Korešpondenčný matematický seminár
XLI. ročník, 2019/2020
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Riešenia 2. kola letnej časti

2.1 Kasíno Mamutích Šamanov ($\kappa \leq 1$) opravovali **Adam** a **Ondro**

Zadanie. *Hazard je jedna z najstarších voľnočasových aktivít, akej sa kedy ľudstvo venovalo. Historické pramene uvádzajú, že už počas ranej doby kamennej prevádzkovali kmeňoví šamani nasledovnú hru:*

Šaman položí na stôl tri obrovské mamutie lebky. Každý hráč si musí nezávisle vybrať práve jednu z nich a hodiť do nej jeden mamutí chvost – vtedajšie platidlo, bolo ho dokonca možné deliť na zlomky. Následne šaman skontroluje, či sú všetky počty mamutích chvostov v lebkách rôzne. Ak je v niektorých lebkách rovnako chvostov, mamutie chvosty sa vrátia hráčom a hra sa začne odznova. Ak sú počty v každej lebke iné, zistí, v ktorej lebke je najmenej mamutích chvostov. Hráči, ktorí vložili svoje mamutie chvosty do tejto lebky, sú výhercovia hry a získajú od šamana dva mamutie chvosty, plus si rozdelia mamutie chvosty z lebky, v ktorej bolo najviac chvostov. Chvosty z najprázdnejšej aj strednej lebky si ponecháva šaman. Pomôžte šamanovi zistiť, pre aké počty hráčov sa mu oplatí hru prevádzkovať[1].

Riešenie

Našou úlohou je zistiť, kedy šaman zarobí na svojej hre. Vieme, že keď je v niektorých dvoch lebkách rovnaký počet, tak sa nič nestane. Z tohto vyplýva, že keby to šaman hral s jedným alebo dvoma ľuďmi, tak by asi umreli od nudy. Lebo keď hrá jeden, tak môže dať chvost len do jednej a v ostatných dvoch je 0, a keď sú dvaja, tak buď dajú do tej istej, čo je to isté ako pri jednom hráčovi, alebo každý do inej, kde potom v dvoch bude po jednom chvoste.

Takže teraz vieme, že hra je „hrateľná“, len keď počet hráčov je $H \geq 3$. Pozrime sa teraz na tieto možnosti. Keďže sú v lebkách rôzne počty chvostov, môžeme si ich zoradiť od najprázdnejšej po najplnšiu a označiť ich zaradom A, B, C. Potom platí nerovnosť $0 \leq A \leq B \leq C \leq H$. Prípady, keď platí rovnosť nás nezaujímajú, lebo vtedy sa nič nestane. Keď nastane prípad $0 \leq A < B < C \leq H$, tak šaman zaplatí $2 \cdot A$ chvostov a dostane $A + B$ chvostov. A teda šaman zarobí, ak platí $2 \cdot A < A + B$, z čoho keď odčítame A dostaneme, že $A < B$, čo platí.

Z tohto nám vyplýva, že šamanovi sa hra oplatí hrať vždy, keď má aspoň troch hráčov.

2.2 Kosťou Maľujem Škrabanice ($\kappa \leq 2$) opravovali **Gianetta** a **Števka**

Zadanie. *Prvou formou umenia, ktorú ľudstvo kedy vytvorilo, boli graffity. Ak neveríte, stačí sa zamyslieť, čo sa nám zachovalo po pravekých ľuďoch. Neboli to žiadne symfónie, olejomaľby ani básne. Boli to čarbanice na čerstvo zateplených stenách jaskyne. Najznámejšia z tých, ktoré sa zachovali do dnešných dní, zobrazuje vypätý moment z lovu mamutov. Vyzerá nasledovne:*

Základom je ostrouhlý trojuholník ABC. Body D a E sú pätami výšok postupne na stranu BC a na stranu AC. Priesečník priamok AD a BE je označený ako H. Priamka cez bod H pretína úsečku BC v bode P a úsečku AC v bode Q. Bod K leží na úsečke BE tak, že priamka PK je kolmá na BE. Podobne, bod L leží na úsečke AD tak, že priamka QL je kolmá na AD. Dokážte, že priamky DK a EL sú rovnobežné.

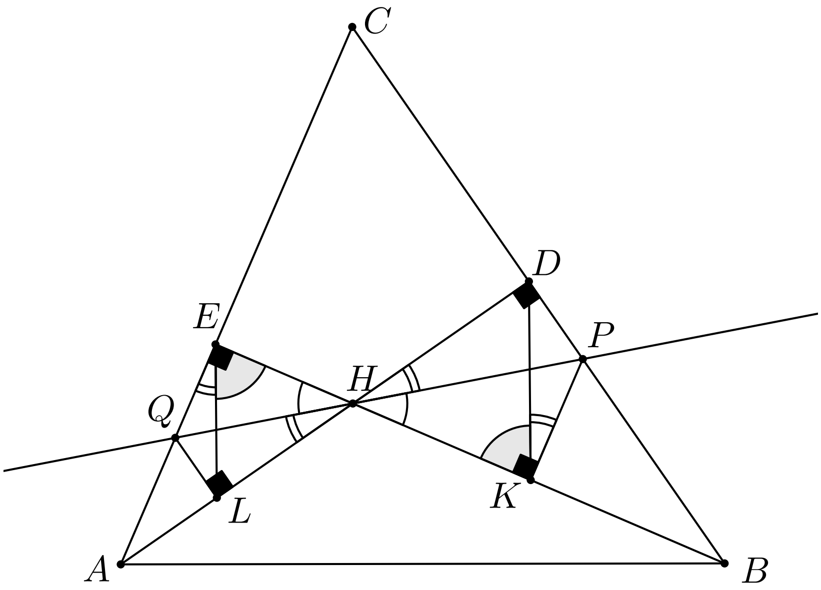
[1] Šamanovi sa oplatí hru prevádzkovať ak pri veľkom počte odohratých hier získa v priemere viacej mamutích chvostov, ako stratí.

Riešenie

Na začiatok sa zamyslime, ako by sme vedeli dokázať rovnobežnosť dvoch priamok. Jedným zo základných spôsobov je hľadať zhodné súhlasné alebo striedavé uhly alebo tiež môžeme skúšať dokázať, že obe dané priamky sú kolmé na nejakú tretiu (toto je v podstate len špeciálny prípad). Samozrejme, existuje viacero ciest, ako vyriešiť túto úlohu. Pre začiatok si ukážeme to najzákladnejšie a potom spomenieme aj niekoľko ďalších.

Zo zadania poznáme pravé uhly HLQ, HEQ, HDP a HKP. Ďalej si môžeme všimnúť, že bodom H prechádzajú až tri priamky, a teda tam máme mnoho dvojíc vrcholových uhlov, a tie sú zhodné. Z nich by mohli byť najzaujímavejšie dvojice $|\sphericalangle LHQ| = |\sphericalangle DHP|$ a $|\sphericalangle EHQ| = |\sphericalangle KHP|$, resp. aj $|\sphericalangle LHE| = |\sphericalangle DHK|$ (to sú len súčty predchádzajúcich). Takže máme dve dvojice zhodných uhlov v trojuholníkoch HLQ a HDP, a preto sú podobné. Z rovnakého dôvodu sú podobné aj trojuholníky HEQ a HKP.

Môžeme si všimnúť, že koeficient podobnosti oboch dvojíc trojuholníkov je rovnaký, lebo majú spoločnú stranu (pre trojuholníky HLQ a HEQ je to strana HQ, pre trojuholníky HDP a HKP strana HP). Preto sú aj celé štvoruholníky $HEQL$ a $HKPD$ podobné. Chceme ukázať, že uhlopriečka jedného je rovnobežná s uhlopriečkou druhého. Ako sme si už povedali, chceme to ukázať cez striedavé alebo súhlasné uhly. Vďaka podobnosti štvoruholníkov máme aj podobnosť trojuholníkov HEL a HKD, a teda aj rovnosť veľkostí uhlov $|\sphericalangle HEL| = |\sphericalangle HKD|$ a aj $|\sphericalangle HLE| = |\sphericalangle HDK|$, čo sme chceli. Máme teda dvojicu zhodných striedavých uhlov (dokonca dve), vďaka čomu sú priamky EL a DK rovnobežné.



Iné riešenie

Vieme, že $|\sphericalangle HDP| = |\sphericalangle PKH| = 90°$. Potom

$$|\sphericalangle HDP| + |\sphericalangle HKP| = |\sphericalangle DHK| + |\sphericalangle DPK| = 180°.$$

To znamená, že body H, D, P, K tvoria tetivový štvoruholník. [2]

[2] Pre tých, čo ich nepoznajú: tetivový štvoruholník je špeciálny tým, že mu vieme opísať kružnicu. To sa dá práve vtedy, keď je súčet protiľahlých uhlov rovný 180°.

Potom ale z vlastností obvodových uhlov

$$|\sphericalangle DHP| = |\sphericalangle DKP|.$$

Ďalej

$$|\sphericalangle HKD| = 180° - |\sphericalangle DKP| - |\sphericalangle PKB| = 90° - |\sphericalangle DKP|.$$

Podobne $|\sphericalangle HEQ| = |\sphericalangle QLH| = 90°$, teda

$$|\sphericalangle EQL| + |\sphericalangle EHL| = |\sphericalangle QLH| + |\sphericalangle QEH| = 180°,$$

a teda body E, Q, L, H tiež tvoria tetivový štvoruholník.

Z toho vieme $|\sphericalangle QEL| = |\sphericalangle QHL|$,

$$|\sphericalangle LEH| = 90° - |\sphericalangle QEL| = 90° - |\sphericalangle QHL|.$$

Vieme $|\sphericalangle QHL| = |\sphericalangle DHP|$, a teda

$$|\sphericalangle LEH| = 90° - |\sphericalangle QEL| = 90° - |\sphericalangle QHL| = 90° - |\sphericalangle DHP| = 90° - |\sphericalangle DKP| = |\sphericalangle HKD|.$$

Potom priamky EL, DK zvierajú rovnaký uhol s priamkou EK, a teda sú rovnobežné.

2.3 Kameň Menom sa Stal ($\kappa \leq 3$) opravovali **Mišo M.** a **Kubko**

Zadanie. *Zanedlho po tom, ako začali prvotní ľudia formovať kmene a iné spoločenstvá objavil sa problém, ktorý dovtedy nemuseli riešiť. Nemali mená a nevedeli, ako sa oslovovať, čo vytváralo medzi súkmeňovcami nemalé problémy. Napríklad keď počas lovu niekto zakričal: „Hej ty tam, bacha, máš za chrbtom šabľozubého tigra!“ a otočili sa všetci, aj tí, ktorí mali tigra pred sebou, tak to nebolo dvakrát príjemné...*

Kmeňoví šamani teda prišli s nápadom dávať ľuďom mená. Vymysleli spolu vyše 40 rôznych mien, zoradili celý kmeň do radu[3] *a súkmeňovci si začali zaradom dávať mená podľa nasledovných pravidiel:*

- *Každý človek, ktorý stojí v rade na nepárnej pozícií sa volá „Kameň“.*
- *Pre každé prirodzené číslo n platí, že každý človek, ktorý stojí v rade na pozícií n má rovnaké meno ako človek na pozícií $4n$.*
- *Pre každé prirodzené číslo n platí, že každý človek, ktorý stojí v rade na pozícií n má rovnaké meno ako aspoň jeden z ľudí na pozíciách $n + 2$ a $n + 4$.*

Dokážte, že všetci sa volajú „Kameň“.

Riešenie

Pokúsme sa zistiť, kde sa v rade môže vyskytnúť človek, ktorý sa nevolá „Kameň“. Povedzme, že sa volá „*Šuter*“. Ak ukážeme, že takéto miesto nie je, budeme vedieť, že sa všetci volajú rovnako. Podľa prvej podmienky to bude na párnom mieste, keďže na nepárnom sa všetci volajú „Kameň“. Druhá podmienka zase vylúči možnosť, že by sa prvý „Šuter“ nachádzal na mieste deliteľnom 4. Keďže k-ta pozícia je pred $4k$-tou, tak k-ty človek sa volal „Kameň“ a $4k$-ty by tak bol ďalší „Kameň“.

Pre prvý „Šuter“ tak zostáva pozícia so zvyškom 2 po delení 4, zapíšeme ako $4k + 2$. Podľa tretej podmienky musí byť na mieste $4k+4$ alebo $4k+6$ tiež „Šuter“. Platí $4k+4 = 4(k+1)$, preto sa $4k+4$-tý človek volá rovnako ako $k + 1$-vý. Ten však stojí v rade pred $4k + 2$, preto sa volá „Kameň“. Človek $4k + 6$ teda musí byť „Šuter“.

[3] Pre potreby úlohy je ľudí v našom kmeni nekonečne veľa, rovnako ako prirodzených čísel.

Teraz vieme podľa tretej podmienky pokračovať ďalej. Keďže na pozícii $4k+4$ je „Kameň“, tak na pozícii $4k+6$ alebo $4k + 8$ musí byť ďalší „Kameň“. Ten teda bude na $4k + 8$. Ďalej $4k + 10$ bude „Šuter“ a takto sa budú striedať na párnych pozíciách do nekonečna. Za žiadnym „Kameňom“ totiž nemôžu na párnych pozíciách byť dvaja s menom „Šuter“ a naopak. Vidíme, že od pozície $4k + 2$ je každý štvrtý človek „Šuter“. Ostatní sú „Kameň“. To ale znamená, že každá pozícia deliteľná 4 je obsadená „Kameňom“. Pre každý „Šuter“ na pozícii n je tak na pozícii $4n$ „Kameň“, čo je v rozpore s druhou podmienkou. Pre „Šuter“ tak nezostalo miesto a všetci sa volajú „Kameň“.

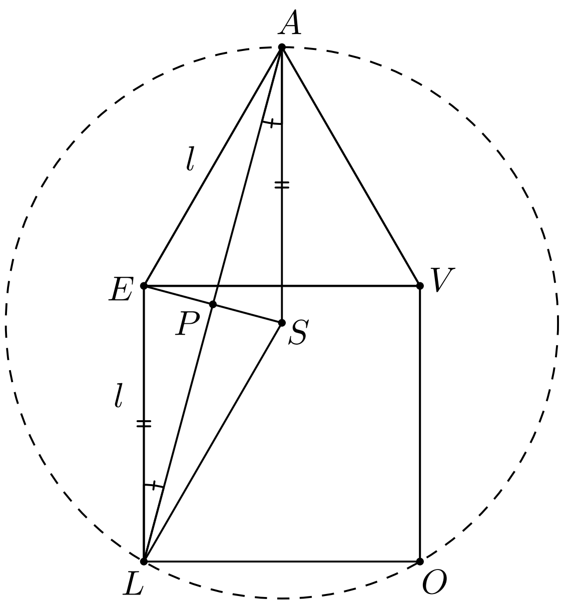
2.4 Klaude Monet Staropraveku ($\kappa \leq 5$) opravovala **Kika**

Zadanie. *Tí, ktorí dávali na hodinách výchovy umením pozor, si iste pamätajú, že impresionizmus ako umelecký smer vznikol koncom 19. storočia. Pravda je však niekde úplne inde. Totižto slovo „impresionizmus“ vychádza z francúzskeho impress – zapôsobiť. Lenže už ľudia z rodu homo neanderthalensis sa snažili zapôsobiť na svoje súkmeňovkyne. Napríklad táto jaskynná maľba z obdobia raného praveku je jasným dôkazom toho, že už istý Kameň sa umením pokúšal zapôsobiť na svoju milú, a teda bol prvým impresionistom. Veď posúďte sami:*

Kameň nakreslil na stenu jaskyne pre svoju drahú štvorec LOVE s hranou dĺžky l. Potom dokreslil bod A mimo štvorca tak, aby mu vznikol rovnostranný trojuholník AVE. Následne opísal trojuholníku ALO kružnicu k a jej stred nazval S. Aký je pomer dĺžky l ku dĺžke strany |SL|?

Riešenie

Bod S je stred kružnice opísanej $\triangle ALO$. To znamená, že body A, L a O sú od bodu S rovnako vzdialené. Stačí nám teda zistiť ktorúkoľvek z dĺžok $|SA|, |SL|$ alebo $|SO|$. Keď sme si to tak zhruba 1000-krát nakreslili, tak začneme mať tušenie, že aj dĺžka SL je l. Tak hor sa to dokázať! Pozrime sa na štvoruholník $LSAE$. Strany EL a AE majú dĺžku l, pretože je to strana štvorca alebo strana rovnostranného trojuholníka, ktorého strana je zhodná so stranou štvorca. Bod E je teda rovnako vzdialený od bodov A a L. Aj bod S je rovnako vzdialený od bodov A a L. To znamená, že body E aj S ležia na osi úsečky AL. Označme si priesečník úsečiek LA a ES ako P.

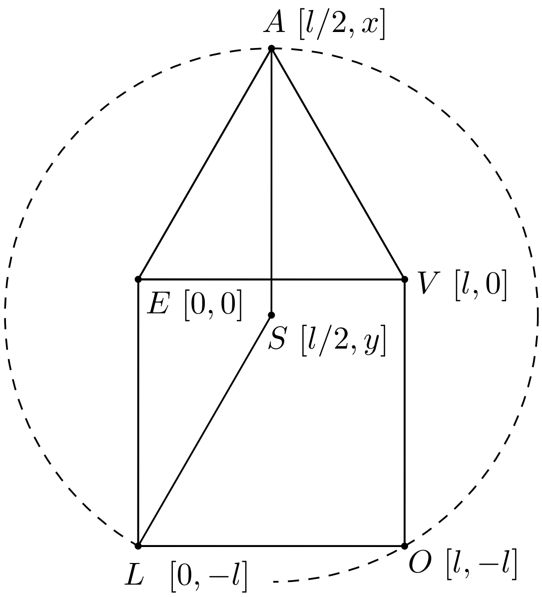


Vieme, že to je súčasne stred úsečky AL, pretože priamka ES je osou úsečky AL. Teda úsečky LP a AP sú rovnako dlhé. Pri bode P máme 4 pravé uhly, lebo ES je os úsečky. Teda uhol APS je zhodný s uhlom LPE. Ak by sa nám podarilo dokázať, že aj uhol PAS je zhodný s uhlom PLE, tak podľa vety *usu* sú trojuholníky

APS a *LPE* zhodné, a teda dĺžka *AS* je zhodná s dĺžkou *LE*, ktorá je l. Bod S leží na osi úsečky *LO*, pretože je rovnako vzdialený od bodov L a O. Bod A leží na osi úsečky *EV*, pretože trojuholník *AVE* je rovnostranný a teda $|EA| = |VA|$. Úsečky *LO* a *VE* sú protiľahlé strany štvorca. To znamená že ich osi sú totožné. Teda body A a S ležia na osi *LO*. Priamka *AS* je kolmá na *LO*. Priamka *LE* je kolmá na *LO*. Z toho vyplýva, že priamky *EL* a *AS* sú rovnobežné. Uhly *PAS* a *PLE* sú striedavé, čiže aj zhodné. Trojuholníky *APS* a *LPE* sú zhodné. Dĺžka úsečky *SA* je l. To znamená, že aj dĺžka strany *SL* je l. Pomer dĺžky l ku dĺžke strany $|SL|$ je 1.

Analytické riešenie

Uložme si body do súradnicovej sústavy ako je na obrázku.



Vieme, že bod A je rovnako vzdialený od bodov E a V, a preto je jeho x-ová súradnica $l/2$. Vypočítajme y-ovú súradnicu. Spravíme to pomocou Pytagorovej vety, a síce sa pozrime na pravouhlý trojuholník, ktorý vznikne z rovnostranného trojuholníka *AVE*, keď ho rozdelíme pomocou osi strany *EV*. Prepona je dĺžky l, jedna odvesna je $l/2$ a druhá je x. Platí $l^2 = (l/2)^2 + x^2$. Z toho vyplýva, že $x = (\sqrt{3}/2)l$.

Vieme, že bod S má x-ovú súradnicu $l/2$, pretože je rovnako vzdialený od bodov L a O. Bod S je rovnako vzdialený aj od bodov L a A. Vzdialenosť od bodu L je $\sqrt{(l/2-0)^2 + (y-(-l))^2}$. Vzdialenosť od bodu A je $\sqrt{(l/2-l/2)^2 + (y-(\sqrt{3}/2)l)^2}$. Máme rovnicu

$$\sqrt{(l/2-0)^2 + (y-(-l))^2} = \sqrt{(l/2-l/2)^2 + (y-(\sqrt{3}/2)l)^2},$$

$$\sqrt{l^2/4 + y^2 + 2yl + l^2} = \sqrt{0^2 + y^2 - 2y(\sqrt{3}/2)l) + (3/4)l^2}.$$

Z nej dopočítame $y = -l/(2\sqrt{3}+4)$. Súradnice bodu S sú $[l/2, -l/(2\sqrt{3}+4)]$. Teraz už len vypočítame dĺžku *SL*. Vieme, že dĺžka *SA* je rovnaká, a tá sa dá vypočítať asi trošku jednoduchšie.

$$|SA| = \sqrt{(l/2-l/2)^2 + \left(-l/(2\sqrt{3}+4) - (\sqrt{3}/2)l\right)^2} = \frac{l(1+\sqrt{3}(\sqrt{3}+2))}{2\sqrt{3}+4}.$$

Po troche úprav sa nám podarí získať želaný výsledok, a síce, že $|SL| = |SA| = l$.

2.5 Kvôli Magickému Smilodonovi ($\kappa \leq 8$)

opravoval **Jožo**

Zadanie. *V časoch temného praveku neexistovali žiadne súdy ani zákony. Jediné právo bolo právo najsilnejšieho. A tak tomu bolo aj jedného teplého večera zhruba 10 000 rokov pred naším letopočtom, kedy sa traja mocní a powerful bojovníci Kameň, Kameň a Kameň rozhodli stretnúť v súboji na život a na smrť o labu starejšinovej najstaršej... šabľozubej tigrice. Tá im mala podľa starodávnej povery priniesť astrálne schopnosti. Už-už sa šli mlátiť, keď z jaskyne vybehol starešina so slovami: „Do mamutej nohy, chlapi, neblbnite! Vaše sily sú ekvivalentné, a teda pri súboji akurát všetci zomriete. Aha, pozrite, tu som vyčíslil vaše bojové schopnosti.“*

Povedzme, že silu týchto bojovníkov predstavujú reálne čísla a, b, c, z ktorých aspoň dve sú navzájom rôzne. Dokážte, že $a + b + c = 0$ je ekvivalentné[4] s $a^2 + ab + b^2 = b^2 + bc + c^2 = c^2 + ca + a^2$.

Riešenie

V zadaní máme premenné a, b, c a dve podmienky na tieto premenné: $a+b+c = 0$ a $a^2+ab+b^2 = b^2+bc+c^2 = c^2 + ca + a^2$. Našou úlohou je ukázať, že tieto dve podmienky sú ekvivaletné. To znamená, že obe z nich sú splnené presne pre tie isté trojice hodnôt (a, b, c), pričom a, b, c sú reálne čísla, z ktorých sú aspoň dve rôzne.

Keď chce od nás zadanie dokázať ekvivalenciu, mali by sme si uvedomiť, že máme dokázať dve implikácie. V tomto prípade potrebujeme ukázať:

1. Ak platí $a^2 + ab + b^2 = b^2 + bc + c^2 = c^2 + ca + a^2$, tak potom platí aj $a + b + c = 0$.

2. Ak platí $a + b + c = 0$, tak potom platí aj $a^2 + ab + b^2 = b^2 + bc + c^2 = c^2 + ca + a^2$.

Poďme na to.

Dôkaz prvej implikácie

Predpokladajme, že $a^2+ab+b^2 = b^2+bc+c^2 = c^2+ca+a^2$. Vieme, že niektoré dve premenné musia byť rôzne. Vďaka symetrickosti výrazov si môžeme bez ujmy na všeobecnosti povedať, že sú to a, c. Zoberme si rovnosť prvých dvoch výrazov a upravujme ju

$$
\begin{aligned}
a^2 + ab + b^2 &= b^2 + bc + c^2,\\
a^2 - c^2 + ab - bc &= 0,\\
(a-c)(a+c) + b(a-c) &= 0,\\
(a-c)(a+b+c) &= 0.
\end{aligned}
$$

Keďže $a \neq c$, tak $a - c$ je nenulové a musí platiť $a + b + c = 0$.

Dôkaz druhej implikácie

Predpokladajme, že $a + b + c = 0$. Teraz si môžeme vyjadriť $a = -b - c$ a dosadiť ho výrazov

$$
\begin{aligned}
a^2 + ab + b^2 &= b^2 + 2bc + c^2 - b^2 - bc + b^2 = b^2 + bc + c^2,\\
c^2 + ca + a^2 &= c^2 - bc - c^2 + b^2 + 2bc + c^2 = b^2 + bc + c^2.
\end{aligned}
$$

Dostali sme, že platí $a^2 + ab + b^2 = b^2 + bc + c^2 = c^2 + ca + a^2$.

[4] To znamená, že sústava rovníc $a^2 + ab + b^2 = b^2 + bc + c^2 = c^2 + ca + a^2$ platí ak $a + b + c = 0$ a neplatí ak $a + b + c \neq 0$.

Záverečný komentár

Odporúčame vám vždy si rozdeliť dôkaz ekvivalencie na dve implikácie a neskúšať ich dokazovať naraz. Ľahšie si tak odkontrolujete, či ste niečo neprehliadli. (A taktiež to ľahšie skontroluje opravovateľ, čím ho potešíte ;)) Mnohým riešiteľom sa to nepodarilo a stratili tak zbytočné body.

Keď už máme túto formu riešenia, ľahšie nám pôjde ďalej. Ako sme mohli vidieť, pri úlohách s výrazmi sa oplatí ich upravovať, dávať na jednu stranu, rozkladať na súčin, vyjadrovať si premenné a dosadzovať za ne.

Samotné riešenie úlohy sme uviedli pomerne stručné. Je to hlavne preto, aby ste si mohli pozrieť, čo stačí napísať do vašich riešení. V tomto prípade sú to dve sekcie, kde dokazujeme jednotlivé implikácie. Preto pri prvej implikácii vás mohlo prekvapiť, ako sme vedeli, že zrovna a a c majú byť rôzne. Pri hľadaní riešenia si to všimneme až potom, čo sa dostaneme k rovnosti $(a-c)(a+b+c)=0$. Tu vidíme, žeby sa nám hodilo, že zrovna a a c sú rôzne. To si, samozrejme, môžeme povedať. Formálne je však elegantnejšie napísať túto úvahu už na začiatku nášho riešenia.

2.6 Koniec Mamutieho Šamana

opravovali **Robberta** a **Vodka**

Zadanie. *Šamana už omrzelo zdierať kmeň svojou mamuťou hrou, a tak si vymyslel hru novú. Zobral z jaskyne dva kamene, ktoré vyzerali ako dve šachovnice s $m \times n$ políčkami. Na niektoré políčka šachovníc potom položil figúrku venuše (na každé políčko najviac jednu). A to tak, aby platilo, že v každom riadku oboch šachovníc je párny počet figúrok. Okrem toho ešte platí, že počet figúrok v i-tom stĺpci prvej šachovnice je rovnaký ako počet figúrok v i-tom stĺpci druhej šachovnice (pre všetky $1 \le i \le n$). Hráč hrajúci šamanovu novú hru môže **na prvej šachovnici** vykonávať nasledujúce dva typy ťahov:*

(1) Vezme ľubovoľné 2 riadky a vymení ich obsah.

(2) Popresúva ľubovoľne figúrky v rámci prvých dvoch riadkov tak, aby platilo nasledovné:

- *Každá figúrka ostane vo svojom stĺpci.*
- *Po ťahu bude na každom políčku najviac jedna figúrka.*
- *Po ťahu bude v prvom riadku párny počet figúrok.*

Dokážte, že bez ohľadu na počiatočné rozmiestnenie venuší, môže hráč hrajúci túto novú šamanovu hru pomocou týchto ťahov docieliť to, aby figúrky na oboch šachovniciach boli usporiadané rovnako, a tým vyhrať túto hru.

Riešenie

Označme si prvú šachovnicu M a druhú R. Akékoľvek prípustné rozmiestnenie figúrok na šachovniciach budeme volať stav hry.

Prvým typom ťahu môžeme vymeniť ľubovoľné dva riadky. To ale znamená, že na poradí riadkov nezáleží. Druhým typom ťahu môžeme povymieňať figúrky v prvých dvoch riadkoch, ak dodržíme zadané kritéria. Keďže na poradí riadkov nezáleží, tak kombináciou oboch typov ťahov môžeme vymeniť figúrky v ľubovoľných dvoch riadkoch. Preto si môžeme šachovnice rozbiť na jednotlivé riadky. Naším cieľom je teraz ukázať, že vieme dostať na M také isté riadky ako sú na R.

Teraz dokážeme, že môžeme ťahať aj na R. Presnejšie, dokážeme, že ak vieme vyhrať s ťahaním na R, tak vieme vyhrať aj bez neho. Ak spravíme nejaký ťah na M, vieme ho isto vrátiť späť, lebo je to opäť povolený ťah. Ak budeme ťahať na oboch šachovniciach a dostaneme sa do stavu, keď sú obe rovnaké, stačí nám potom ťahať na oboch šachovniciach spätne (keďže sú už obe rovnaké, tak robíme na oboch rovnaké ťahy) tak, aby sme dostali pôvodnú R. Tým pádom sme ale na R nemuseli ťahať vôbec a vieme vyhrať aj bez ťahania na nej. Odteraz budeme preto ťahať na oboch šachovniciach. Mimochodom, trik s ťahaním späť často zjednoduší úlohu, preto je fajn si ho zapamätať.

Teraz sa pustime do samotného riešenia. Predpokladajme, sporom, že existuje stav hry, z ktorého nevieme vyhrať. Potom iste existuje aj takýto stav, v ktorom majú šachovnice najmenší počet riadkov. Navyše medzi nimi existuje aj stav, v ktorom existuje na M riadok, ktorý sa líši s nejakým riadkom R na najmenšom počte pozícií. Zoberme si tento stav hry. Keďže na poradí riadkov nezáleží, môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že prvý riadok M a prvý riadok R sú tie, ktoré sa líšia na najmenšom počte pozícií.

Pozrime sa na prípad, že prvý riadok M je rovnaký ako prvý riadok R. Ak prvý riadok odstránime zo šachovníc, dostávame stav hry, v ktorom majú šachovnice menší počet riadkov a stále ho nevieme vyhrať, čo je spor. Ak totiž vieme vyhrať po odstránení riadku, potom vieme vyhrať aj keď pridáme rovnaký riadok, lebo s ním po celý čas nič neurobíme. Preto prvé riadky M a R musia byť rôzne.

Dva riadky, v ktorých je v oboch párny počet figúrok sa líšia na párnom počte pozícií. Keďže prvé riadky M a R sú rôzne, tak sa líšia aspoň na dvoch pozíciach. Bez ujmy na všeobecnosti, nech sa líšia v prvých dvoch stĺpcoch. Nech je to tak, že v prvom riadku M sú v prvých dvoch stĺpcoch dve figúrky a v prvom riadku R dve prázdne políčka.

Predpokladajme, že nejaký riadok M má v prvých dvoch stĺpcoch prázdne políčka. Potom môžeme dve figúrky z prvých dvoch stĺpcov prvého riadku presunúť do tohto riadku. Tým sme počet pozícií, v ktorých sa prvý riadok M a R líšia, zmenšili o dva. To je spor s voľbou nášho stavu hry.

Z toho vyplýva, že vo všetkých zvyšných riadkoch M máme aspoň v jednom z prvých dvoch stĺpcoch figúrku. Potom je v týchto stĺpcoch spolu aspoň $m + 1$ figúrok. Rovnako na R nemôžu byť v prvých dvoch stĺpcoch dve figúrky v jednom riadku, inak by sme ich vedeli presunúť do prvého riadku (teraz využívame, že môžeme ťahať aj na R). Preto je na R v prvých dvoch stĺpcoch aspoň $m + 1$ prázdnych políčok, čo je najviac $m - 1$ figúrok. To je v spore s tým, že v každom stĺpci na M a R je rovnaký počet figúrok.

Môžete si rozmysliť, že ak prvé dva stĺpce prvého riadku M vyzerajú inak, tak opäť podobnými úvahami dospejeme k sporu. Napríklad, ak by bola v prvom stĺpci figúrka a druhý by bol prázdny, tak by sme sčítali počet figúrok v prvom a počet prázdnych miest v druhom stĺpci. Tým sme ukázali, že náš „najmenší“ stav hry, v ktorom nevieme vyhrať neexistuje, a preto vieme vyhrať vždy.

2.7 Kmeň Mäso Snoril

opravoval **Mišo S.**

Zadanie. *Na jar, t. j. pred zimou lovil každý kmeň mamuty, pretože mamutie mäso je najlepšie mladé. Nájsť však všetky mladé mamuty je takmer nemožné, pretože sa správajú ešte priveľmi* racionálne. *Preto sa po rokoch pokusov a omylov rozhodli všetky kmene spojiť a založili mamutobijeckú ligu – skupinu krvilačných hľadačov, lovcov a zberačov, ktorých cieľom bolo nájsť, uloviť a pozbierať mäso zo všetkých mladých mamutov. Ich úloha bola jasne daná. Ostávalo ju už len vyriešiť:*

Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je číslo

$$\frac{4n - 2}{n + 5}$$

druhou mocninou nejakého racionálneho čísla.

Riešenie

Ukážeme si dve riešenia – prvé bude možno trochu trikovejšie a využije tzv. stlačenie medzi štvorce (druhé mocniny), druhé bude viac priamočiare, ale bude vyžadovať viac počítania a deliteľností.

Prvé riešenie – stlačením medzi štvorce

Na úvod si uvedomme, že ak nejaký štvorec (druhú mocninu) prenásobíme iným štvorcom, opäť dostaneme štvorec. To platí nielen pre celé čísla, ale aj pre racionálne čísla. Ak teda pre nejaké racionálne r platí

$$\frac{4n-2}{n+5} = r^2,$$

môžeme rovnosť prenásobiť štvorcom $(n+5)^2$, čím dostaneme

$$(4n-2)(n+5) = r^2(n+5)^2 = (r(n+5))^2$$

Teda aj $(4n-2)(n+5)$ je štvorcom racionálneho čísla. Navyše je to celé číslo, teda to musí byť druhá mocnina celého čísla. Ak by to totiž bola druhá mocnina nejakého zlomku, ktorý by v základnom tvare mal menovateľ aspoň 2, po umocnení na druhú by sme opäť dostali zlomok v základnom tvare s menovateľom aspoň 4, ktorý nie je celočíselný.

Táto úvaha platí aj opačným smerom, teda ak $(4n-2)(n+5)$ je štvorcom prirodzeného čísla, tak daný zlomok $(4n-2)/(n+5)$ bude štvorcom racionálneho čísla.

Výraz

$$(4n-2)(n+5) = 4n^2 + 18n - 10$$

má byť teda druhá mocnina prirodzeného čísla. Poďme sa pozrieť, štvorcom akého čísla by toto číslo mohlo byť. Je to párne číslo, takže to musí byť štvorcom niečoho párneho.

$(2n)^2 = 4n^2$, čo je príliš málo, nakoľko $n \geq 1$, a preto $18n - 10 > 0$.

Na druhej strane $(2n+6)^2 = 4n^2 + 24n + 36$, čo je zase vždy príliš veľa.

Preto platí buď $4n^2 + 18n - 10 = (2n+2)^2$ alebo $4n^2 + 18n - 10 = (2n+4)^2$. V prvom prípade dostávame

$$4n^2 + 18n - 10 = (2n+2)^2,$$

$$4n^2 + 18n - 10 = 4n^2 + 8n + 4,$$

$$10n = 14,$$

čiže n nevyšlo celé číslo. V druhom prípade máme

$$4n^2 + 18n - 10 = (2n+4)^2,$$

$$4n^2 + 18n - 10 = 4n^2 + 16n + 16,$$

$$2n = 26,$$

$$n = 13.$$

Pre $n = 13$ máme zlomok $\frac{50}{18} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$, ktorý je naozaj druhou mocninou. Žiadne ďalšie riešenie neexistuje.

Druhé riešenie – s deliteľnosťami a viac počítaním

Predpokladajme, že máme prirodzené n také, že daný zlomok je druhou mocninou nejakého racionálneho čísla. Keďže každé racionálne číslo sa dá zapísať ako zlomok, môžeme písať

$$\frac{4n-2}{n+5} = \left(\frac{a}{b}\right)^2,$$

kde a je nezáporné celé číslo, b je prirodzené. Navyše zlomok $\frac{a}{b}$ si môžeme zapísať v základnom tvare, teda môžeme požadovať, aby a a b boli nesúdeliteľné, čo sa nám môže neskôr hodiť. Dostali sme rovnicu s prirodzenými číslami, takže má zmysel zbaviť sa zlomkov a skúmať nejaké deliteľnosti.

$$b^2(4n-2) = a^2(n+5)$$

$$2b^2(2n-1) = a^2(n+5)$$

Môžeme si všimnúť, že ľavá strana je vždy párna, a tak aj pravá strana musí byť párna. Ak by n bolo párne, $n+5$ by bolo nepárne, takže a by muselo byť párne. Potom a^2 by bolo deliteľné 4 a (keďže $2n-1$ je nepárne) b^2 by bolo párne, a teda aj b by muselo byť párne. Čísla a aj b však nemôžu byť párne zároveň, pretože sme si vzali zlomok $\frac{a}{b}$ v základnom tvare. Preto n musí byť nepárne, teda tvaru $2k+1$ pre nejaké nezáporné celé k. Dosaďme toto vyjadrenie do rovnice a upravujme:

$$2b^2(4k+2-1) = a^2(2k+6),$$

$$b^2(4k+1) = a^2(k+3),$$

$$4kb^2 + b^2 = ka^2 + 3a^2,$$

$$4kb^2 - ka^2 = 3a^2 - b^2,$$

$$k(4b^2 - a^2) = 3a^2 - b^2,$$

$$k(2b-a)(2b+a) = 3a^2 - b^2.$$

Pre akékoľvek nenulové číslo platí, že ak delí jednu stranu rovnosti, potom delí aj druhú. Máme teda $2b-a \mid 3a^2-b^2$ a analogicky aj $2b+a \mid 3a^2-b^2$. Predpokladáme pritom, že $2b-a$ je nenulové ($2b+a$ nikdy nemôže byť 0).

Navyše nám platí, že b je nesúdeliteľné s číslami $2b+a$ aj $2b-a$, pretože ak by nejaké prvočíslo delilo b aj $2b \pm a$, delilo by $2b$ a tým pádom aj a, čo je spor s nesúdeliteľnosťou a a b. Preto ak $2b \pm a$ delí bx pre nejaké x, musí deliť aj x. S obomi deliteľnosťami teraz môžeme postupovať obdobne:

$$2b-a \mid 3a^2-b^2$$

$$2b-a \mid (3a^2-b^2) + 3a(2b-a)$$

$$2b-a \mid 6ab - b^2 = b(6a-b)$$

$$2b-a \mid (6a-b) + 6(2b-a) = 11b$$

$$2b-a \mid 11$$

$$2b+a \mid 3a^2-b^2$$

$$2b+a \mid (3a^2-b^2) - 3a(2b+a)$$

$$2b+a \mid -6ab - b^2 = b(-6a-b)$$

$$2b+a \mid (-6a-b) + 6(2b+a) = 11b$$

$$2b+a \mid 11$$

Vieme, že $b \geq 1$ a $a \geq 0$, takže $2b + a \geq 2$ a zároveň je to deliteľ 11, teda musí platiť $2b + a = 11$. Aj $2b - a$ je deliteľ 11 (tentokrát však môže byť aj záporný), takže $2b - a \in \{-11, -1, 1, 11\}$. Potom

$$4b = (2b - a) + (2b + a) = 11 + (2b - a) \in \{0, 10, 12, 22\},$$

$4b$ je kladné číslo deliteľné 4, teda jeho jediná možná hodnota je 12. Takže máme $b = 3$ a $a = 11 - 2b = 5$. Z vyjadrenia

$$k(4b^2 - a^2) = 3a^2 - b^2$$

máme

$$k = \frac{75 - 9}{36 - 25} = \frac{66}{11} = 6,$$

a teda $n = 2k + 1 = 13$. Uvedený postup však nemôžeme použiť v jednom špeciálnom prípade, a to v prípade, kedy $2b - a = 0$, pretože uvažované deliteľnosti by boli deliteľnosti nulou. To by však znamenalo, že $b = 1$ a $a = 2$, pretože a a b stále musia byť nesúdeliteľné. Zároveň by sme mali $k(4b^2 - a^2) = 0 = 3a^2 - b^2$, druhá rovnosť však pre $b = 1$ a $a = 2$ neplatí.

Žiadne nové riešenie sme teda nezískali a jediné riešenie úlohy je číslo $n = 13$.

2.8 Korisť Muži Sledovali

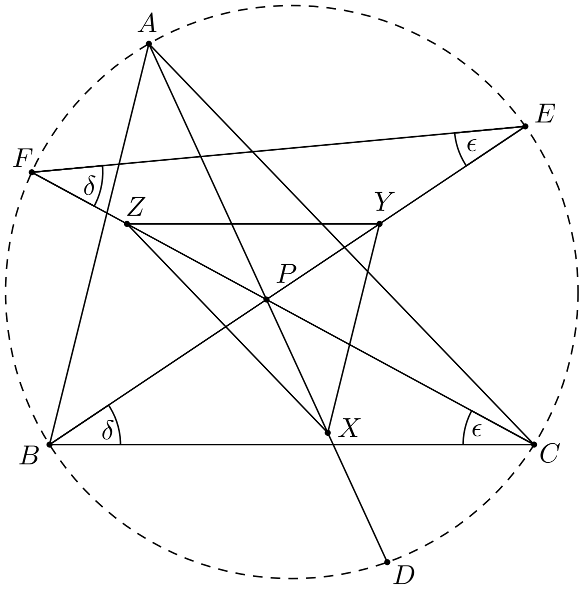
opravoval **Pedro**

Zadanie. *Ostávalo uloviť už len posledného mladého mamuta a činnosť mamutobijeckej ligy by bola korunovaná úspechom. Tento posledný sa však nesprával racionálne ako ostatné, ale bežal po kružnici. Aby ho lovci dobehli, rozhodli sa upustiť od svojich zásad a bežať po tetive. Bude to však stačiť? Podarí sa lovcom uloviť posledného mladého mamuta?*

Daný je trojuholník ABC s kružnicou k jemu opísanou. Ďalej vnútri trojuholníka ABC leží bod P. Priamky AP, BP a CP pretínajú kružnicu k postupne v bodoch D, E a F, pričom bod D je rôzny od bodu A, bod E rôzny od bodu B a bod F rôzny od bodu C. Na úsečke DP zvoľme bod X. Predpokladajme, že rovnobežka s priamkou AB vedená cez bod X pretína úsečku PE v jej vnútornom bode Y. Podobne predpokladajme, že rovnobežka s priamkou AC vedená cez bod X pretína úsečku PF v jej vnútornom bode Z. Dokážte, že štvoruholník EFZY je tetivový.

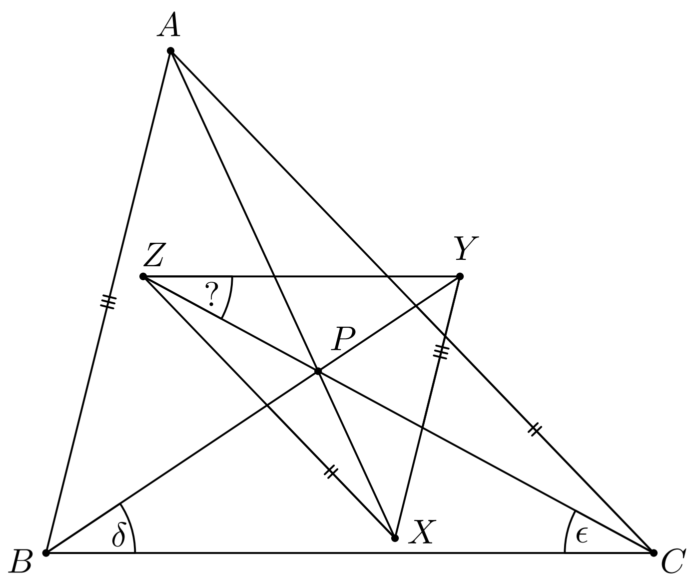
Riešenie

Prvým krokom je všimnúť si, že sa v úlohe môžeme veľmi ľahko zbaviť bodov D, E, F a pracovať už iba s trojuholníkom ABC a bodmi P, X, Y, Z. Ako to? Označme veľkosť uhla CBP ako δ a veľkosť uhla BCP ako ε. Keďže body B, C, E, F ležia na kružnici, môžeme využiť vetu o obvodovom uhle a uvidíme, že $|\sphericalangle CFE| = \delta$ a $|\sphericalangle BEF| = \varepsilon$.



Na to, aby $ZYEF$ bol tetivový, musí platiť šikovné kritérium na tetivovosť štvoruholníka, ktoré je spolu s obvodovými uhlami často najpraktickejším spôsobom, ako tetivovosť dokazovať alebo ju využívať. Kritérium je založené na fakte, že štvoruholník je tetivový práve vtedy, keď súčet protiľahlých uhlov dáva 180°, avšak v praxi sa ešte častejšie využíva iná forma tohto kritéria. Tá hovorí, že štvoruholník je tetivový práve vtedy, keď susedný uhol k niektorému z uhlov štvoruholníka má rovnakú veľkosť, ako jemu protiľahlý uhol (tomu uhlu zo štvoruholníka).

V kontexte našej úlohy dostaneme, že tetivovosť štvoruholníka $EFZY$ je ekvivalentná s $|\sphericalangle CZY| = |\sphericalangle BEF|$ a tiež s $|\sphericalangle BYZ| = |\sphericalangle CFE|$. To sa dá vďaka rovnostiam z prvého odstavca prepísať na $|\sphericalangle CZY| = \varepsilon$ a $|\sphericalangle BYZ| = \delta$. Wau! Takže máme vlastne dokázať, že priamka ZY je rovnobežná s priamkou BC (vďaka striedavým uhlom). Tým sme sa úspešne takmer zbavili celej kružnice a bodov D, E, F (okrem toho, že Z, Y stále musia byť také, aby ležali na úsečkách zo zadania).



V tomto zjednodušenom nastavení sa už iba treba trochu pohrať s rovnobežnosťami zo zadania, ktoré sme ešte stále nevyužili. Rovnobežnosť dvoch úsečiek, ktorých vrcholy sú tak pekne do kríža prepojené, ako v našom prípade cez bod P[5] (dokonca všetkých troch zainteresovaných dvojíc), je ekvivalentná s tým, že tie úsečky sú rovnoľahlé so stredom rovnoľahlosti P (v našom kontexte). Alebo, že trojuholníky tvorené stredom rovnoľahlosti a vrcholmi úsečiek sú rovnoľahlé. V tomto prípade chceme ukázať rovnoľahlosť trojuholníkov PYZ a PBC.

Využijeme rovnoľahlosť trojuholníkov PYX a PBA a trojuholníkov PZX a PCA, ktoré vyplývajú z rovnobežnosti priamok XY a BA a priamok XZ a CA. Z týchto plynú nasledovné rovnosti:

$$\frac{|PY|}{|PX|} = \frac{|PB|}{|PA|} \quad \text{a} \quad \frac{|PZ|}{|PX|} = \frac{|PC|}{|PA|}.$$

Vydelením týchto dvoch rovností dostávame:

$$\frac{|PY|}{|PZ|} = \frac{|PB|}{|PC|}.$$

Toto je presne vyjadrenie rovnoľahlosti úsečiek YZ a BC, čo sme chceli dokázať.

2.9 Korešpondenční Matematickí Seminaristi

opravoval **Tomáš**

Zadanie. *Neandertálci boli veľmi šikovní a cieľavedomí ľudia. Veď inak by sa im nepodarilo nájsť všetky mladé mamuty. My, riešitelia korešpondečného matematického seminára, sa však nemienime nimi nechať len tak ľahko zahambiť.*

A preto nájdeme všetky celé kladné čísla m, n, pre ktoré platí

$$n! + m! = m^n.$$

Riešenie

Máme rovnicu s celými číslami, takže sa oplatí pozrieť na nejaké deliteľnosti. Preto si ľavú stranu napíšeme ako súčin.

Ak $n < m$,

$$n!\left[1 + (n+1)(n+2)\cdots(m-1)m\right] = m^n.$$

Zátvorka $[1 + (n+2)\cdots m]$ má zvyšok 1 po delení m, takže je nesúdeliteľná s m, a teda aj s m^n. Zároveň táto zátvorka delí ľavú stranu, takže delí aj pravú stranu rovnosti. To je nejaké podozrivé a privádza nás to k nasledujúcemu *tvrdeniu* (rozmyslite si, že naozaj platí):

Ak nesúdeliteľné prirodzené čísla a, b spĺňajú $a \mid b$, tak $a = 1$.

Podľa tohto *tvrdenia* by musela byť zátvorka $[1+(n+2)\cdots m]$ rovná 1, ale zjavne je aspoň 2, takže tadiaľto cesta k riešeniam nevedie.

[5] To, že P sa nachádza medzi úsečkami, vyplýva z predpokladu zo zadania o polohe bodov Y a Z

Ak $n \geq m$,

$$m!\left(1+\frac{n!}{m!}\right)=m^n,$$

$$1\cdot 2\cdot\,\cdots\,\cdot(m-1)\cdot m\left(1+\frac{n!}{m!}\right)=m^n.$$

Ľavá strana je deliteľná číslom $(m-1)$, takže je aj pravá strana deliteľná $(m-1)$. Keďže $(m-1)$ je nesúdeliteľné s m^n, tak podľa *tvrdenia* $m-1=1$, teda $m=2$. Pôvodná rovnica má tvar

$$n!+2!=2^n,$$

$$n!=2^n-2=2(2^{n-1}-1).$$

Zátvorka $(2^{n-1}-1)$ je nepárna alebo rovná 0. Rovná 0 nie je, lebo $n!\neq 0$. Vidíme, že 2 sa vyskytuje v prvočíselnom rozklade pravej strany 1-krát. Preto $n!$ musí obsahovať 2 v prvočíselnom rozklade tiež len 1-krát. To sa stane len, keď $n\leq 3$. Vyskúšame všetky 3 možnosti a zistíme, že všetky riešenia sú

$$(n,\ m)=(2,\ 2):\qquad 2!+2!=4=2^2,$$

$$(n,\ m)=(3,\ 2):\qquad 3!+2!=8=2^3.$$

2.10 Konvergujúca Mamutia Šmakocinka

opravoval **Ákos**

Zadanie. *Neandertálci mali mamutov. Potom však všetkých mamutov ulovili a zabili. Preto my už mamutov nemáme. Zamerajme sa preto radšej na niečo, čo máme. Máme postupnosti reálnych čísel $a_0, a_1, \dots, a_{2020}$ a $b_1, b_2, \dots, b_{2020}$, pre ktoré platí pre každé $n\in\{0,1,\dots,2019\}$ buď*

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}\quad a\quad b_{n+1}=\frac{1}{2}-a_n,$$

alebo

$$a_{n+1}=2a_n^2\quad a\quad b_{n+1}=a_n.$$

Ak platí $a_{2020}\leq a_0$, tak potom aká je najväčšia možná hodnota výrazu $b_1+b_2+\dots+b_{2020}$?

Riešenie

Počas riešenia budeme nazývať $a_{i+1}=\frac{a_i}{2}$ ťah prvého typu, a $a_{i+1}=2a_i^2$ ťah druhého typu. Tak na začiatok si premyslime, že sa chceme zaoberať iba nezápornými postupnosťami $\{a_n\}_{n=0}^{2020}$. Teda oba možné kroky vyrobia z nezáporného a_i nezáporné a_{i+1} a krok typu dva vyrobí zo všetkého nezáporné číslo. Teda teraz keby sme mali nejaké začínajúce číslo $a_0<0$, tak ak niektorý z našich krokov by bol druhého typu, tak odtiaľ by sme mali nezápornú postupnosť, a teda platilo by $a_0<0\leq a_{2020}$, čo je pre nás nevyhovujúca postupnosť. Teda všetky ťahy by mali byť prvého typu, ale kvôli zápornosti a_0 by znova platilo $a_0<a_{2020}$. Teda nutne platí $a_0\geq 0$. Teraz si poďme rozobrať prípady:

1. Môžeme si všimnúť, že ak $a_0=\frac{1}{2}$, tak oba možné ťahy z neho spravia znovu $\frac{1}{2}$ a pripíše sa k našej sume 0 alebo $a_0=\frac{1}{2}$. Teda keď vždy pripíšeme $a_0=\frac{1}{2}$, dostaneme sumu 1010. Ideme si ukázať, že táto hodnota je maximálna dosiahnuteľná.

2. Ak $0\leq a_0\leq\frac{1}{2}$, tak aj $0\leq a_1\leq\frac{1}{2}$, a teda pre všetky i platí $0\leq a_i\leq\frac{1}{2}$, z čoho hneď vyplýva $0\leq b_i\leq\frac{1}{2}$, teda $\sum_{i=1}^{2020} b_i\leq 2020\cdot\frac{1}{2}=1010$.

3. Zostáva nám overiť prípad $a_0 > \frac{1}{2}$. Chceli by sme skonštruovať nejaký monovariant[6] pre našu postupnosť, ktorý sa bude dať používať pri neskorších odhadoch. Preto si definujeme funkciu $f : \{1, 2, \ldots, 2020\} \to \mathbb{R}$[7] nasledovne:

$$f(n) = b_1 + \cdots + b_n - \frac{n}{2} - a_n.$$

Pre túto funkciu, pre všetky rozumné n platí $f(n+1) \leq f(n)$:

a) Ak $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$ a $b_{n+1} = \frac{1}{2} - a_n$, tak

$$f(n+1) = b_1 + \cdots + b_n + b_{n+1} - \frac{n+1}{2} - a_{n+1} =$$

$$= f(n) + a_n + b_{n+1} - \frac{1}{2} - a_{n+1} = f(n) - a_{n+1} \leq f(n).$$

b) Ak $a_{n+1} = 2a_n^2$ a $b_{n+1} = a_n$, tak

$$f(n+1) = b_1 + \cdots + b_n + b_{n+1} - \frac{n+1}{2} - a_{n+1} =$$

$$= f(n) + a_n + b_{n+1} - \frac{1}{2} - a_{n+1} =$$

$$= f(n) + a_n + a_n - \frac{1}{2} - 2a_n^2 =$$

$$= f(n) - \frac{1}{2}(2a_n - 1)^2 \leq f(n).$$

Platí teda $f(2020) \leq f(2019) \leq f(2018) \leq \cdots \leq f(1)$, takže $f(2020) \leq f(1)$,

$$b_1 + \cdots + b_{2020} - 1010 - a_{2020} \leq b_1 - \frac{1}{2} - a_1,$$

$$b_1 + \cdots + b_{2020} \leq 1010 + a_{2020} + b_1 - \frac{1}{2} - a_1.$$

Podľa zadania platí $a_{2020} \leq a_0$. Ak $a_1 = \frac{a_0}{2}$ a $b_1 = \frac{1}{2} - a_0$, tak

$$b_1 + \cdots + b_{2020} \leq 1010 + a_0 + \frac{1}{2} - a_0 - \frac{1}{2} - \frac{a_0}{2} = 1010 - \frac{a_0}{2} \leq 1010.$$

V opačnom prípade, teda keď $a_1 = 2a_0^2$ a $b_1 = a_0$, platí

$$b_1 + \cdots + b_{2020} \leq 1010 + a_0 + a_0 - \frac{1}{2} - 2a_0^2 = 1010 - \frac{1}{2}(2a_0 - 1)^2 \leq 1010.$$

Hodnota výrazu $b_1 + \cdots + b_{2020}$ tak môže byť nanajvýš 1010 a túto hodnotu už môže dosiahnuť, napríklad pre tieto dve postupnosti:

$$a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_{2020} = 0 \quad \text{a} \quad b_1 = b_2 = \cdots = b_{2020} = \frac{1}{2},$$

$$a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_{2020} = \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad b_1 = b_2 = \cdots = b_{2020} = \frac{1}{2}.$$

[6] Monovariant je vlastnosť/hodnota, ktorá sa mení iba jedným smerom.

[7] Tento zápis značí iba to, že funkciu vyhodnocujeme iba v bodoch $1, 2, \ldots, 2020$