Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia

Úloha č. 1: *V krajine žije 99 princezien, 100 princov a 2 draci. Keď stretne princ draka, zabije ho. Keď stretne drak princeznú, zožerie ju. Keď stretne princeznú princ, zamiluje sa, od toľkej lásky mu pukne srdiečko a umrie. Takto si v našej krajine všetci šťastne žili, až kým nepomreli a nezostal tam iba jeden tvor. Ktorý to bol?*

Riešenie: (opravovala Erika)
Ukážme, že môže zostať hociktorá bytosť. Najprv nech sa tvory pozabíjajú tak, že z každého ostane jeden. To sa môže stať napríklad takto: Drak stretne 98 princezien, jeden princ stretne jedného draka a jedna princezná stretne 99 princov.

1. Ak najskôr drak zožerie princeznú a potom princ zabije draka, tak zostane princ.
2. Ak sa najskôr princ zamiluje do princeznej a zomrie a potom drak zožerie princeznú, tak zostane drak.
3. Ak najskôr princ zabije draka a potom sa zaľúbi do princeznej, tak ostane princezná.

Takže naozaj mohol ostať hocikto.

Úloha č. 2: *Miťo má v komore 2 sviečky, ktoré sú rovnako dlhé. Jedna z nich zhorí za 4, druhá za 5 hodín. Keďže potme sa študovať nedá, zapálil ich obe presne o polnoci. Keď doštudoval a išiel spať, bola jedna sviečka trikrát dlhšia ako druhá. Kedy išiel spať?*

Riešenie: (opravoval Miťo)
Pri riešení úlohy nám pomôže fyzikálny pohľad. Označme si dĺžku oboch sviec ako l a rýchlosť ich horenia ako v_1, resp. v_2. Vieme, že $v = s/t$ a získavame $v_1 = l/4$ a $v_2 = l/5$. Teraz už vieme, ktorá svieca bude trikát kratšia: bude to prvá, pretože horí rýchlejšie. Nezhoretú časť sviece vieme vyrátať ako $x = l - vt$ a môžeme zostaviť rovnicu

$$3(1 - v_1 t) = 1 - v_2 t\,.$$

Po dosadení za v_1 a v_2 dostávame

$$\begin{aligned} 3(1-\frac{lt}{4}) &= 1-\frac{lt}{5} \qquad / \cdot 20 \\ 60 - 15lt &= 20 - 4lt \\ 11lt &= 40 \end{aligned}$$

Dĺžku sviec možeme považovať za rovnú 1, pretože to platí pre všetky sviece ľubovoľných dĺžok. Naše rýchlosti v_1 a v_2 boli vzhľadom na hodiny a teda aj výsledný čas bude v hodinách. Získavame riešenie: jedna svieca bude trikrát dlhšia ako druhá v čase $t = 40/11$ po ich zapálení, čo je približne o $3:38$ ráno.

Komentár: Jeden bod sa dal stratiť za nezdôvodnenie, ktorá svieca je kratšia a *prečo je to tak.* Možno to síce vyzerá triviálne, ale k takémuto výsledku vedie úvaha a nestačí povedať, k čomu ste prišli. Práve naopak, rozhodujúci je samotný proces. Samozrejme, kratšia je tá svieca, ktorá horí rýchlejšie.
Ešte by som vás chcel upozorniť na delenie nulou: v tomto príklade samozrejme zo zadania vyplývalo, že dĺžka sviec ani čas horenia nemôžu byť nulové, no aj tak si na to málokto pri riešní spomenul a napísal $t \neq 0$. Inokedy by ste za to mohli prísť o pár bodov.

Úloha č. 3: *Aký najväčší obsah môže mať rovnobežník s obvodom* 20 *cm?*

Riešenie: (opravoval Mišo V.)
Obsah rovnobežníka $ABCD$ je $av_a = ab\sin\alpha$. Pre každé α platí $\sin\alpha \leq 1$, teda maximálny obsah získame pre $\sin\alpha = 1$, t. j. pre $\alpha = 90°$. Rovnobežník musí mať pravé uhly. Súčet dĺžok susedných strán a, b je 10 cm (kvôli obvodu). Bez ujmy na všeobecnosti nech $a \leq b$. Potom $a = 5 + x$ a $b = 5 - x$ pre nejaké $0 \leq x < 5$. Pred veľkosť obsahu dostávame $ab = (5+x)(5-x) = 25 - x^2$, ktorého maximum rovné 25 sa dosahuje pre $x = 0$. To zodpovedá štvorcu so stranou 5 cm.

Komentár: Veľa z Vás stratilo body na tom, že ste overovali len celočíselné dĺžky strán. V zadaní sa však o celých číslach nehovorí, teda prepokladáme ľubovoľné kladné (reálne) čísla.

Úloha č. 4: *Nájdi všetky prirodzené čísla, ktoré sa rovnajú 11-násobku súčtu svojich číslic v dekadickom zápise.*

Riešenie: (opravoval Kubo)
Označme si cifry hľadaného čísla postupne $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0$, potom podľa zadania musí platiť:

$$10^n \cdot c_n + 10^{n-1} \cdot c_{n-1} + \cdots + 10 \cdot c_1 + c_0 = 11 \cdot (c_n + c_{n-1} + \cdots + c_1 + c_0)$$

Po jednoduchej úprave dostaneme:

$$(10^n - 11) \cdot c_n + (10^{n-1} - 11) \cdot c_{n-1} + \cdots + (10^2 - 11) \cdot c_2 = c_1 + 10 \cdot c_0$$

Pravá strana tejto rovnice, je určite menšia ako 99, lebo cifry c_1, c_0 môžu byť najviac 9. Potom musí byť aj ľavá strana rovnice menšia ako 99. Keďže je prvá cifra hľadaného čísla (t.j. c_n) nenulová, tak ľavá strana je určite väčšia ako $10^n - 11$ a to musí byť menšie ako 99, takže dostaneme $n \leq 2$, teda naše hľadané číslo má najviac 3 cifry. Potom sa pôvodná rovnica zredukuje na tvar:

$$89 \cdot c_2 = c_1 + 10 \cdot c_0$$

Aj teraz musí platiť platiť, že ľavá strana rovnice je menšia ako 99, takže $c_2 \leq 1$. Ak $c_2 = 0$, potom dostaneme, že aj $c_1 = 0$ a $c_0 = 0$, teda hľadané číslo by bola 0, ale to nie je možné, lebo 0 nie je prirodzené číslo. Takže nám ostáva iba $c_2 = 1$, potom dostávame rovnicu

$$89 = c_1 + 10 \cdot c_0 \,.$$

Táto rovnica má jediné riešenie $c_1 = 9, c_0 = 8$ (premyslite si!). Takže existuje jediné také číslo a je to 189.

Komentár: Nemali ste veľký problém nájsť správne riešenie, ale veľká časť z vás zabudla ukázať, že ďalšie také čísla neexistujú. Často ste zabudli ukázať, že hľadané číslo musí mať menej ako 4 cifry, za to som strhával 2 body.

Úloha č. 5: *V obore celých čísel vyriešte sústavu:*

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - z^2 &= 1 \\ y + z - x &= 3 \end{aligned}$$

Riešenie: (opravovali Buggo a Janči)
Vyjadrime si z druhej rovnice y:

$$y = x + 3 - z \,.$$

Dosadením do prvej rovnice dostávame:

$$\begin{aligned} x^2 - (x + 3 - z)^2 - z^2 &= 1 \\ x^2 - x^2 - 9 - z^2 - 6x + 6z + 2xz - z^2 &= 1 \;/ + 9 \\ -2z^2 - 6x + 6z + 2xz &= 10 \\ -z^2 + 3z - 3x + xz &= 5 \\ z(3 - z) - x(3 - z) &= 5 \\ (z - x) \cdot (3 - z) &= 5 \end{aligned}$$

Keďže x, y, z sú celočíselné, musia byť aj výrazy $(z - x)$ a $(3 - z)$ celočíselné a ich súčin musí byť rovný 5. Existujú len štyri spôsoby, ako zapísať číslo 5 ako súčin dvoch celých čísel:

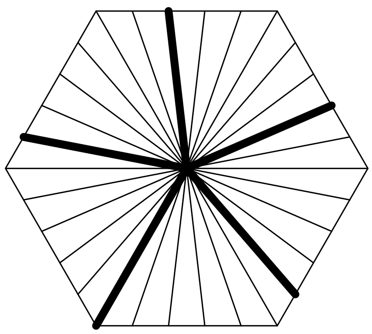
$$5 = 5 \cdot 1 = 1 \cdot 5 = -5 \cdot -1 = -1 \cdot -5$$

Po postupnom dosadení možností dostaneme riešenia $(x, y, z) = \{(-3, -2, 2), (-3, 2, -2), (9, 4, 8), (9, 8, 4)\}$. Ľahko môžeme overiť, že sú naozaj riešeniami rovnice. Keďže sme používali len ekvivalentné úpravy, žiadne ďalšie riešenia neexistujú.

Komentár: Niektorí z vás úlohu riešili tak, že druhú rovnicu umocnili na druhú a potom ďalej upravovali. Toto ale nie je ekvivalentná, ale dôsledková úprava, čo znamená, že vám mohli vzniknúť ďalšie "zdanlivé" riešenia, ktoré by neboli správne a preto je v takomto prípade nutné robiť aj skúšku.
Tiež ste úlohu riešili tak, že ste sa snažili zhora aj zdola ohraničiť možné hodnoty pre x, y, z. V takom prípade bolo nutné dokázať, že vaše ohraničenie je naozaj správne, čo tiež neurobili všetci.

Úloha č. 6: *Rozdeľte pravidelný šesťuholník na päť častí s rovnakým obsahom len pomocou pravítka a kružidla.*
Poznámka: Časti sú súvislé a nemusia mať rovnaký tvar.

Riešenie: (opravovali Foto a Peťo G.)
V šesťuholníku spojíme každú dvojicu protiľahlých vrcholov uhlopriečkou a tým ho rozdelíme na šesť zhodných rovnostranných trojuholníkov. Každú stranu šesťuholníka rozdelíme na päť zhodných úsečiek a všetky tieto deliace body pospájame so stredom, ktorý vznikol ako priesečník našich troch uhlopriečok. Takto dostaneme 30 trojuholníkov s rovnakým obsahom, lebo majú rovnakú dĺžku jednej strany a rovnakú výšku na túto stranu. Potom už nám ostáva iba rozdeliť tieto trojuholníky do piatich skupín po šesť kusov.



Úloha je tým vyriešená až na skrytý bonus v podobe jednej nezodpovedanej otázky. Ako rozdeliť už narysovanú úsečku AB na päť zhodných častí? Na prvý pohľad to vyzerá jednoducho. Použijeme algoritmus, ktorý nás učili v škole. Z bodu A narysujeme pomocnú polpriamku pod náhodne zvoleným uhlom ale tak, aby bola rôznobežná s úsečkou AB. Na ňu pomocou kružidla nanesieme päťkrát rovnakú náhodne zvolenú vzdialenosť a vznikne mi päť pomocných bodov P_1, P_2, P_3, P_4 a P_5, pričom $|AP_1| = |P_1P_2| = |P_2P_3| = |P_3P_4| = |P_4P_5|$. Posledný pomocný bod P_5 spojíme priamkou s bodom B. Nakoniec narysujem štyri priamky rovnobežné s priamkou P_5B prechádzajúce ostatnými pomocnými bodmi. Vďaka podobnosti trojuholníkov vieme, že tieto delia na päť rovnakých častí aj úsečku AB.
To však ešte stále nie je koniec! Všetko, čo sme v riešení potrebovali, sme vedeli poľahky zostrojiť len pomocou pružidla a kravítka. Všetko až na konštrukciu rovnobežky prechádzajúcu daným bodom. Táto rozhodne nie je triviálna a preto ju treba podrobnejšie popísať. My sme sa ale rozhodli, že vám ju tu neprezradíme, aby ste mali cez Vianoce nad čím rozmýšľať.

Poznámka: Pod pravítkom (bližšie nešpecifikovaným) matematik myslí nástroj na zostrojenie priamky prechádzajúcej danými dvoma bodmi. Tento nástroj teda nemá žiadne prídavné pomôcky ako mierku, rysku, dve rovné rôznobežné strany, a pod.

Komentár: Neskoro sme si uvedomili, že sme túto poznámku mali dať do zadania a za to sa vám ospravedlňujeme. Stále však platí, že akékoľvek nejasnosti ohľadom zadaní môžete s nami vydiskutovať e-mailom. Pre matematika jediná teoreticky korektná metóda zostrojenia priamky je spojenie dvoch bodov, aj keď v praxi veľmi rád používa rysku a iné inžinierske vymoženosti :-) Prišlo nám veľa rôznych rozdelení šesťuholníka, väčšinou pekne ilustrované. Čo nás ale mrzí, je, že skoro všetci ste pri konštrukcii používali rovnobežku alebo kolmicu prechádzajúcu daným bodom a vôbec vás nenapadlo zamyslieť sa, či ju viete zostrojiť len pomocou kružidla a (jedného) pravítka (bez rysky).

Úloha č. 7: *Označme n-té prvočíslo p_n. Dokážte, že pre $n \geq 12$ platí $p_n > 3n$.*

Riešenie: (opravovali Aňa a Šesťo)
Ľahko zistíme, že dvanáste prvočíslo je 37, čo je viac ako $3 \cdot 12 = 36$. Poďme sa pozrieť, ako to vyzerá ďalej. Za 37 nasleduje 38, čo je párne číslo, teda to nemôže byť prvočíslo. Ďalej nasleduje 39, ktoré je deliteľné tromi a 40, ktoré je opäť párne. 41 je prvočíslo, 42 je párne a 43 je ďalšie prvočíslo. Potom nasleduje párne číslo (44), číslo deliteľné tromi (45), za ním ďalšie párne číslo (46) a potom prvočíslo 47. Nejako sa to podobá tomu, ako to vyzeralo medzi 37 a 42. Žeby sa to takto opakovalo po šesticiach? Poďme sa na to pozrieť bližšie.
Číslo 37 je tvaru $6k+1$. Nasledujúce číslo je tvaru $6k+2 = 2(3k+1)$, čo je párne. Potom nasleduje $6k+3 = 3(2k+1)$, čo je deliteľné 3 a za ním $6k+4 = 2(3k+2)$, čo je opäť párne. Teda tieto tri čísla nie sú prvočísla. Číslo tvaru $6k+5$ môže, ale nemusí byť prvočíslo. Predpokladajme však, že je. Tým si situáciu iba sťažíme. Ďalej číslo $6k+6$ nie je prvočíslo, lebo je deliteľné šiestimi. Ďalej je číslo $6k+7 = 6(k+1)+1$, čo už je začiatok ďalšej šestice. Teda v jednej šestici môžeme mať najviac 2 prvočísla a to tvaru $6k+1$ a $6k+5$. Označme si q_n postupnosť čísel tvaru $6k+1$ a $6k+5$, nech $q_{12} = 37$. Dokážeme matematickou indukciou, že platí: $q_n > 3n$, kde $n \geq 12$.
1° Pre číslo $37 = 6 \cdot 6 + 1$, čiže pre $n = 12$ to platí.
2° Teraz ukážeme, že $\forall n \geq 12$ platí: ak $q_n > 3n$ a $q_n = 6k+1$, tak $q_{n+1} > 3(n+1)$ a $q_{n+2} > 3(n+2)$.
Keďže $q_n = 6k+1$, tak $q_{n+1} = 6k+5 = q_n + 4$. Keďže $q_n > 3n$, tak

$$q_n + 4 > 3n + 4 \Longleftrightarrow q_{n+1} > 3(n+1) + 1\,.$$

Teda prvá časť je hotová. $q_{n+2} = 6(k+1)+1 = (6k+1)+6 = q_n + 6 > 3n+6 = 3(n+2)$. Teda $q_{n+2} > 3(n+2)$, čo sme chceli dokázať.
Dokázali sme teda, že $\forall n \geq 12$ platí, že $q_n > 3n$. Treba si uvedomiť, že $\forall n \geq 12$ je $p_n \geq q_n$. Teda bude platiť aj to, že $\forall n \geq 12$ je $p_n > 3n$.

Úloha č. 8: *Označme $C(n)$ ciferný súčet čísla n v desiatkovej sústave. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo m existuje prirodzené číslo a také, že všetky čísla $C(a), C(2a), \ldots, C(ma)$ sú párne.*

Riešenie: (opravoval Peťo N.)
Keď si zadanie párkrát poriadne prečítame, uvedomíme si, že naša úloha je nasledovná: Máme dané nejaké prirodzené číslo m a chceme k nemu nájsť také a, že všetky jeho násobky až po m-tý majú párny ciferný súčet.

Ako také a hľadať? Keď sa chvíľku hráme s číselkami a rátame ciferné súčty ich násobkov, chovajú sa tieto dosť nepravidelne. Raz sú párne, raz sú nepárne. Nám však stačí nájsť aspoň jedno číslo, ktorého dosť veľa (konkrétne m) prvých násobkov má párny ciferný súčet. Pri akom čísle sa ľahko určí parita jeho ciferného súčtu? Napríklad pri takom, v ktorom sa vyskytujú dve rovnaké skupiny cifier za sebou – potom je totiž párny. Presne takéto čísla ale dostaneme ako násobky čísla

$$a = 10^n + 1 = 1\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1\,,$$

kde n je počet cifier čísla m (fungovalo by to aj s väčším n-kom, ale my si vystačíme s týmto). Skutočne, keď si vypíšeme zopár násobkov takto zvoleného čísla a, dostaneme

$$1\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1,\quad 2\underbrace{0\ldots0}_{n-1}2,\quad \ldots,\quad 9\underbrace{0\ldots0}_{n-1}9,\quad 10\underbrace{0\ldots0}_{n-2}10,\quad \ldots,\quad 99\underbrace{0\ldots0}_{n-2}99,\quad \ldots$$

Vo všeobecnosti, ak a vynásobíme ľubovoľným číslom i nanajvýš rovným m (a teda majúcim najviac n cifier), ktorého zápis v desiatkovej sústave je $\overline{c_1c_2\ldots c_k}$ (teda $k \le n$), dostaneme

$$i \cdot a = \overline{c_1c_2\ldots c_k} \cdot (10^n + 1) = \overline{c_1c_2\ldots c_k\underbrace{0\ldots0}_{n}} + \overline{c_1c_2\ldots c_k} = \overline{c_1c_2\ldots c_k\underbrace{0\ldots0}_{n-k}c_1c_2\ldots c_k}\,.$$

Pritom počet núl v súčine môže byť aj nulový (keď $k = n$). Teda $C(ia) = 2(c_1 + c_2 + \cdots + c_k)$, čo je určite párne číslo. Ku každému prirodzenému m sme tak našli a s požadovanou vlastnosťou, čím je úloha vyriešená.

Komentár: Pomerne ťažké je úlohu správne pochopiť (tri kvantifikátory v zadaní je dosť veľa), potom to už ide hravo. Uvedomte si, že tvrdenie *„existuje a, ktorého všetky násobky majú párny ciferný súčet"* je oveľa silnejšie, ako to v zadaní. Dokonca možno ani neplatí (skúste ho dokázať či vyvrátiť).
Pedantnejší z vás popísali dokonca závislosť a od m predpisom $a = 10^{\lfloor \log_{10} m\rfloor+1} + 1$. Nebolo to treba, ale aktivita naviac poteší.

Poznámka: Skúste tvrdenie zo zadania dokázať (alebo vyvrátiť), ak v zadaní zameníme slovko *párne* za *nepárne*.

Úloha č. 9: *Nájdi všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pre ktoré $f(x) + xf(1-x) = x^2 + 1$.*

Riešenie: (opravovali Mišo R. a Pišta)
Všimnime si, že keď dosadíme do rovnice namiesto premennej x číslo t a potom $1-t$, tak dostaneme sústavu rovníc s neznámymi $f(t)$ a $f(1-t)$:

$$\begin{aligned} f(t) + t\cdot f(1-t) &= t^2 + 1 &(1)\\ f(1-t) + (1-t)\cdot f(t) &= (1-t)^2 + 1 &(2)\end{aligned}$$

Teraz vyjadríme $f(1-t)$ z (2) a dosadíme do (1):

$$f(t) + t\cdot\left[(1-t)^2 + 1 - (1-t)\cdot f(t)\right] = t^2 + 1$$

$$(1 - t + t^2)\cdot f(t) = t^2 + 1 - t\cdot(1 + (1-t)^2) = -t^3 + 3t^2 - 2t + 1$$

Keďže $1 - t + t^2 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \ge \frac{3}{4} > 0$, môžeme deliť týmto výrazom:

$$f(t) = \frac{1 - 2t + 3t^2 - t^3}{1 - t + t^2}$$

Túto úvahu sme mohli urobiť pre ľubovoľné reálne t a preto takto dostaneme funkčnú hodnotu v ľubovoľnom bode. Skúškou sa presvedčíme, že daná funkcia vyhovuje zadaniu.
Teda jediným riešením našej rovnice je funkcia

$$f(x) = \frac{1 - 2x + 3x^2 - x^3}{1 - x + x^2}\,.$$

Komentár: Body ste mohli stratiť za zabudnutú skúšku správnosti, ak ste nepoužívali ekvivalentné úpravy, alebo keď ste síce používali ekvivalentné úpravy, ale ste potom zabudli vyhlásiť, že to, čo ste dostali je riešením aj pôvodnej rovnice.
Ďalšie body sme strhávali za delenie (resp. násobenie) nulou.
Tiež sa nám nepáčilo, že väčšina z vás dosadila za x výraz $1 - x$ bez akejkoľvek diskusie, a potom ste novú rovnicu ľubovoľne kombinovali s pôvodnou. Táto úprava nie je korektná pre hocijaké rovnice, ale iba pre funkcionálne rovnice. No nakoniec sme za to nestrhávali body.

Úloha č. 10: *Nech a, b, c, d sú také celé čísla, že a, b, c sú za sebou idúcimi členmi geometrickej postupnosti a zároveň b, c, d sú za sebou idúcimi členmi aritmetickej postupnosti. Okrem toho platí $a + b + c + d = 4 \cdot 3^{2003}$. Nájdite všetky takéto čísla.*

Riešenie: (opravoval Rúža)
Nech q je kvocient geometrickej postupnosti, v ktorej a, b, c sú po sebe idúce členy. Potom $b = aq$, $c = aq^2$. Nech p je diferencia aritmetickej postupnosti, v ktorej b, c, d sú po sebe idúce členy. Potom $c = b + p$, $d = b + 2p$. Z týchto vzťahov dostávame:

$$\begin{aligned} p &= c - b = aq^2 - aq \\ d &= b + 2p = aq + 2(aq^2 - aq) = 2aq^2 - aq \end{aligned}$$

Potom pre súčet všetkých štyroch členov postupností platí:

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 4 \cdot 3^{2003} \\ a + aq + aq^2 + 2aq^2 - aq &= 4 \cdot 3^{2003} \\ a + 3aq^2 &= 4 \cdot 3^{2003} \\ a(1 + 3q^2) &= 4 \cdot 3^{2003} \qquad (\heartsuit) \end{aligned}$$

Zrejme $a \neq 0$ (lebo ak by sa $a = 0$, tak by postupne platili nasledovné vzťahy: $b = c = 0$, $p = 0$, $d = 0$, $a + b + c + d = 0 \neq 4 \cdot 3^{2003}$), a tak môžeme písať $q = b/a$. Keďže a, b sú celé čísla, tak q je racionálne číslo. Ak $q = 0$, tak postupne platia nasledovné vzťahy: $b = c = 0$, $p = 0$, $d = 0$, $a + b + c + d = a = 4 \cdot 3^{2003}$, čiže v tomto prípade a, b, c, d nadobúdajú hodnoty $a = 4 \cdot 3^{2003}$ a $b = c = d = 0$. Ľahko sa môžeme presvedčiť, že tieto hodnoty spĺňajú zadanie, a teda sú riešením. Rozoberme teraz situáciu $q \neq 0$. Nech $q = r/s$, kde r, s sú nesúdeliteľné celé čísla rôzne od nuly. Zo vzťahu ($\heartsuit$) dostávame:

$$\begin{aligned} a(1 + \frac{3r^2}{s^2}) &= 4 \cdot 3^{2003} \\ a(\frac{s^2 + 3r^2}{s^2}) &= 4 \cdot 3^{2003} \\ a(s^2 + 3r^2) &= 4 \cdot 3^{2003} s^2 \qquad (\clubsuit) \end{aligned}$$

Keďže s a r sú celé čísla, tak výraz $s^2 + 3r^2$ nadobúda celočíselnú hodnotu. Môžu nastať dve možnosti:

1. Číslo 3 nedelí s^2. Potom ale 3 nedelí ani $s^2 + 3r^2$, čiže z platnosti ($\clubsuit$) dostávame, že 3^{2003} delí a.
2. Číslo 3 delí s^2. Potom ale 3 delí s, čiže $s = 3t$, kde t je celé číslo rôzne od nuly. Zo vzťahu ($\clubsuit$) dostávame:

$$\begin{aligned} a(9t^2 + 3r^2) &= 4 \cdot 3^{2003} \cdot 9t^2 \\ a(3t^2 + r^2) &= 4 \cdot 3^{2004} \cdot t^2 \qquad (\diamondsuit) \end{aligned}$$

   Keďže s, r sú nesúdeliteľné a 3 delí s, tak 3 nedelí r (ani r^2). Z čoho vyplýva, že 3 nedelí $3t^2 + r^2$, čiže z platnosti ($\diamondsuit$) dostávame, že 3^{2004} delí a.

V oboch prípadoch platí, že 3^{2003} delí a, a teda $a = k3^{2003}$, kde k je celé číslo. Pozrime sa na vzťah ($\heartsuit$). Vieme, že a je celé číslo rôzne od nuly. Keďže $4 \cdot 3^{2003}$ je kladné celé čislo a výraz $1 + 3q^2$ je vždy väčší rovný jednej, tak platí $0 < a \leq 4 \cdot 3^{2003}$. Čiže k môže nadobudnúť hodnoty 1, 2, 3, alebo 4. Rozoberme tieto štyri možnosti:

1. Ak $k = 1$, potom $a = 3^{2003}$ a zo vzťahu ($\heartsuit$) dostávame $q = \pm 1$. Pre $q = 1$ dostávame $p = 0$ (zo vzťahu $p = aq^2 - aq$), z čoho $b = c = d = 3^{2003}$. Pre $q = -1$ dostávame $p = 2 \cdot 3^{2003}$, z čoho $b = -3^{2003}$, $c = 3^{2003}$, $d = 3^{2004}$. Ľahko sa môžeme presvedčiť, že obe možnosti spĺňajú zadanie, a teda sú riešením.
2. Ak $k = 2$, potom $a = 2 \cdot 3^{2003}$ a zo vzťahu ($\heartsuit$) dostávame $q = \pm\sqrt{1/3}$, čo je v spore s racionalitou čísla q.
3. Ak $k = 3$, potom $a = 3^{2004}$ a zo vzťahu ($\heartsuit$) dostávame $q = \pm 1/3$. Pre $q = 1/3$ dostávame $p = -2 \cdot 3^{2002}$, z čoho $b = 3^{2003}$, $c = 3^{2002}$, $d = -3^{2002}$. Pre $q = -1/3$ dostávame $p = 4 \cdot 3^{2002}$, z čoho $b = -3^{2003}$, $c = 3^{2002}$, $d = 5 \cdot 3^{2002}$. Opäť sa ľahko môžeme presvedčiť, že obe možnosti spĺňajú zadanie, a teda sú riešením.
4. Ak $k = 4$, potom $a = 4 \cdot 3^{2003}$ a zo vzťahu ($\heartsuit$) dostávame $q = 0$. No túto možnosť sme už rozobrali.

Takže úloha má 5 rôznych riešení $[a, b, c, d] = \{\,[4 \cdot 3^{2003}, 0, 0, 0], [3^{2003}, 3^{2003}, 3^{2003}, 3^{2003}],$
$[3^{2003}, -3^{2003}, 3^{2003}, 3^{2004}], [3^{2004}, 3^{2003}, 3^{2002}, -3^{2002}], [3^{2004}, -3^{2003}, 3^{2002}, 5 \cdot 3^{2002}]\}$.

Komentár: Veľa z vás po odvodení vzťahu $a(1+3q^2) = 4 \cdot 3^{2003}$ uvažovalo takto: keďže $4 \cdot 3^{2003}$, a sú celé čísla, tak aj výraz $(1+3q^2)$ nadobúda celočíselnú hodnotu. Pozor, *takáto úvaha je zlá*! Zo vzťahu $a(1+3q^2) = 4 \cdot 3^{2003}$ vyplýva len toľko, že výraz $(1+3q^2)$ nadobúda racionálnu hodnotu, a teda je nekorektné rozoberať jeho deliteľnosť ľubovoľným celým číslom!

Úloha č. 11: *Ukážte, že ak pre racionálne čísla x, y, z platí $x^3+3y^3+9z^3-9xyz = 0$, potom platí aj $x = y = z = 0$.*

Riešenie: (opravoval Rado)

Tvrdenie dokážeme sporom. Nech platí $x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 9xyz = 0$ a nech nejaké z čísel x, y, z je nenulové. Čísla x, y, z sú racionálne, preto existujú $x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{Z}, x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{N}$ tak, že $x = \frac{x_1}{x_2}, y = \frac{y_1}{y_2}, z = \frac{z_1}{z_2}$. Potom platí

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^3 + 9 \cdot \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3 - 9 \cdot \frac{x_1y_1z_1}{x_2y_2z_2} = 0\,.$$

Keďže x_2, y_2, z_2 sú nenulové, tak nimi môžeme danú rovnosť prenásobiť výrazom $(x_2y_2z_2)^3$. Dostaneme

$$x_1^3y_2^3z_2^3 + 3y_1^3x_2^3z_2^3 + 9z_1^3x_2^3y_2^3 - 9x_1y_1z_1x_2^2y_2^2z_2^2 = 0\,.$$

Ak si teraz označíme $x_0 = x_1y_2z_2, y_0 = y_1x_2z_2, z_0 = z_1x_2y_2$, tak určite bude aspoň jedno z $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{Z}$ nenulové a platí $x_0^3 + 3y_0^3 + 9z_0^3 - 9x_0y_0z_0 = 0$. Teda stačí, ak ukážeme, že zadaná rovnica nemá nenulové riešenie pre celé čísla x_0, y_0, z_0. Zadaná rovnica je homogénna, čo znamená, že ak má riešenie (a, b, c), potom má aj riešenie (ka, kb, kc), kde $k \in \mathbb{R}$ (overte si!). Teda, ak má daná rovnica nenulové celočíselné riešenie, tak má aj také riešenie, kde najväčší spoločný deliteľ daných troch čísel je 1 (keďže dané riešenie je nenulové, tak taký bude existovať). Označme si také riešenie (x, y, z). Všetky výrazy okrem x^3 sú deliteľné troma. Teda musí platiť $3|x^3 \implies 3|x$. Teda existuje také x', že platí $x = 3x'$. Potom platí po úprave:

$$y^3 + 3z^3 + 9x'^3 - 9yzx' = 0$$

To isté môžeme teraz aplikovať aj na y, dostaneme, že $3|y$, teda existuje y' také, že $y = 3y'$. Potom platí po úprave:

$$z^3 + 3x'^3 + 9y'^3 - 9zx'y' = 0$$

To isté môžeme aplikovať aj pre z, dostaneme, že $3|z$. Teda 3 by muselo deliť x, y, z. Avšak náš predpoklad bol, že najväčší spoločný deliteľ daných čísel je 1, čo je spor. Teda neexistujú také celé čísla x, y, z, kde aspoň jedno z nich je nenulové a zároveň vyhovujú rovnici zo zadania. To ale znamená, ako sme vyššie ukázali, že neexistuje ani nenulové racionálne riešenie.

Úloha č. 12: *Hra solitér sa hrá na tabuľke $m \times n$ štvorčekov. V každom z nich je položená jedna minca. Na začiatku sú všetky mince okrem jednej v rohu otočené znakom nahor. V každom ťahu môžeme z tabuľky zobrať ľubovoľnú mincu, ktorá je otočená znakom nahor, ale súčasne musíme otočiť všetky mince v štvorčekoch, ktoré hranou susedia s tým, odkiaľ sme mincu práve zobrali. Nájdite všetky dvojice (m, n), pre ktoré je možné takýmito ťahmi zobrať všetky mince.*

Riešenie: (opravoval Čermo)

Na začiatok si predstavme, že pre našu hru existuje vyhrávajúca stratégia, čiže sa nám podarilo odobrať všetky mince zo šachovnice. Položme si teraz otázku, koľko otočení mincí sme počas hry urobili. Ukážeme, že tento počet je rovný počtu vnútorných hrán na šachovnici (to sú hrany, ktoré nie sú na okraji šachovnice). Každá vnútorná hrana oddeľuje práve dve mince. Pri odobratí jednej z nich sa druhá otočí. Teda každému otočeniu vieme priradiť práve jednu vnútornú hranu šachovnice takú, že oddeľuje otočenú mincu a odobratú mincu, ktorá otočenie spôsobila. Každú hranu takto zrejme započítame najviac raz. Zároveň každú hranu započítame aspoň raz, lebo keď zoberieme prvú z dvoch mincí oddelených touto hranou, tak túto hranu započítame. Preto počet otočení je rovný počtu vnútorných hrán na šachovnici, čo je $m(n-1) + n(m-1) = 2mn - (m+n)$.

Na šachovnici máme mn mincí, pričom $mn - 1$ je otočených znakom nahor a jedna znakom nadol. Mincu znakom nadol budeme označovať *zlá minca*. Pretože mincu je možné odobrať, len keď je znakom nahor, musí platiť, že zlú mincu otočíme nepárny počet krát a zvyšné mince, ktorých počet je $mn - 1$, otočíme párny počet krát. Celkový počet otočení preto musí byť nepárny. Porovnaním s predchádzajúcim vzťahom pre počet otočení dostávame nutnú podmienku existencie výhernej stratégie: $2mn - (m+n)$ je nepárne číslo a teda aj $m+n$ musí byť nepárne.

Stále sme ešte nedokázali, že taká stratégia existuje. V skutočnosti nie je veľmi zložité nájsť návod, pomocou ktorého pre šachovnice, kde $(m+n) = 2k+1, k \in \mathbb{N}$, odstránime všetky mince zo šachovnice. Samozrejme existuje viacero možností, uvedieme len jednu:

Bez ujmy na všeobecnosti otočme si šachovnicu tak, aby počet stĺpcov bol párny (nech je to m), počet riadkov bol nepárny (n) a zlá minca nech je v ľavom hornom rohu. Prvým krokom bude odobrať mince z prvého riadku tak, že ako prvú zoberieme mincu susednú k zlej a potom každú druhú od nej (na preskačku). Po tejto operácii budú všetky mince v prvom riadku, ktoré sme ešte nezobrali, otočené dvakrát (znakom nahor) a zlá minca iba raz (teda

tiež znakom nahor), pričom medzi každými dvoma susednými bude jedno políčko prázdne. To nám umožní odobrať všetky zostávajúce mince v prvom riadku. Tým sme sa zbavili prvého riadku a všetky mince v druhom otočili práve raz (v prípade, že riadok bol len jeden, skončili sme). Zoberme teraz ľavý krajný stĺpec. Pôvodne v ňom bol nepárny počet mincí, ale my sme už jednu mincu z neho odobrali a jednu otočili znakom nadol (prvú – v druhom riadku). Vzniknutá situácia je rovnaká ako pri prvom riadku na začiatku hry. Podľa rovnakého postupu môžeme odobrať všetky mince z tohto stĺpca a otočiť všetky mince vo vedľajšom. Tam sa minca v druhom riadku otočila druhý krát (znakom nahor) a všetky ostatné prvý krát (znakom nadol). Takto upravený stĺpec tiež vieme celý zobrať (začneme mincou znakom nahor, ktorá nám otočí znakom nahor mincu pod ňou a potom zoberieme tú,... až do konca stĺpca). V susednom stĺpci (teda treťom od kraja) potom nastane rovnaká situácia ako v predošlom a tak sa ho zbavíme rovnakým spôsobom. Analogicky takto budeme môcť zobrať všetky ostávajúce stĺpce a sme doma.
Tým sme dokázali, že pre šachovnice, kde $(m+n) = 2k+1, k \in \mathbb{N}$ existuje vždy vyhrávajúca stratégia.

Úloha č. 13: *Nájdite všetky prirodzené čísla $n > 1$ také, aby pre každé dva nesúdeliteľné delitele a, b čísla n bolo aj číslo $a + b - 1$ deliteľom n.*

Riešenie: (opravoval Mazo)
Idea riešenia je jasná: niekoľkokrát využijeme predpoklad, ktorý nám zadanie ponúka, vhodnou voľbou a a b (nezáleží až tak na tom, čo si zvolíme – vo vašich riešeniach neboli skoro žiadne dve voľby rovnaké... dôležité je, aby ste každou novou voľbou zistili niečo viac o n).
Ľahko sa presvedčíme, že čísla tvaru p^k, kde k je prirodzené, sú riešením. Ďalej nech n obsahuje v kanonickom rozklade aspoň dve prvočísla, teda

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}, \quad p_1 < p_2 < \cdots < p_n .$$

Zvoľme $a := p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}, b := p_1$ (overenie, že toto naozaj sú dva nesúdeliteľné delitele n, ostáva na čitateľovi). Číslo $a + b - 1$ je deliteľom n, teda sa dá písať v tvare

$$a + b - 1 = p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} + p_1 - 1 = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} , \tag{3}$$

kde $\beta_i \le \alpha_i$ pre $i = 1, 2, \ldots, k$. Keďže $p_i > p_1 > p_1 - 1 > 0$ (pre $i = 2, 3, \ldots, k$), platí $(p_i, p_1 - 1) = 1$. Takže p_i nedelí ľavú stranu (3) pre žiadne $i = 2, 3, \ldots, k$, preto p_i nedelí ani pravú stranu a $\beta_i = 0$ pre všetky $i = 2, 3, \ldots, k$. Teda $p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} = p_1^{\beta_1} - p_1 + 1$ a

$$n = p^\alpha (p^\beta - p + 1), \qquad \text{kde } p \text{ je prvočíslo a } 2 \le \beta \le \alpha . \tag{4}$$

Premyslite si, prečo musí byť $\beta \ge 2$.
Zvoľme $a := p^\beta, b := p^\beta - p + 1$. Potom $2p^\beta - p \mid p^\alpha(p^\beta - p + 1)$, preto $2p^{\beta-1} - 1 \mid p^\beta - p + 1$, keďže $(2p^{\beta-1} - 1, p) = 1$. Teda pre nejaké $A \in \mathbb{N}$ platí

$$p^\beta - p + 1 = A \cdot (2p^{\beta-1} - 1) . \tag{5}$$

Ak by bolo $A \ge p$, je $p^\beta - p + 1 = Ap^{\beta-1} + A(p^{\beta-1} - 1) \ge p \cdot p^{\beta-1} \ge p^\beta$, čo je spor. Preto $A \le p - 1$. Z (5) máme

$$A + 1 = 2Ap^{\beta-1} - p^\beta + p ,$$

teda $p \mid A + 1$ $(\beta \ge 2)$, preto $p \le A + 1$. Spolu s predošlým $(A \le p - 1)$ to dáva $A = p - 1$, po dosadení do (5) úpravou dostaneme $2p^{\beta-1} = p^\beta$, z toho $p = 2$. Preto

$$n = 2^\alpha (2^\beta - 1) .$$

Zvoľme $a := 4$ (môžeme, $\alpha \ge 2$ z (4)), $b := 2^\beta - 1$. Potom $2^\beta + 2 \mid 2^\alpha(2^\beta - 1)$, teda $2^{\beta-1} + 1 \mid 2^\beta - 1$. Keďže $2^{\beta-1} + 1 > 2^{\beta-1} = (2^\beta)/2 > (2^\beta - 1)/2$, musí platiť $2^{\beta-1} + 1 = 2^\beta - 1$. Z toho úpravou a porovnaním parity strán dostaneme $\beta = 2$, takže $n = 3 \cdot 2^\alpha$.
Ak by bolo $\alpha \ge 3$, tak voľbou $a := 3, b := 2^3 = 8$ získame, že $3 + 8 - 1 = 10 \mid n$, ale $5 \nmid n$ (prečo?), spor. Teda jediným vyhovujúcim párnym číslom je $n = 12$ (overte si).

Úloha č. 14: *Dokážte, že pre nezáporné reálne čísla a, b, c spĺňajúce rovnosť $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ platia nerovnosti*

$$0 \le ab + bc + ac - abc \le 2 .$$

Riešenie: (opravoval Tomáš)
Označme si podmienku rovnosti zo zadania $(a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4)$ ako $(\cdot)$ a dve nerovnosti, ktoré by sme radi dokázali $(0 \le ab + bc + ac - abc \le 2)$ ako $(\heartsuit)$. V celom riešení sú občas ukryté tiché predpoklady, že $a, b, c \ge 0$. Bystrý čitateľ si ich verím všimne a preto ich nebudeme zvlášť pripomínať.

Najprv si všimnime, že zámenou a, b, c medzi sebou sa $(\cdot)$ ani $(\heartsuit)$ nezmenia, teda môžeme predpokladať, že $a \geq b \geq c$. Nie je ťažké sa presvedčiť o tom, že musí byť $c \leq 1$, lebo v opačnom prípade by bolo $a \geq b \geq c > 1$ a následne $a^2 + b^2 + c^2 + abc > 4$, čo je v spore s $(\cdot)$.
Teraz už ľavú nerovnosť v $(\heartsuit)$ ukážeme jednou ranou

$$ab + bc + ca \geq ab \geq abc.$$

S pravou nerovnosťou je to zaujímavejšie. Prepíšme si premenné a a b takto:

$$a = u + v, \quad b = u - v, \quad u, v \geq 0,$$

(prečo sa to tak dá?) a dosaďme to jednak do $(\cdot)$ a aj do pravej nerovnosti $(\heartsuit)$, premennú z necháme na pokoji. Po úprave dostaneme:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + abc &= 2u^2 + z^2 + u^2 z + (2 - z)v^2 = 4 && (6) \\ ab + bc + ac - abc &= (1 - z)(u^2 - v^2) + 2uz && (7) \end{aligned}$$

Pozor, príde kľúčová úvaha. Našou snahou je ukázať, že výraz (7) je najviac 2. Snažíme sa zistiť, kedy je pravá strana v rovnosti (7) najväčšia pri splnení podmienky (6). Prizrime sa na v. Ak ho v (6) zmenšíme, musí sa (aby platila rovnosť) zväčšiť u $(2 - z > 0)$. To nám ale v (7) spôsobí zväčšenie, lebo sa zväčší $(u^2 - v^2)$ aj $2u$ a aspoň z čísel $z, 1 - z$ je nenulové $(z, 1 - z \geq 0)$. Preto najväčšiu hodnotu v (7) dostaneme pre najmenšie možné v, teda pre $v = 0$. Inak povedané $a = b = u \geq 0$.
Z podmienky (6) tak dostaneme

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + abc = 2u^2 + z^2 + u^2 z &= 4 \\ u^2(2 + z) &= (2 - z)(2 + z) \quad \big/ : (2 + z) > 0 \\ z &= (2 - u^2) \end{aligned}$$

Tento výsledok dosadíme do (7) a hľadíme na náš cieľ $(\heartsuit)$ a upravujeme

$$\begin{aligned} ab + bc + ac - abc = (1 - z)u^2 + 2uz &\leq 2 && (8) \\ \big(1 - (2 - u^2)\big)\, u^2 + 2u(2 - u^2) &\leq 2 \\ u^4 - 2u^3 - u^2 + 4u - 2 &\leq 2 \\ (u - 1)^2(u^2 - 2) &\leq 0 \end{aligned}$$

Ostáva presvedčiť sa, že $u^2 = a^2 = b^2 \leq 2$. Nuž, ale keby to neplatilo, tak $a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq a^2 + b^2 > 2 + 2 = 4$, čo by bolo sporné s $(\cdot)$. Takže naša nerovnosť (8) skutočne platí a sme hotoví.
A koľkokrát ste našli „tiché predpoklady“? Kto narátal aspoň do troch, čítal pozorne!