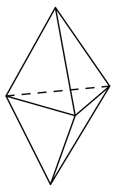
Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia

Úloha č. 1: *Koľko najmenej vrcholov môže mať mnohosten, ktorý má šesť stien?*

Riešenie: (opravoval Malic)

Komentár: Správne riešenie úlohy pozostáva z dvoch častí. Prvou je nájdenie mnohostena s najmenším počtom vrcholov a druhou je dôkaz, že neexistuje iný mnohosten s menším počtom vrcholov. Za prvú časť sa dali získať 4 body a za správnu druhú časť zvyšných 5 bodov.



Po chvíli skúšania nájdeme teleso, ktoré vzniklo zlepením dvoch rovnakých štvorstenov (viď obrázok). Toto teleso má 5 vrcholov. Potrebujeme ešte dokázať, že neexistuje šesťsten s počtom vrcholov $4, 3, 2$ alebo 1. Pre $3, 2$ a 1 si to skúste premyslieť sami, my sa budeme zaoberať otázkou existencie štvorvrcholového šesťstena. Žiadna stena nemôže byť štvoruholník, inak by všetky štyri vrcholy ležali v jednej rovine a nebolo by to priestorové teleso. Čiže všetky steny sú trojuholníky. Zoberme si dve z nich, ktoré sú spojené hranou. Tieto majú spolu už štyri vrcholy, preto všetky ďalšie hrany môžu byť len medzi nimi. Ale je tam vlastne len jedna dvojica nespojených vrcholov a keď tam dokreslím hranu, dostanem štvorsten. Ten má však trochu menej ako 6 stien. Najmenší počet vrcholov je teda 5.

Úloha č. 2: *Nájdite tri nepodobné trojuholníky, ktorých všetky strany aj výšky majú celočíselné dĺžky.*

Riešenie: (opravoval Kubo)

Našli ste veľa rôznych trojíc trojuholníkov, pre ktoré to platí. Najjednoduchšie bolo zaoberať sa len pravouhlými trojuholníkmi s celočíselnými stranami (a, b – odvesny, c – prepona; takéto trojuholníky sa volajú pytagorejské), lebo vtedy sú strany zároveň výškami a neceločíselná môže byť iba výška na stranu c. Veľkosť výšky v_c ľahko vypočítame pomocou obsahu trojuholníka:

$$S_\triangle = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2} \Longrightarrow v_c = \frac{a \cdot b}{c}$$

Takže stačí ak bude $a \cdot b$ deliteľné c. To môžeme ľahko dosiahnuť, ak daný trojuholník zväčšíme c-krát, potom bude $v_c = \frac{(a\cdot c)\cdot(b\cdot c)}{c \cdot c} = a \cdot b$ určite celé číslo. Takto dostaneme ľahko 3 nepodobné trojuholníky, ktoré vyhovujú zadaniu:

$$3, 4, 5 \Longrightarrow \mathbf{15}, \mathbf{20}, \mathbf{25}$$
$$5, 12, 13 \Longrightarrow \mathbf{65}, \mathbf{156}, \mathbf{169}$$
$$7, 20, 21 \Longrightarrow \mathbf{147}, \mathbf{420}, \mathbf{441}$$

Existujú samozrejme aj iné ako pravouhlé trojuholníky s celočíselnými stranami i výškami, napríklad trojuholník so stranami $25, 25, 30$ a výškami $24, 24, 20$.

Úloha č. 3: *Nájdite štvoruholník s obsahom*
a) $8,5$,
b) $8,25$,
ktorého vrcholy ležia v priesečníkoch štvorčekovej siete a žiadne jeho dve strany nie sú rovnobežné (obsah jedného štvorčeka je 1).

Riešenie: (opravovali Janka a Miki)

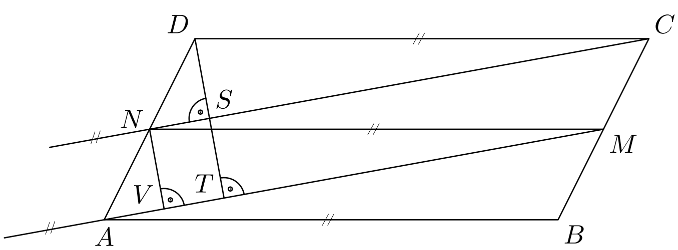
Komentár: Tento príklad mal takú klasickú formu, a síce časť a), ktorá sa dala ľahko vyriešiť a časť b), ktorá sa už nedala. Ako už tušíte, druhá časť bola oveľa tažšia (a teda viac bodovaná), lebo sa v nej vyžadovalo *dokázať*, že žiadne riešenie naozaj neexistuje. Hlavne ak výsledok bol už po chvíli skúšania a kreslenia intuitívne jasný, ale seriózna (taká fakt nespochybniteľná) úvaha nie a nie napadnúť `:-)` Mnohí z vás sa snažili popísať všetky možnosti vpisovania nejakého štvoruholníka do obdĺžnika resp. štvorca a potom od neho odčítať tie útvary, ktoré do štvoruholníka nepatria, iní skúšali rôzne spôsoby počítania obsahu cez trojuholníky (či už sčitovaním, alebo odčitovaním). Inými slovami, rozobrali rôzne možnosti, ako štvoruholník môže vyzerať a pre ne ukázali, že jeho obsah nemôže byť $8,25$. Drvivá väčšina svoj postup nedotiahla do konca, napríklad nezobrali do úvahy naozaj všetky možnosti, alebo nevysvetlili, že nimi rozobrané možnosti zahŕňajú všetky možné štvoruholníky. Tam sa strácali body. Treba povedať, že pri niektorých postupoch bolo treba rozobrať tóoľko možností, že bolo skoro nemožné spomenúť všetky.

Ako si Griša už všimol, časť a) sa riešila presne ako časť a) v 4. príklade minulej série. Pre tých, čo vzoráky hneď hodili do koša: vezmem ceruzku a skúšam :-) Našli sa aj takí, čo nakreslili 4-uholník s obsahom $6,5$ a prehlásili ho za $8,5$.(Ak ste chceli vyskúšať, či to prerátavame, tak hej.) A čo časť b)? V tých, čo si nevšimli, že druhá časť takýchto príkladov skoro nikdy nevyjde, skrslo podozrenie až po chvíli skúšania, ale potom už všetci stáli pred otázkami: Je to pravda? A ako to dokázať? Jeden spôsob je nejako zovšeobecniť a popísať tie prípady, čo sme (áno, aj ja) vyskúšali. Tu si bolo treba dať pozor, aby ste naozaj všetky možnosti prebrali, a patrične to vysvetlili. Ale keďže nikto nepovedal, že je jediný a navyše vyzerá komplikovane, skúsime ešte iný. Spásonosným sa ukáže pozorovanie, že *každý* štvoruholník v štvorcovej sieti sa dá uhlopriečkou rozdeliť na dva trojuholníky, ktorých vrcholy tiež ležia vo vrcholoch stvorčekovej siete. A to tak, že spojím ten vrchol, pri ktorom je najväčší uhol, s tým protiľahlým. (A to kvôli nekonvexným 4-uholníkom, aby to naozaj platilo pre *každý* štvoruholník.) Ešte z toho nič nevidno, ale keby sa nám podarilo dokázať, že obsah každého trojuholníka je polovica prirodzeného čísla (či už párneho, alebo nepárneho), tak by sme vyhrali, lebo sčítaním dvoch takýchto obsahov určite nedostaneme obsah $8,25$. Ako teda dokázať, že každý trojuholník má obsah takého pekného tvaru? Vezmeme si ľubovoľný trojuholník. Pre každú z jeho 3 strán si zistíme, či leží v štvorčekovej sieti (vodorovne alebo zvisle). Ak nie, tak ide šikmo, teda a štvorčekov doprava a b štvorčekov hore (pre nejaké celé čísla a, b). A my k tej strane doplníme (zvonku) pravouhlý trojuholník, ktorého prepona bude táto strana. Takto sme doplnili náš trojuholník na útvar, ktorého strany ležia na štvorčekovej sieti. Takže musí mať celočíselný obsah. A ľahko dorátame to, čo sme k nemu prilepili, lebo to sú pravouhlé trojuholníky. Ich obsah je polovica súčinu odvesien, čo je naozaj polovica prirodzeného čísla. Takže obsah trojuholníka je celé čislo mínus to, čo sme pridali a (čudujsasvete) to je tiež polovica prirodzeného čísla. A z toho vyplýva, že sčítaním obsahov dvoch trojuholníkov naozaj nemôžeme dostať obsah $8,25$.

Úloha č. 4: *V rovnobežníku $ABCD$ je M stred strany BC. Priamka DT je kolmá na priamku MA, pričom bod T leží na MA. Dokážte, že $|CT| = |CD|$.*

Riešenie: (opravovali Buggo a Peťo G.)

Táto úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi. Najprv si ukážeme ten, ktorý sa vyskytoval vo väčšine správnych riešení.

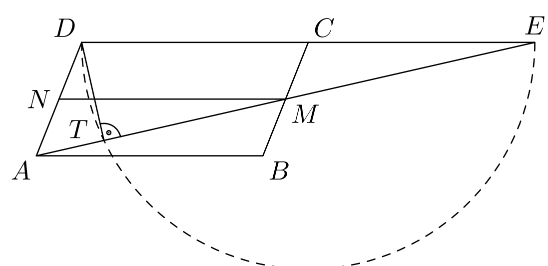


Najprv si stred strany AD označíme N. Úsečka NM je potom strednou priečkou rovnobežníka, teda je rovnobežná so základňou AB. Trojuholníky ABM a NMC sú zhodné podľa vety *sus* ($|AB| = |NM|$; $|BM| = = |MC|$; $|\sphericalangle ABM| = |\sphericalangle NMC|$). Preto $|\sphericalangle BAM| = |\sphericalangle MNC|$ a priamky NC a AM sú rovnobežné.

Priesečník NC a DT označme S. Z bodu N veďme kolmicu na AM, ktorá pretne AM v bode V. Trojuholníky AVN a NSD majú rovnaké vnútorné uhly a $|AN| = |ND|$, čiže sú zhodné podľa vety *usu*. Preto aj $|NV| = |DS|$. Keďže priamky NC a AM sú rovnobežné, tak $|NV| = |ST|$. Potom aj $|ST| = |DS|$. To znamená, že v trojuholníku DTC je úsečka SC výškou aj ťažnicou. To ale znamená, že tento trojuholník je rovnoramenný so základňou DT. Z toho vyplýva, že $|DC| = |TC|$, ČBTD.

Uvádzame aj ďalšie, o trochu trikovejšie riešenie:

Označme si E prienik priamok DC a AM. Keďže trojuholník AED je podobný s AMN s koeficientom podobnosti 2, bude $|DE| = 2 \cdot |DC|$. To znamená, že bod C je v strede DE. Zostrojme kružnicu k so stredom v bode C a polomerom DC; nech E je jej priesečník s priamkou CD rôzny od D. Táto kružnica je Tálesovou kružnicou nad priemerom DE, preto na nej leží aj bod T. Takže $|CT| = |CD|$.



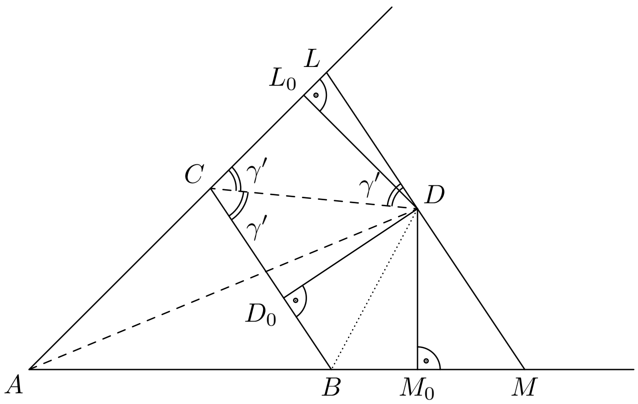
Úloha č. 5: *Os vnútorného uhla α a os vonkajšieho uhla γ trojuholníka ABC sa pretínajú v bode D. Bodom D vedieme rovnobežku so stranou BC, ktorá pretne strany AC a AB postupne v bodoch L a M. Určte dĺžku $|LM|$, pokiaľ viete, že $|LC| = 5$ a $|BM| = 7$.*

Riešenie: (opravovali Čermo a Hanka)

V zadaní tohto príkladu sa vyskytla malá chybička. Priamka prechádzajúca bodom D, rovnobežná so stranou BC, samozrejme nikdy nepretne strany trojuholníka ABC, ale iba priamky, na ktorých ležia. Ešte pred vlastným dôkazom si treba správne spomenúť na definíciu vonkajšieho uhla, ktorý je doplnkom daného uhla trojuhloníka do $180°$. Takže celá situácia vyzerá podľa obrázka a my sa môžeme pustiť do riešenia problému.

Najprv dokážeme, že bod D je priesečníkom osí uhlov MBC a LCB a osi uhla BAC. Budeme postupovať tak, že si zostrojíme bod D ako priesečník osí uhla MBC a BAC. Ďalej priesečníky kolmíc z bodu D na stranu BC a polpriamky AB a AC označíme D_0, M_0, L_0. Zjavne platí $|DM_0| = |DL_0|$ (vzdialenosť bodu osi uhla od ramien tohto uhla je rovnaká). Potom jednoducho nahliadneme, že $\triangle CDD_0 \cong \triangle CDL_0$, čiže $|DM_0| = |DL_0| = |DD_0|$ a tiež $|\sphericalangle DCD_0| = |\sphericalangle DCL_0|$.

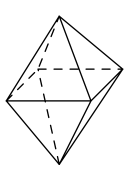
Priamku LM volíme rovnobežnú s BC (podľa zadania). Teraz uhly BCD a CDL sú striedavé, takže $|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle CDL|$ a teda trojuholník CDL je rovnoramenný a $|CL| = |DL|$. Rovnakú úvahu použijeme pre trojuholník BMD a dostaneme $|BM| = |DM|$. Teda $|ML| = |DM| + |DL| = 7 + 5 = 12$. To je všetko.

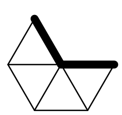


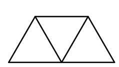
Úloha č. 6: *Nakreslite všetky rôzne súvislé plášte pravidelného osemstena. Plášte, ktoré môžeme dostať otočením alebo prevrátením, pokladáme za rovnaké.*

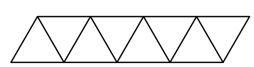
Riešenie: (opravovali Aňa a Janči K.)
Niektorým z vás robil problém tvar pravidelného osemstena. Nuž, je to teleso s ôsmymi rovnakými stenami, ktoré majú tvar pravidelného n-uholníka (takéto teleso existuje len jedno, s trojuholníkovými stenami). Čiže osemsten si môžeme predstaviť ako dva štvorboké ihlany zlepené podstavou tak, ako na obrázku.
Poďme hľadať plášte tohto osemstena. Uvedomme si ešte, že v každom vrchole osemstena sa stretávajú práve štyri trojuholníky, a teda v plášti musí platiť, že v každom vrchole sa stretávajú maximálne štyri trojuholníky. A ešte si dokážeme, že každý plášť musí obsahovať takýto útvar (budeme ho nazývať aj vejár). Skúsme vytvoriť plášť, ktorý by takýto útvar nemal. Spojme tri trojuholníky, vznikne takýto útvar. Na hrubo vyznačenú čiaru už nemôžeme pridať ďalší trojuholník, lebo by vznikol nežiadúci útvar. Ak by sme tento útvar doplnili do trojuholníka, tak sme skončili, pretože ak doplníme ďalší trojuholník, máme nežiaduci útvar. A postupným dokresľovaním ďalších trojuholníkov vznikne jediný útvar zložený z ôsmych trojuholníkov, ktorý neobsahuje nežiaduci útvar, ale ani nie je plášťom pravidelného osemstena.
Plášte osemstena budeme hľadať tak, že k vejáru (reprezentujúcemu aj plášť ihlana bez podstavy) dokreslíme ešte štyri trojuholníky. Dve hrany vejára sú vyznačené hrubo, k nim už nemôžeme pridať ďalšie trojuholníky. Čiže zostávajú štyri hrany k, l, m, n, ku ktorým môžeme pridať trojuholníky. Tieto trojuholníky môžeme pridať týmito možnosťami: po jednom trojuholníku ku hrane, dvojica trojuholníkov k jednej hrane a k dvom hranám po jednom trojuholníku, k dvom hranam dvojica trojuholníkov, trojica trojuholníkov k jednej hrane a k jednej hrane jeden trojuholník alebo posledná možnosť štvorica trojuholníkov k jednej hrane. Rozoberme postupne tieto možnosti:

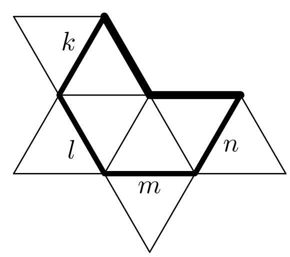
a) Možnosť $1 + 1 + 1 + 1$. Tu je jednoznačne jedno riešenie, viď obrázok.





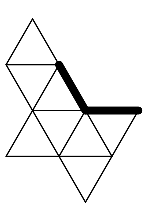


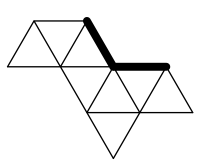


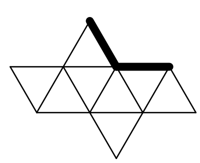


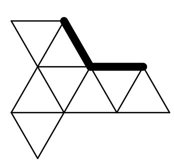
1

b) Možnosť $2 + 1 + 1 + 0$. Dvojicu trojuholníkov má význam pridať iba k hrane k a l, ďalšie možnosti by boli symetrické. Taktiež si treba uvedomiť, že ak je dvojica zavesená k nejakej hrane, tak na jednej z vedľajších hrán nebude trojuholník. (Premysli!) Možnosti sú teda štyri, dve sú z umiestnenia dvojice na k alebo l, dve ku každej z nich z toho, z ktorej strany bude chýbať trojuholník.

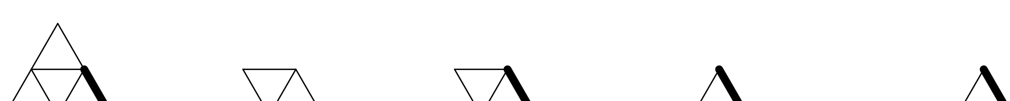

2


3

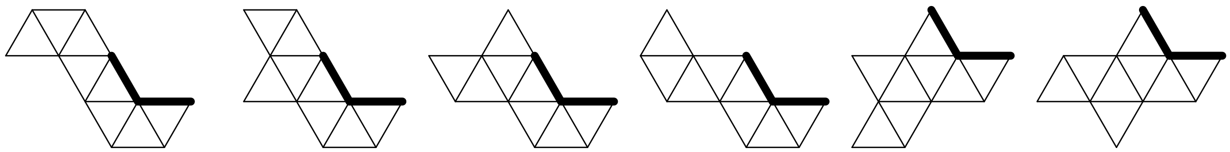

4


5

c) Možnosť $3+1+0+0$. Analogicky ako po b) aj tu má význam dať trojicu len ku k a l kvôli symetrii. Trojica sa môže spájať s vejárom troma svojimi trojuholníkmi a potom pozícia pre štvrtý trojuholník je presne určená. Možností je šesť.

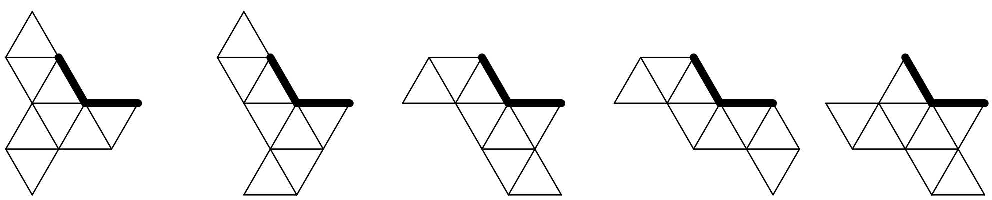


d) Možnosť $4 + 0 + 0 + 0$. Štvorica je vlastne druhý vejár. Čiže spájame dva vejáre tiež cez k a l. Nezhodných takýchto plášťov je šesť.



12 13 14 15 16 17

e) Možnosť $2 + 2 + 0 + 0$. Zavesme dvojicu trojuholníkov na hranu k (ako v prvých dvoch obrázkoch). Na hrane n už dalšie trojuholníky nebudú, vzniknú teda možnosti 18 a 19. Zavesme dvojicu trojuholníkov na hranu k tak, aby druhý trojuholník v dvojici bol z druhej strany (viď dalšie dva obrázky). Žiaden trojuholník nebude na hrane l. Vzniknú možnosti 20 a 21. Doteraz sme rozobrali možnosti, keď na hrane k je dvojica. Nech teraz na hrane k nie je dvojica. Ak by sme rozoberali možnosti s dvojicou na hrane n, vznikla by po preklopení jedna z predchádzajúcich možností. Nuž má význam prešetriť len dvojice, ktoré sú na hranách l a m, je tu teda jedna možnosť.

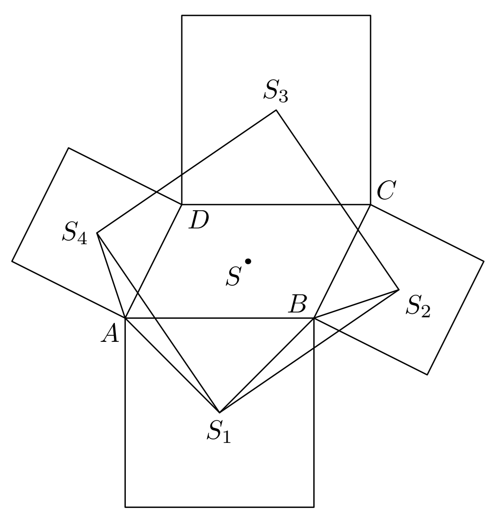


18 19 20 21 22

Doteraz nájdené plášte sú očíslované 1 až 22. Náš algoritmus hľadania plášťov však nezaručuje, že tu nie sú zhodné plášte. Pozrime sa na ne ešte raz a vidíme, že sú zhodné tieto plášte: 9 a 5; 10,11 a 2; 14 a 3; 16 a 1; 17 a 4; 18 a 5; 19 a 8; 20 a 13; 21 a 15; 22 a 1. Čiže osemsten má 11 plášťov a sú to tieto: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 15$.

Úloha č. 7: *Nad každou stranou rovnobežníka zostrojíme štvorec (zvonku). Dokážte, že*
a) štvoruholník určený stredmi týchto štvorcov je tiež štvorec.
b) uhlopriečky nového štvorca prechádzajú priesečníkom uhlopriečok pôvodného rovnobežníka.

Riešenie: (opravovali Erika a Mišo R.)
Bez ujmy na všeobecnosti nech $|AB| \geq |BC|$.

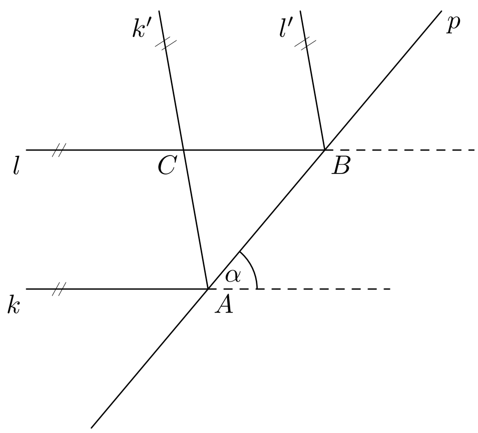


a) Označme vrcholy rovnobežníka A, B, C, D a stredy štvorcov pripísaných k stranám S_1, S_2, S_3, S_4 (viď obrázok). Nech $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BCD| = \alpha$, potom $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADC| = 180° - \alpha$. Teda $|\sphericalangle S_1AS_4| = |\sphericalangle S_2CS_3| = 45° + 45° + \alpha = 90° + \alpha$. Takisto $|\sphericalangle S_4DS_3| = |\sphericalangle S_1BS_2| = 360° - 45° - 45° - (180° - \alpha) = 90° + \alpha$. Keďže $|S_1A| = |S_1B|$ a $|AS_4| = |BS_2|$, potom trojuholníky S_4AS_1 a S_1BS_2 sú zhodné podľa vety *sus*. A teda $|S_4S_1| = |S_1S_2|$. Analogicky dokážeme aj $|S_2S_3| = |S_3S_4| = |S_4S_1|$. Ešte musíme ukázať, že uhol $|\sphericalangle S_4S_1S_2|$ je pravý; zatiaľ sme len dokázali, že $S_1S_2S_3S_4$ je kosoštvorec. Vieme, že $|\sphericalangle AS_1B| = 90°$. Taktiež $|\sphericalangle AS_1S_4| = |\sphericalangle BS_1S_2|$, teda $|\sphericalangle S_4S_1S_2| = |\sphericalangle AS_1S_2| - |\sphericalangle AS_1S_4| = 90° + |\sphericalangle BS_1S_2| - |\sphericalangle AS_1S_4| = 90°$. Podobne to dokážeme aj pre uhly pri vrcholoch S_2, S_3, S_4. Čiže útvar $S_1S_2S_3S_4$ musí byť štvorec (má 4 strany rovnakej dĺžky, ktoré zvierajú uhol 90°).

b) O rovnobežníkoch vieme, že sú stredovo súmerné podľa priesečníka ich uhlopriečok. Keď nad každou zo strán zostrojíme štvorec, tento útvar zostane stredovo súmerný podľa toho istého stredu (premyslite si to). Teda bod S_1 je stredovo súmerný s bodom S_3 podľa stredu S. Tak isto to platí aj pre body S_2 a S_4. Tým pádom sa S_1S_3 a S_2S_4 pretínajú v bode S, čo je aj priesečník uhlopriečok rovnobežníka.

Úloha č. 8: *Vezmite si krajčírsky meter a vystrite ho na zem. Potom ho preložte pozdĺž niektorej priamky prechádzajúcej jeho stredom tak, aby prekrývajúce sa časti krajčírskeho metra vytvorili trojuholník. Zistite, pre ktorú z týchto priamok bude mať trojuholník najmenší obsah.*

Riešenie: (opravovali Miťo a Pišta)



Majme priamku p pretínajúcu meter pod uhlom α. Táto priamka rozdeľuje meter na dve časti. Preložením rozumieme zobrazenie jednej z týchto častí osovou súmernosťou podľa danej priamky p. Budeme sa zaoberať iba prípadmi, kedy po preložení prekrývajúce sa časti metra vytvoria trojuholník ABC. Všimnime si, že bod $A \in p \cap k$, bod $B \in p \cap l$ a bod $C \in k' \cap l$. Keďže body B a C ležia na priamke l a bod A na priamke k rovnobežnej s l, výška na stranu BC je rovná vzdialenosti priamok k, l. Obdobne to platí pre výšku na stranu AC, pretože body A a C ležia na k' a B leží na l'. Z toho dostávame $v_a = v_b = d$. Keďže platí $S_{\triangle ABC} = 1/2 \cdot a \cdot v_a$ a výška je konštantná, obsah bude najmenší, ak bude a minimálne. Body B, C ležia na dvoch rovnobežných priamkach l', k' a preto z pytagorovej vety vyplýva, že ich vzdialenosť bude najmenšia, ak budú ležať na kolmej spojnici týchto priamok a potom $|BC| = d$. Preto $BC \perp k'$ a teda aj $k' \perp l$ a $AC \perp BC$. Riešením je pravouhlý trojuholník ABC, ktorý vznikne preložením metra podľa priamky p, zvierajúcej s metrom uhol 45°.

Iné riešenie:
Dokážeme najprv, že trojuholník ABC je vždy rovnoramenný. Spravíme to dvomi spôsobmi:

1) Vieme, že $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_b$. Dokázali sme, že platí $v_a = v_b$, preto aj $a = b$.

2) Z toho, že p je osou súmernosti pre pôvodnú a preloženú polohu jednej časti metra, vyplýva, že $|\sphericalangle CAB| = \alpha$. Zároveň je uhol ABC striedavý s uhlom, pod ktorým priamka p pretína meter, vďaka čomu $|\sphericalangle ABC| = \alpha = |\sphericalangle CAB|$.

Označme teraz po rade päty výšok v_a, v_b ako X, Y a $|\sphericalangle ACX| = |\sphericalangle BCY| = \gamma$. Tu si všimnime, že ak je ABC ostrouhlý, tak päty výšok ležia vnútri jeho strán a uhly ACX a BCY označujú ten istý vnútorný uhol pri vrchole C. Ak je však trojuholník ABC tupouhlý, uhly ACX a BCY nie sú totožné, i keď ich veľkosť sa rovná $180° - |\sphericalangle ACB|$. Vyjadrením z trojuholníka AXC dostávame $|AC| = d/\sin\gamma$, z trojuholníka BYC máme $|BC| = d/\sin\gamma$.

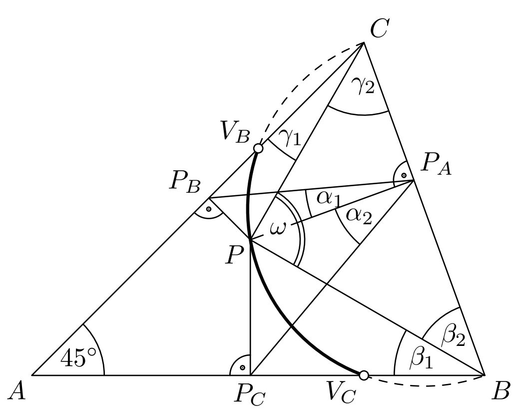
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC| \cdot \sin\gamma = \frac{d}{\sin\gamma} \cdot \frac{d}{\sin\gamma} \cdot \sin\gamma = \frac{d^2}{\sin\gamma}$$

Keďže d je pre rôzne preloženia toho istého metra rovnaké, minimalizáciu obsahu dosiahneme maximalizáciou funkcie $\sin\gamma$. Keďže γ je uhol v trojuholníku, leží v intervale $(0°, 180°)$ a $\sin\gamma$ má jediné maximum v $\gamma = 90°$. Získavame rovnaký výsledok — pravouhlý trojuholník ABC.

Komentár: Ako sme videli, úloha sa dala dokázať aj pomerne jednoduchou úvahou, ktorá stála iba na dvoch tvrdeniach.Prvé je, že vzdialenosť bodov B a C, respektíve A a C je najmenšia, ak je spojnica týchto bodov kolmá na okraje metra a druhé, že veľkosť dvoch výšok trojuholníka sa rovná šírke metra. Aj keď sa tieto tvrdenia môžu niekomu zdať zrejmé, za ich nezdôvodnenie ste mohli stratiť pomerne veľa bodov. Tak isto ste o niekoľko bodov mohli prísť vyhlásením rovnoramennosti trojuholníka za zrejmú, ak ste ju v riešení využili.

Úloha č. 9: *Je daný ostrouhlý trojuholník ABC s $|\sphericalangle CAB| = 45°$. Nájdi vnútri tohto trojuholníka množinu bodov P takých, že pre päty P_A, P_B, P_C kolmíc z bodu P na strany BC, CA, AB platí $|\sphericalangle P_BP_AP_C| = 45°$.*

Riešenie: (opravovali Rúža a Tomáš L.)



Nech bod P je ľubovoľný taký, že leží vnútri trojuholníka ABC a pre päty P_A, P_B, P_C kolmíc z bodu P na strany BC, CA, AB platí $|\sphericalangle P_BP_AP_C| = 45°$. Označme si uhly α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2, ω ako na obrázku. Zrejme uhly PP_BC, PP_AC, PP_AB, PP_CB sú pravé a platí $\alpha_1 + \alpha_2 = 45°$. Pozrime sa na štvoruholníky PP_ACP_B a PP_CBP_A. Oba sú tetivové, lebo v oboch je súčet protiľahlých uhlov rovný 180° ($|\sphericalangle PP_BC| + |\sphericalangle PP_AC| = |\sphericalangle PP_AB| + |\sphericalangle PP_CB| = 90° + 90° = 180°$). Čiže im obom môžeme opísať kružnicu. Vezmime si kružnicu opísanú štvoruholníku PP_ACP_B. Uhly α_1, γ_1 sú v tomto štvoruholníku obvodovými uhlami nad tetivou P_BP, čiže platí $\alpha_1 = \gamma_1$. Keď si vezmeme kružnicu opísanú štvoruholníku PP_CBP_A, obdobne zistíme, že $\alpha_2 = \beta_1$. Keďže $\alpha_1 + \alpha_2 = 45°$, tak aj $\gamma_1 + \beta_1 = 45°$.

Pre súčet vnútorných uhlov v trojuholníku ABC platí:

$$\begin{aligned} |\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BCA| &= 180° \\ 45° + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 &= 180° \\ \beta_2 + \gamma_2 &= 90° \end{aligned}$$

Pre súčet vnútorných uhlov v trojuholníku PBC platí:

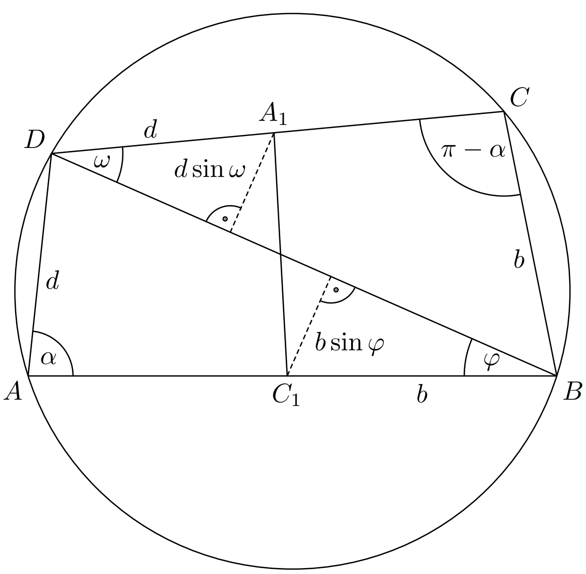
$$\begin{aligned}\beta_2 + \gamma_2 + \omega &= 180^\circ \\ \omega &= |\sphericalangle CPB| = 90^\circ\,.\end{aligned}$$

Teda bod P leží na Tálesovej kružnici zostrojenej nad priemerom BC okrem bodov B, C, lebo pre tie neplatí $\omega = 90^\circ$. Keďže bod P leží vnútri trojuholníka ABC, P leží na tom oblúku Tálesovej kružnice, ktorý je vnútri trojuholníka ABC. Nazvime tento oblúk T. Oblúk T je ohraničený pätami výšok V_B, V_C (päty výšok vedených z vrcholov B, C na strany AC, AB). V prípade, že strany trojuholníka nepatria jeho vnútru (čo je všeobecne zaužívaná definícia vnútra), body V_B, V_C nepatria oblúku T. V opačnom prípade, keď sa pod vnútrom trojuholníka myslí celý trojuholník aj so stranami, body V_B, V_C patria oblúku T.
Na to, aby sme mohli povedať, že oblúk T je hľadaná množina bodov P, musíme ešte dokázať, že pre ľubovoľný bod P patriaci oblúku T platí $|\sphericalangle P_BP_AP_C| = 45^\circ$. Dôkazom je obrátený postup predošlých úvah a výpočtov. (Treba si uvedomiť, že postup sa naozaj dá obrátiť, teda že všetky tvrdenia v úvahách a úpravy vo výpočtoch boli ekvivalentné.) Tým sme ukázali, že hladanou množinou bodov P je oblúk T.
Poznámka na záver: Keďže trojuholník ABC je ostrouhlý, tak päty výšok V_B, V_C ležia vnútri strán trojuholníka ABC (mimo jeho vrcholov). Čiže prienik Tálesovej kružnice zostrojenej nad stranou BC s vnútrom trojuholníka ABC obsahuje nekonečne veľa bodov a oblúk T nie je prázdna množina bodov.

Komentár: Väčšina z vás si neuvedomila, že keď má nájsť množinu bodov spĺňajúcich podmienku zo zadania, tak nestačí ukázať, že ak nejaký bod spĺňa danú podmienku, tak potom patrí do nejakej množiny T (ak pre ľubovolný bod P ležiaci vnútri trojuholníka ABC platí $|\sphericalangle P_BP_AP_C| = 45^\circ$, tak potom P leží na oblúku T). Aby ste mohli celú množinu T prehlásiť za riešenie, musíte ešte ukázať, že ľuboľný bod z množiny T spĺňa danú podmienku (pre ľubovoľný bod P ležiaci na oblúku T platí $|\sphericalangle P_BP_AP_C| = 45^\circ$). Ďalšia častá chyba bola, že ste prehlásili za hľadanú množinu prienik Tálesovej kružnice (nad stranou BC) s trojuholníkom ABC. Problém je v tom, že do prieniku patria aj body B, C, ktoré nevyhovujú danej podmienke ($|\sphericalangle P_BP_AP_C| = 45^\circ$). Viacerým z vás nebolo zrejmé, čo sa myslí pod pojmom vnútro trojuholníka ABC. Ak vám niečo nie je jasné, radšej sa opýtajte nás (najlepšie prostredníctvom e-mailu) alebo svojho učiteľa matematiky a prípadne v riešení uveďte definíciu daného pojmu (ktorá by mala byť v súlade so všeobecne zaužívanou definíciou). V tomto prípade sme uznávali oba možné prístupy k vnútru trojuholníka; v budúcnosti sa držte toho, že body ležiace na stranách trojuholníka nepatria do jeho vnútra.

Úloha č. 10: *Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník. Body C_1 a A_1 sú zvolené na polpriamkach BA a DC tak, že platí $|DA| = |DA_1|$ a $|BC| = |BC_1|$. Dokážte, že uhlopriečka DB pretína úsečku A_1C_1 v jej strede.*

Riešenie: (opravoval Peťo N.)



Kľúčovým v tejto úlohe bolo uvedomiť si jednu triviálnu, ale nie do očí bijúcu vec. Tou je, že ak sú body A_1C_1 v rôznych polrovinách určených priamkou BD (a to sú), tak uhlopriečka BD prechádza stredom úsečky A_1C_1 práve vtedy, ak sú body A_1 a C_1 rovnako vzdialené od priamky BD (dobre si rozmyslite, prečo to tak je). Označme $|BC| = |BC_1| = b$, $|DA| = |DA_1| = d$, $|\sphericalangle ABD| = \varphi$, $|\sphericalangle CDB| = \omega$ a $|\sphericalangle BAD| = \alpha$. Vďaka tetivovosti štvoruholníka $ABCD$ platí $|\sphericalangle BCD| = 180^\circ - \alpha$ a vzdialenosť bodu C_1 (resp. A_1) od priamky BD je $b\sin\varphi$ (resp. $d\sin\omega$) – a to bez ohľadu na to, či je uhol φ (resp. ω) ostrý alebo nie. Stačí nám teda dokázať rovnosť $b\sin\varphi = d\sin\omega$. Tú ale okamžite dostávame zo sínusových viet v trojuholníkoch ABD a CDB s využitím známeho vzťahu $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$.

$$\frac{d}{\sin\varphi} = \frac{|BD|}{\sin\alpha} = \frac{|BD|}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{b}{\sin\omega} \implies d\sin\omega = b\sin\varphi\,.$$

Tým je úloha vyriešená.

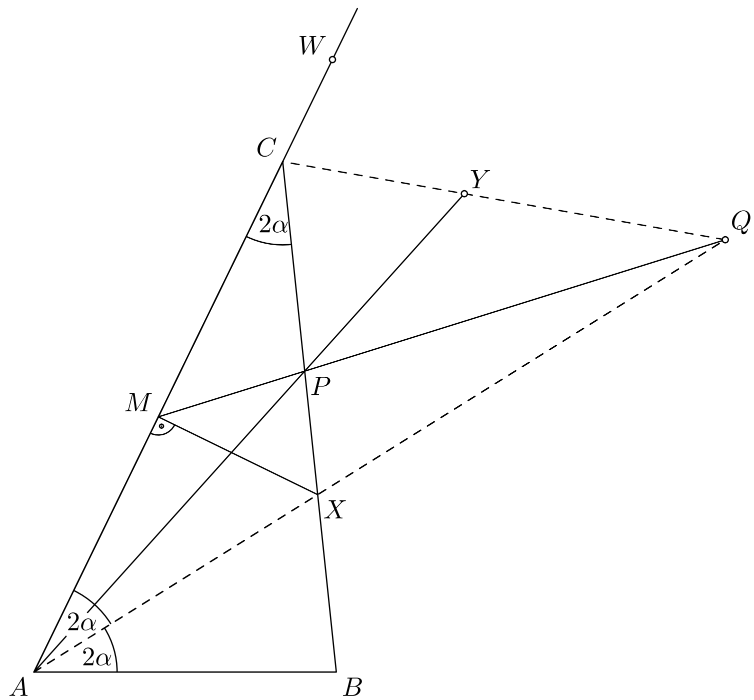
Komentár: Úloha sa dala vyriešiť aj bez použitia vzdialeností bodov A_1 a C_1 od priamky BD len pomocou sínusových viet. Takisto aj bez akýchkoľvek sínusových viet. Mnohí ste si však neuvedomili, že obrázok môže vyzerať aj inak. Úsečka A_1C_1 vôbec nemusí pretínať uhlopriečku BD v jej vnútri, ale len v jej predĺžení. Potom majú niektoré vami spomínané uhly inú veľkosť, i keď samotný dôkaz je veľmi podobný. Za to ste viacerí zaplatili jedným bodom.

Poznámka: V zadaní bola menšia nepresnosť. Namiesto slova *uhlopriečka BD* malo byť napísané *priamka BD*. Pod uhlopriečkou sa zvykne rozumieť iba úsečka, pričom priamka BD môže pretínať úsečku A_1C_1 aj mimo štvoruholníka $ABCD$. Na túto skutočnosť upozornil riešiteľ *Juraj Zemianek*, za čo mu patrí pochvala.

Úloha č. 11: *Nech Q je stred pripísanej kružnice k trojuholníku ABC, ktorá sa dotýka zvnútra strany BC. Nech M je stred strany AC a P priesečník MQ a BC. Dokážte, že $|AB| = |BP|$, ak $|\sphericalangle BAC| = 2 \cdot |\sphericalangle ACB|$.*

Riešenie: (opravoval Rado)

Riešenie podľa Fera Simančíka. Označme $\alpha = |\sphericalangle ACB|/2$. Ďalej označme W ľubovoľný bod na polpriamke opačnej k CA, bod X ako priesečník AQ a BC a bod Y ako priesečník CQ a AP. Bod Q je stred pripísanej kružnice k trojuholníku ABC k strane BC, musí preto ležať na osi uhlov BAC a WCB. Teda platí



$$\begin{aligned} |\sphericalangle CAQ| &= \frac{1}{2}|\sphericalangle CAB| = 2\alpha \\ |\sphericalangle BCQ| &= \frac{1}{2}|\sphericalangle BCW| = \frac{180^\circ - |\sphericalangle ACB|}{2} = \\ &= 90^\circ - \alpha\,. \end{aligned}$$

Ďalej z trojuholníka AQC máme

$$|\sphericalangle CQA| = 180^\circ - |\sphericalangle ACQ| - |\sphericalangle CAQ| = 90^\circ - 3\alpha\,.$$

Zo sínusovej vety pre trojuholník CXQ vyplýva

$$\frac{|QX|}{|CX|} = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ - 3\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\cos 3\alpha}\,.$$

Trojuholník AXC je rovnoramenný, teda $|AX| = |CX| \implies \frac{|QX|}{|AX|} = \frac{|QX|}{|CX|} = \frac{\cos\alpha}{\cos 3\alpha}$. Priamky AY, QM, CX sa pretínajú v jednom bode (P) a keďže sú priečkami v trojuholníku AQC, platí pre ne Cevova veta:

$$\frac{|MA|}{|CM|} \cdot \frac{|XQ|}{|AX|} \cdot \frac{|YC|}{|QY|} = 1 \implies \frac{|QY|}{|YC|} = \frac{|XQ|}{|AX|} = \frac{\cos\alpha}{\cos 3\alpha}\,,$$

pričom sme využili, že $|MA| = |CM|$. Ďalej zo sínusovej vety pre trojuholník AQC platí, že

$$\frac{|AQ|}{|AC|} = \frac{\sin\sphericalangle ACQ}{\sin\sphericalangle AQC} = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ - 3\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\cos 3\alpha} = \frac{|QY|}{|YC|}\,,$$

teda AY je osou uhla CAQ. Preto $|\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle PAX| = |\sphericalangle CAX|/2 = \alpha$. Potom platí

$$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle ACP| + |\sphericalangle CAP| = 3\alpha = |\sphericalangle PAX| + |\sphericalangle XAB| = |\sphericalangle PAB| \implies |PB| = |AB|\,.$$

V trojuholníku ABC platí $6\alpha < 180^\circ \implies \alpha < 30^\circ$, teda všetky výrazy v menovateľoch zlomkov boli nenulové. Dokázali sme, že trojuholník ABP je rovnoramenný. Q.E.D.

Úloha č. 12: *Uvažujme $2n$ rôznych prirodzených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ menších ako $n^2 + 1$ ($n > 2$). Dokážte, že nejaké tri z rozdielov $a_i - a_j$ (pre všetky možné $i \neq j$) sú rovnaké.*

Riešenie: (opravoval Foto)

Bez ujmy na všeobecnosti nech $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2n}$. Trik je v tom, že nebudeme skúmať existenciu troch rovnakých rozdielov medzi všetkými možnými, ale len v podmnožine rozdielov typu $a_{i+1} - a_i$ ($1 \leq i < 2n$). Ďalej použijeme dôkaz sporom. Predpokladajme, že medzi rozdielmi typu $a_{i+1} - a_i$ sú najviac dva rovnaké. Potom súčet týchto rozdielov vieme zdola ohraničiť takto:

$$\begin{aligned} (a_{2n} - a_{2n-1}) + (a_{2n-1} - a_{2n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) &\geq 1 + 1 + 2 + 2 + \cdots + (n-1) + (n-1) + n \\ a_{2n} - a_1 &\geq n \cdot (n-1) + n \\ a_{2n} &\geq n^2 + a_1 \end{aligned}$$

Keďže a_1 je prirodzené číslo, dostávame $a_{2n} \geq n^2 + 1$, čo je spor so zadaním. Preto nejaké tri z týchto rozdielov musia byť rovnaké.

Úloha č. 13: *Dokážte, že pre kladné reálne čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ $(a_{n+1} = a_1)$ platí nerovnosť*

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k + a_{k+1}} \geq \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Riešenie: (opravoval Tomáš)
Ukážeme si jedno pekné a trochu všeobecnejšie tvrdenie (podľa *Víťa Kalu*).

Nech pre a_1, a_2, …, a_n, b_1, b_2, …, $b_n \in \mathbb{R}^+$ platí $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \stackrel{(*)}{=} b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ (zamyslite sa nad tým, aká slabá je táto podmienka), tak potom platí nerovnosť

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k + b_k} \geq \sum_{k=1}^{n} a_k. \qquad (\heartsuit)$$

Nami zadané tvrdenie z tohoto dostaneme špeciálnou voľbou $b_k = a_{k+1}$, $a_{n+1} = a_1$ $(k = 1, 2, \dots, n)$. Upravme nerovnosť $(\heartsuit)$.

$$\begin{aligned} 2\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k + b_k} = 2\sum_{k=1}^{n}\left(a_k - \frac{a_k b_k}{a_k + b_k}\right) = 2\sum_{k=1}^{n} a_k - 2\sum \frac{a_k b_k}{a_k + b_k} &\geq \sum_{k=1}^{n} a_k \\ \sum_{k=1}^{n} a_k &\geq 2\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_k}{a_k + b_k} \end{aligned}$$

Z rovnosti $(*)$ vyplýva

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k + b_k}{2}.$$

Nerovnosť $(\heartsuit)$ môžeme potom písať aj v tvare

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k + b_k}{2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{2a_k b_k}{a_k + b_k}.$$

Táto nerovnosť je po členoch presne nerovnosť medzi aritmetickým a harmonickým priemerom pre čísla a_k a b_k $(k = 1, 2, \dots, n)$. Pre každé dve kladné čísla a, b totiž platí

$$\text{(aritmetický priemer) } \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}(a+b) \quad \geq \quad 2\frac{ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \text{ (harmonický priemer)}$$

A rovnosť nastáva iba pre $a = b$. Ak ste sa s tým ešte nestretli, skúste si to dokázať. Tým sme ukázali naše kapánek silnejšie tvrdenie. Ostáva nám už len konštatovať, že rovnosť v zadanej nerovnosti platí, iba ak sú všetky a_i rovnaké.

Úloha č. 14: *Ak pre prirodzené číslo n platí, že $4^n + 2^n + 1$ je prvočíslom, tak n je mocninou trojky. Dokážte!*

Riešenie: (opravoval Tomáš)
Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme, že n nie je tvaru $n = 3^k$. Inak povedané, že $n = 3^k l$, $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ (tá nula tam nie je len tak pre parádu, lebo aj nultá mocnina trojky, t.j. $n = 1$ je vyhovujúca), $l \in \{2, 4, 5, 7, 8, 10 \dots\}$ (l nie je deliteľné troma a nie je to jednotka). Premyslite si, že takýto zápis je jednoznačný!
Ukážeme, že potom $4^{3^k l} + 2^{3^k l} + 1 = 4^n + 2^n + 1$ je deliteľné číslom $4^{3^k} + 2^{3^k} + 1$.
Pre $l \geq 2$ je zrejme $4^{3^k l} + 2^{3^k l} + 1 > 4^{3^k} + 2^{3^k} + 1 > 1$ a tak by malo číslo $4^{3^k l} + 2^{3^k l} + 1 = 4^n + 2^n + 1$ nejakého netriviálneho deliteľa (deliteľ iný ako jednotka a to číslo samé), čo by bol spor s tým, že by to malo byť prvočíslo.
Hor sa na to. Pre stručnejší zápis si označme $a = 2^{3^k}$. Potrebujeme „už len“ ukázať, že pre $a > 1$, $l \geq 1$ (dovolili sme si prihodiť možnosť $l = 1$), $3 \nmid l$ platí

$$a^2 + a + 1 \mid a^{2l} + a^l + 1 \qquad (\clubsuit)$$

Ako inak, matematickou indukciou. Ale trochu netradičnejšou, lebo musíme vynechávať násobky trojky (skúste si, že pre $3 \mid l$ nemusí $(\clubsuit)$ platiť !).

1° Overíme tvrdenie $(\clubsuit)$ pre $l = 1$ a $l = 2$. Pre $l = 1$ to asi zvládne každý a pre $l = 2$ upravíme

$$a^4 + a^2 + 1 = (a^2+1)^2 - a^2 = (a^2 + 1 - a)\underline{(a^2 + 1 + a)}, \text{ a máme to.}$$

2° V druhom kroku sa prejaví netradičnosť. Budeme totiž dokazovať, že ak platí $T(l)$, potom platí $T(l+3)$. Pričom $T(l)$ je tvrdenie (♣). Pri pokuse využiť $T(l)$ pri rozpise $T(l+3)$ nám to vypadne samo:

$$\begin{aligned} a^{2(l+3)} + a^{l+3} + 1 &= a^6(a^{2l} + a^l + 1) + (-a^{l+6} - a^6 + a^{l+3} + 1) \\ &= a^6(a^{2l} + a^l + 1) - (a^{l+3}(a^3 - 1) + a^6 - 1)) \\ &= a^6(a^{2l} + a^l + 1) - (a^3 - 1)(a^{l+3} + a^3 + 1)) \\ &= a^6\underline{(a^{2l} + a^l + 1)} - \underline{(a^2 + a + 1)}(a - 1)(a^{l+3} + a^3 + 1) \end{aligned}$$

Oba podčiarknuté výrazy sú (s využitím $T(l)$) deliteľné číslom a^2+a+1 a tak je týmto deliteľné aj $a^{2(l+3)}+a^{l+3}+1$ ($a \in \mathbb{N}$), čo je práve tvrdenie $T(l)$. Hotovo !