrických úloh sa často vieme dostať do stavu, keď sme vyjadrili všetky možné uhly pomocou rozumne zvolených uhlov (v našom prípade pomocou uhla β). V tomto bode si je potrebné buď všimnúť nejakú dodatočnú vlastnosť (v našom prípade $\beta = 36°$), alebo je potrebné uberať sa iným smerom.

Komentár - užitočný pohľadu na geometriu: Keď sme si počas dokazovania všimli, že ďalšie uhly iba pomocou uhla β vyjadriť nevieme, mohli sme získať ďalšie nadhľady pomocou konštrukčného pohľadu na úlohu. Môžeme si všimnúť, že pri vedomostiach o obrázku v danom čase, lichobežník $ABCD$ možno narysovať len pomocou uhla β a dĺžky $|CD|$ (škály obrázku); avšak nie všetky takto získané lichobežníky $ABCD$ spĺňajú podmienky zo zadania. Teda nie všetky možné veľkosti uhla β sú prípustné. Preto má zmysel pokúsiť sa nájsť veľkosť uhla β.

1.7 Krutá Mocná Smršť

opravoval **Marek**

Zadanie. *Magalhãesa na mori zastihla silná búrka. Aby sa flotila zachránila, zavolal si pobočníka Enrique de Malacca, najmúdrejšieho zo všetkých námorníkov. Enrique sa zamyslel a rozhodol sa, že vypočíta súradnice miesta, na ktorom bezpečne prečkajú búrku.*

Enrique si zavrel vo svojej kajute a na dvere kriedou napísal trojicu navzájom rôznych prirodzených čísel (a, b, c), *pre ktorú platilo* $a + b + c = 123\,456\,789$. *Potom začal opakovať nasledovnú operáciu: Keď bola na dverách trojica čísel* (x, y, z), *tak na dvere napísal trojicu* $(y + z - x, z + x - y, x + y - z)$ *a trojicu* (x, y, z) *počas toho zmazal. Dokážte, že bez ohľadu na to, akú trojicu čísel si Enrique napísal na začiatku na dvere, sa po 26 krokoch bude na dverách nachádzať aspoň jedno záporné číslo.*

Riešenie

Na začiatok uvedieme jednoduché a stručné riešenie nevyžadujúce veľké matematické vedomosti.

Nech $a > b > c$. Zo zadania zrejme musia byť rôzne. V druhom kroku budeme mať trojicu $(b+c-a, a+c-b, a+b-c)$. Všimnime si niekoľko vecí, napríklad, že súčet sa nezmení (= 123456789), alebo že budú usporiadané následovne:

$$a + b - c > a - b + c = c + a - b > c - a + b.$$

Všimnime si, že ak označíme $k = b - c$ a $l = a - b$, tak $a - c = k + l$ a $(a + b - c) - (c - a + b) = 2k + 2l$, a teda sa vzdialenosť medzi najmenším a najväčším napísaním číslom zdvojnásobila.

Keďže platí $a > b > c$, tak nutne musí aj $a \geq c + 2$, a preto po 26 krokoch budeme mať vzdialenosť medzi najväčším a najmenším napísaním číslom aspoň $2 \cdot 2^{26} = 134217728 > 123456789$. Keďže súčet musí byť rovný 123456789 a platí, že najväčšie napísané číslo je aspoň o 134217728 väčšie ako najmenšie napísané číslo, tak nutne najmenšie musí byť záporné.

Iné riešenie:

V tomto riešení sa budeme pozerať na problém s trochu náročnejšími kladivami, a síce je komplikovanejšie ako prvé, dodáva však iný pohľad na problém.

Na zadanie sa pozrieme ako na rovinu danú bodmi $(123456789, 0, 0), (0, 123456789, 0), (0, 0, 123456789)$. Tá zjavne spĺňa vlastnosť, že všetky body v rovine majú súčet súradníc rovný 123456789. Pre jednoduchosť budeme v celom nasledujúcom riešení uvažovať rovnobežnú rovinu danú $E_1 = (1, 0, 0), E_2 = (0, 1, 0), E_3 = (0, 0, 1)$ a súradnice uvažovaných bodov budú $(a, b, c) = \frac{(x,y,z)}{123456789}, x, y, z \in \mathbb{Z}$. Tieto body majú teraz požadované vlastnosti a budeme ich nazývať prípustné.

Každý bod (a, b, c) v tejto rovine vieme napísať ako barycentrickú kombináciu $aE_1 + bE_2 + cE_3$, kde $a + b + c = 1$. Budeme uvažovať súradnice zapísané v barycentrickej sústave, ktoré sú zhodou okolností aj súradnice kartézske. Dokážeme, že body $A = (a, b, c)$, $A' = (b + c - a, a + c - b, a + b - c)$ a T (ťažisko trojuholníka $E_1E_2E_3$) ležia na priamke, ba čo viac, nájdeme aj pomer vzdialeností. Mimochodom $T = \frac{E_1+E_2+E_3}{3}$. Zoberme kombináciu $\frac{2}{3}A + \frac{1}{3}A' = \frac{2}{3}(a, b, c) + \frac{1}{3}(b + c - a, a + c - b, a + b - c) = \frac{1}{3}(a + b + c, a + b + c, a + b + c) = \frac{1}{3}(1, 1, 1) = T$. Čo znamená, že vskutku tie body ležia na priamke a navyše vieme, že pre vzdialenosti platí $2|AT| = |A'T|$, tj. vzdialenosť od ťažiska sa zdvojnásobí.

Ešte k dokončeniu riešenia treba ukázať, že bod A^{26} bude mimo trojuholníka $E_1E_2E_3$, bez ohľadu na pôvodnú voľbu bodu A (samozrejme s podmienkami zo zadania). Čo je kus škaredšie ako prvá časť druhého riešenia, ale treba ju zrobiť.

Uvažujme trojuholník s bodmi K, L, M takými, že sa nachádzajú na spojniciach TE_i a zároveň ich vzdialenosť od ťažiska je $\sqrt{(1/3^2 + 1/3^2 + (2/3)^2)}/2^{26}$, tj. $K^{26} = E_1$, $L^{26} = E_2$ a $M^{26} = E_3$. Uvedomme si, že vskutku pri párnej mocnine máme bod na spojnici TE_i. Prepíšme ich vzdialenosť od ťažiska na zlomok s menovateľom 123456789:

$$\frac{\sqrt{(1/3^2 + 1/3^2 + (2/3)^2)}/2^{26} \cdot 123456789}{123456789} \leq \frac{1.503}{123456789},$$

(označme to ako c). Vzdialenosť bodov T a E_i je $\sqrt{(\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ (označme to ako f) .

Teda trojuholník, v ktorom sa musí nachádzať prípustný bod, je trojuholník KLM. (Prečo? Lebo inak po 26 krokoch sa dostaneme mimo trojuholníka $E_1E_2E_3$, a teda určite bude jedno číselko záporné.) Ešte raz uvedieme ako nájdeme body K, L, M v závislosti od c a f:

$$K = \left(\left(1 - \frac{c}{f}\right)T + \frac{c}{f}E_1\right),\ L = \left(\left(1 - \frac{c}{f}\right)T + \frac{c}{f}E_2\right),\ M = \left(\left(1 - \frac{c}{f}\right)T + \frac{c}{f}E_3\right).$$

Pozrime sa na súradnice K a odhadneme ich zhora aj zdola, aby sme nemuseli počítať s presným výsledkom. Pri E_1 bude:

$$\frac{41152264.2}{123456789} \leq \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1.503}{123456789}\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1.503}{123456789}\sqrt{\frac{3}{2}} \leq \frac{41152264.3}{123456789}$$

a pre E_2 a E_3 budú

$$\frac{41152262.2}{123456789} \leq \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1.503}{123456789}\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \leq \frac{41152262.4}{123456789}.$$

Analogicky pre L, M. Je zrejmé, že v danom trojuholníku nie je iný prípustný bod ako T a ten má všetky tri súradnice rovnaké. Teda žiaden prípustný bod zo zadania nie je vo vnútri trojuholníka KLM, a preto ľubovoľný začiatočný bod A vskutku po 26 krokoch musí vyletieť z trojuholníka $E_1E_2E_3$, čo sme chceli dokázať.

Poznámka. Na našej stránke v html vzorákoch nájdete ešte jeden prístup k tejto úlohe, ktorý je viac vysokoškolský. Keby niekoho zaujímalo dozvedieť sa niečo nové z pokročilejšej matematiky, tak tam nájde riešenie pomocou matíc.

1.8 Kávu Musím Spapať

opravoval **Gianetta**

Zadanie. *Po tom, čo Magalhães úspešne unikol smrti v búrke, zastavil sa so svojou flotilou na jednom ticho-morskom ostrove. Námorníkov tam obzvlášť zaujali cibetky, ktoré sa živili rôznymi druhmi kávovníkov. Chlapi neskôr odpozorovali, že ostrovní domorodci jedia kávové zrná z jej trusu a rozhodli sa to sami vyskúšať. Na ich veľké prekvapenie mali tieto zrná rôznorodé chute podľa toho, z akého kávovníka práve cibetka jedla.*

Cibetku si môžeme predstaviť ako takú funkciu $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, že pre všetky prirodzené čísla $n > 1$ existuje prvočíslo p také, že platí p delí n a

$$f(n) = f\left(\frac{n}{p}\right) - f(p).$$

Navyše platí

$$f(13^{2019}) + f(17^{2020}) + f(19^{2021}) = 2018.$$

Vypočítajte hodnotu

$$f(2019^{13}) + f(2020^{17}) + f(2021^{19}).$$

Riešenie

Pri funkcionálnych rovniciach je dobré vyskúšať dosadiť si nejaké malé čísla alebo špeciálne prípady. Vie to veľa povedať o správaní sa hľadanej funkcie a jej vlastnostiach.

Špeciálnym prípadom by tu bolo napríklad, že n je prvočíslo (podľa zadania nemôžeme dosadiť $n = 1$). Ak n je prvočíslo, delí ho iba jedno prvočíslo p, a platí $p = n$. Po dosadení do rovnice máme

$$f(n) = f(1) - f(n),$$

$$f(n) = \frac{f(1)}{2} = c,$$

kde c je nejaká konštanta, neskôr upresníme aká.

Predpokladajme

$$n = p_1 p_2 \dots p_k\,,$$

pričom $p_1, p_2, \dots, p_k$ sú (nie nutne rôzne) prvočísla. Nech p je ľubovoľné prvočíslo spĺňajúce

$$f(n) = f\left(\frac{n}{p}\right) - f(p).$$

Bez ujmy na všeobecnosti, nech $p = p_k$.

Už vieme, že ak $k = 1, f(n) = f(1)/2$.
Nech $k = 2, n = p_1p_2$, potom $f(n) = f(p_1) - f(p_2) = c - c = 0$.
Nech $k = 3, n = p_1p_2p_3$, potom $f(n) = f(p_1p_2) - f(p_3) = 0 - c = -c$.
Nech $k = 4, n = p_1p_2p_3p_4$, potom $f(n) = f(p_1p_2p_3) - f(p_4) = -c - c = -2c$.

Vyzerá to tak, že funkcia f spĺňa $f(n) = -(k-2)c$. Toto dokážeme indukciou podľa k.

Vieme, že pre $k = 1$ to platí, nech to platí pre nejaké k. Potom nech $n = p_1 \dots p_k p_{k+1}$, s využitím indukčného predpokladu

$$f(n) = f(p_1 \dots p_k p_{k+1}) = f(p_1 \dots p_k) - f(p_{k+1}) = -(k-2)c - c = -(k-3)c,$$

teda tvrdenie platí.

Vieme

$$2018 = f(13^{2019}) + f(17^{2020}) + f(19^{2021}) = -2017c - 2018c - -2019c = -3 \cdot 2018c,$$

a teda

$$c = -\frac{1}{3}.$$

Ďalej $2019 = 3 \cdot 673,\ 2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101,\ 2021 = 43 \cdot 47.$

$$f(2019^{13}) + f(2020^{17}) + f(2021^{19}) = -24c - 66c - 36c = -126c = 42.$$

Úloha nebola ťažká, väčšina z vás ju vyriešila správne.

1.9 Keď Milionárom Si

opravoval **Tomáš**

Zadanie. *Po mnohých ďalších mesiacoch plavby sa Magalhãesova flotila konečne vrátila naspäť do rodného Portugalska. So sebou si námorníci priniesli aj nemalý poklad. Po zakotvení narazili v prístave na talianskeho vynálezcu menom Gianetta (čítaj Žaneta), ktorý ich zaujal svojim vynálezom. Pomocou neho mohli moreplavci investovať a zhodnocovať svoje prinesené zlaté mince, podobne ako na dnešnej burze. Bystrí chlapci si však všimli v Gianettovom vynáleze chybičku. Vyzerá to, že vďaka nej môžu pri správnom rozdelení mincí získať neúmerné bohatstvo.*

Na začiatok moreplavci umiestnia na tri kôpky postupne a, b, c mincí, kde $a, b, c \geq 2017$ sú kladné celé čísla. Vynález umožňuje v jednom kroku vykonať jednu z nasledujúcich operácií:

- *(1) Moreplavci si vyberú kôpku, na ktorej je párny počet mincí. Vynález z nej zoberie všetky mince a po polovici z nich dá na zvyšné dve kôpky.*
- *(2) Moreplavci si vyberú kôpku, na ktorej je nepárny počet mincí a zároveň aspoň 2019 mincí. Vynález z nej zoberie 2019 mincí a na zvyšné dve kôpky pridá po 1010 mincí.*

Predpokladajme, že vo vynáleze je dostatok mincí navyše. Nájdite všetky usporiadané trojice (a, b, c), pre ktoré po nejakom konečnom počte ťahov moreplavci vedia dostať na niektorej kôpke aspoň 2019^{2020} mincí.

Riešenie

Môžeme si všimnúť, že po každej operácii celkový počet mincí ostane rovnaký, alebo sa zvýši. Ak by sa nám vždy podarilo zvýšiť počet mincí, raz budeme mať dosť veľa mincí na to, aby na niektorej kôpke bolo aspoň 2019^{2020} mincí. V prípade ak bude na každej kôpke len 2017 mincí, tak nevieme urobiť žiadnu operáciu a skončili sme. Ak bude na niektorej kôpke viac ako 2017 mincí, už vieme robiť nejaké operácie a ukážeme si, že dokonca vždy budeme vedieť pridať ďalšiu mincu.

Odteraz nech je na kôpkach spolu aspoň $3 \cdot 2017 + 1$ mincí. Vždy vieme spraviť nejaký ťah, lebo ak je na všetkých kôpkach nepárny počet mincí, na tej najväčšej musí byť aspoň 2019 mincí a použijeme na ňu operáciu *(2)*. Ak je na niektorej kôpke párny počet mincí, vieme ju rozdeliť na zvyšné dve kôpky operáciou *(1)*. V takomto prípade dostaneme na jednej kôpke 0 mincí a kým budeme robiť len operácie *(1)*, stále bude na niektorej kôpke 0 mincí. Keď použijeme operáciu *(2)*, zvýšime celkový počet mincí a môžeme začať odznova. Preto stačí dokázať, že keď sme v stave, kde je na niektorej kôpke 0 mincí, vieme spraviť niekoľko ťahov *(1)* tak, aby sme potom mohli spraviť ťah *(2)*.Počty mincí na dvoch nenulových kôpkach označíme A, B, kde A je ten väčší počet, $A \geq B$.

Ak A je nepárne, vidíme, že $A \geq 2019$. Stačí keď použijeme operáciu *(2)* na kôpku A, teda sme pridali celkovo 1 mincu.

Ak je A párne a B je nepárne, pozrime sa ešte, aké veľké je B. Ak $B \geq 2019$, tak použijeme naň operáciu *(2)* a zvýšime celkový počet mincí. V opačnom prípade (označme $A = 2K$) kôpku A rozdelíme na dve polovice po K. Počty mincí na kôpkach budú K a $B+K$. Keďže B mohlo byť najviac 2017, tak A bolo aspoň $2 \cdot 2017 + 1$, teda K je aspoň 2018. Spolu máme nepárny počet mincí ($A + B$), takže na niektorej kôpke je nepárny počet mincí. Na oboch kôpkach (K aj $B+K$) je aspoň 2018 mincí, takže na tej nepárnej je aspoň 2019 mincí, môžeme na ňu použiť operáciu *(2)*.

Ak je A aj B párne, jednoducho kôpku na ktorej je menej mincí vždy rozdelíme na dve polovice Takto sa nám vždy zmenší počet mincí na menšej kôpke, takže raz sa musíme zaseknúť. V takom prípade bude na oboch kôpkach nepárny počet mincí, takže na väčšiu z nich použijeme operáciu *(2)*.

Keď na začiatku bolo na kôpkach $(2017, 2017, 2017)$ mincí, tak moreplavci nevedia dostať na žiadnej kôpke 2019^{2020} mincí. Vo všetkých ostatných prípadoch vedia, pretože vždy vedia pridať 1 mincu a raz, keď bude všetkých mincí dosť veľa, tak na niektorej kôpke bude musieť byť aspoň 2019^{2020} mincí.

1.10 Kika Magalhãesa Stratila

opravoval **Ákos**

Zadanie. *V tejto úlohe, mal byť nejaký pekný historický príbeh. Žiaľ, Kika stratila svoju historickú knižku o Magalhãesovi, a tak nám neostáva nič iné, iba vám namiesto pekného čítania zadať túto šmakocinku:*

Daný je ostrouhlý trojuholník ABC, v ktorom platí $|AB| < |AC|$. Označme O stred kružnice opísanej tomuto trojuholníku. Nech Q je bod taký, že OQ je priemerom kružnice k opísanej trojuholníku AOC. Na priamkach AQ a AC sú dané body M a N tak, že $AMBN$ je rovnobežník. Dokážte, že priesečník priamok MN a BQ leží na kružnici k.

Riešenie

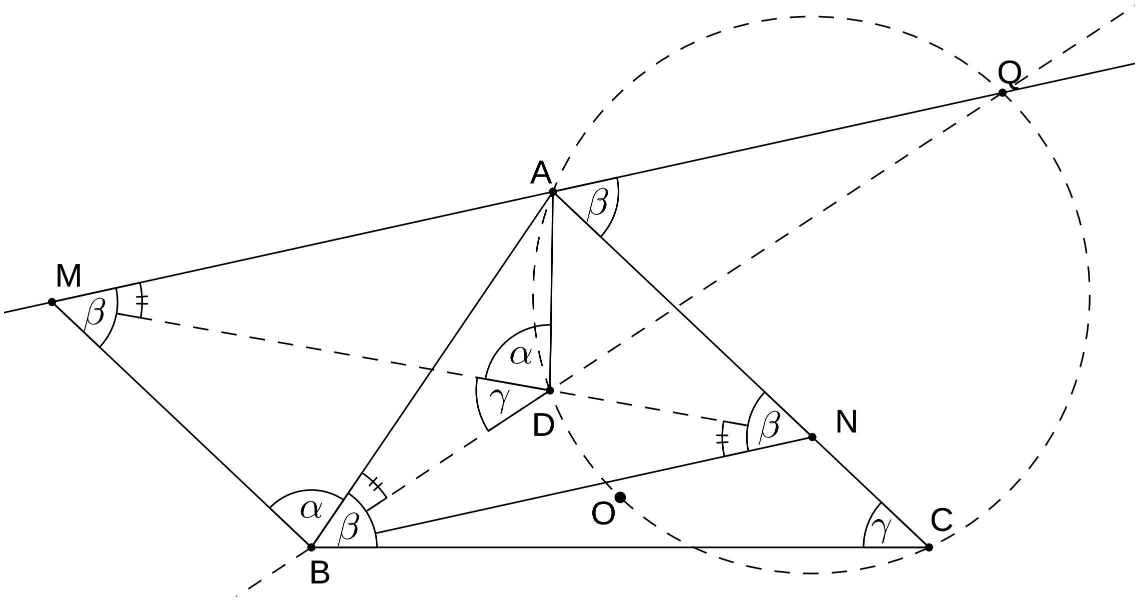
Uhly trojuholníka ABC budeme značiť α, β, γ, ako zvyčajne.

Najprv si potrebujeme uvedomiť, čo je bod Q vlastne zač. Chceme si ukázať, že je to práve bod prieniku dotyčníc ku kružnici opísanej trojuholníku ABC v bodoch A resp. C. (Využijeme veľkosti uhlov $|\sphericalangle AOC| = 2\beta$, $|\sphericalangle OAC| = 90° - \beta$.) Platí to, pretože $|\sphericalangle CAQ| = |\sphericalangle OAQ| - |\sphericalangle OAC| = 90° - (90° - \beta) = \beta$, teda priamka AQ je naozaj dotyčnica (kvôli vete o úsekovom uhle). Podobne sa toto dá odvodiť aj pre priamku CQ. Tým sme naše tvrdenie o bode Q ukázali. Z toho ale vyplýva, že priamka BQ je symediánou z vrcholu B v trojuholníku ABC. [1].

Našou úlohou je teda ukázať, že priesečník priamky MN a b-symediány trojuholníka ABC (ktorý budeme ďalej označovať D) leží na kružnici AOC.

Vieme, že priamka MN prechádza stredom úsečky AB, pretože uhlopriečky rovnobežníka majú spoločný stred. Môžeme si ďalej všimnúť podobnosť trojuholníkov $ABC \sim ANB$, pretože $\beta = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CAQ| = |\sphericalangle ANB|$, kde tretia rovnosť nastáva kvôli $BN \parallel AQ$. Táto podobnosť nám ďalej dáva $|\sphericalangle DBA| = |\sphericalangle MNB| = |\sphericalangle NMA| = |\sphericalangle DMA|$, kde druhá rovnosť vyplýva zo stredovej symetrie rovnobežníka. Prvá však potrebuje odôvodnenie: $|\sphericalangle DBA|$ je veľkosť uhla medzi b-symediánou a stranou AB, čo z definície symediány sa rovná uhlu b-ťažnice a strany BC. Tento uhol sa však v podobnosti prenášajúcej trojuholník ABC na ANB práve prenesie na uhol MNB, tým sme platnosť rovností ukázali.

[1] O symediánach sa môžete dozvedieť viac napríklad na 50. strane tohto dokumentu: https://prase.cz/archive/36/serial.pdf



Z týchto rovností vyplýva tetivovosť štvoruholníka $AMBD$. Ďalej vieme, že $\beta = |\sphericalangle ANB| = |\sphericalangle BMA|$, teda kvôli tetivovsti $|\sphericalangle ADB| = 180° - \beta$ a ďalej $\alpha = |\sphericalangle BAN| = |\sphericalangle ABM| = |\sphericalangle ADM|$, kde druhá rovnosť platí kvôli $AC \parallel BM$, a tretia kvôli tetivovosti. Z týchto rovností dostávame $|\sphericalangle MDB| = |\sphericalangle ADB| - |\sphericalangle ADM| = 180° - \beta - \alpha = \gamma$, čo ale implikuje $|\sphericalangle BDN| = 180° - \gamma$, čo nám spolu s $|\sphericalangle BCN| = \gamma$ dáva tetivovosť $BCND$. Z tohto a z hore uvedeného vzťahu $|\sphericalangle ANB| = \beta$ vyplýva $180° - \beta = |\sphericalangle BNC| = |\sphericalangle BDC|$. Teda okolo bodu D máme tri uhly ADB, BDC, CDA spĺňajúce $360° = |\sphericalangle ADB| + |\sphericalangle BDC| + |\sphericalangle CDA| = 180° - \beta + 180° - \beta + |\sphericalangle CDA|$, z čoho vyplýva $|\sphericalangle CDA| = 2\beta = |\sphericalangle COA|$, čo dokazuje tetivovosť štvoruholníka $CADO$, čo sme chceli ukázať.