Korešpondenčný Matematický Seminár

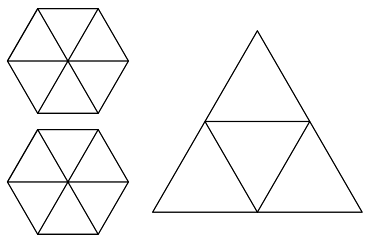
Úloha č. 1: *Rozdeľte dva zhodné pravidelné šesťuholníky spolu na šesť častí tak, aby ste z týchto častí vedeli poskladať rovnostranný trojuholník (bez medzier alebo prienikov týchto častí).*

Riešenie: (opravoval Miki)

Skúsime si nakresliť dva zhodné pravidelné šesťuholníky a jeden väčší rovnostranný trojuholník a hneď narazíme na problém. Súčet obsahov šesťuholníkov by sa mal rovnať obsahu trojuholníka, pretože pri rezaní a skladaní sa obsah nestráca ani nepribudne. Aké majú mať naše útvary strany? Pravidelný šesťuholník je zložený zo šiestich rovnostranných trojuholníkov, ktorých stranu si označíme x. Stranu veľkého trojuholníka si označme y. Keďže vieme, že $S_\triangle = av_a/2$, zistíme si veľkosť výšky v rovnostrannom trojuholníku. Z Pytagorovej vety vypočítame, že $v_a = a\sqrt{3}/2$ a preto $S_\triangle = a^2\sqrt{3}/4$. Obsah veľkého trojuholníka je teda $S_\triangle = y^2\sqrt{3}/4$. Obsah dvoch pravidelných šesťuholníkov bude $S = 12x^2\sqrt{3}/4$. Tieto výsledky majú byť rovnaké:

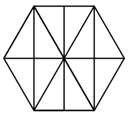
$$
\begin{aligned}
\frac{y^2\sqrt{3}}{4} &= \frac{12x^2\sqrt{3}}{4},\\
y &= \sqrt{12}x,\\
y &= 2\sqrt{3}x.
\end{aligned}
$$

Teraz si môžeme obrázky poriadne nakresliť a pustiť sa do strihania – alebo aspoň do kreslenia rezov a častí.

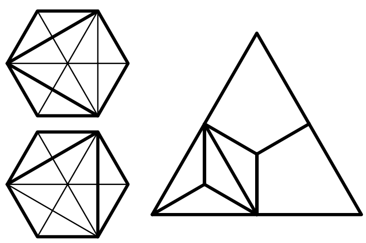


Môžeme začať tak, ako na obrázku, ale veľmi to nepomáha: šesťuholníky sú teraz rozdelené na 12 rovnakých častí a trojuholník na 4, pričom z troch malých trojuholníkov neviem poskladať ten jeden väčší. Môžeme vyskúšať ešte niekoľko iných možností, ale čo ak nikam nevedú? Treba rezy hľadať cieľavedome. Keď skladáme časti dokopy, musia nám sedieť uhly. Aj tie vnútri, kde prikladáme časti k sebe, a tiež uhly v rohoch nášho trojuholníka. Preto má zmysel skúšať rezania na útvary so šesťdesiatstupňovými uhlami. Ďalšia dôležitá vec sú dĺžky. Časti šesťuholníkov, ktoré prikladáme pozdĺž strany veľkého trojuholníka, musia mať strany, ktoré v súčte dajú dĺžku strany tohto trojuholníka. (Toto sú podstatné veci pre riešenie všetkých úloh tohto typu, dobre si ich uvážte a pozrite si poznámku za riešením.)

Pozrime ešte raz na naše rovnice vo svetle úvah z predchádzajúceho odstavca. Strana veľkého trojuholníka je $2x\sqrt{3} = 4x\sqrt{3}/2$ a to je vlastne štvornásobok výšky toho malého trojuholníka v šesťuholníku. Skúsime teda rezať šesťuholník cez výšky malých trojuholníkov.



Keď rozdelíme každý malý trojuholník na polovicu cez výšku, dostaneme spolu 24 trojuholníkov, ktoré už nie sú rovnostranné, ale zo šiestich týchto trojuholníkov už vieme poskladať štvrtinu nášho pôvodného trojuholníka a zo všetkých 24 poskladáme celý trojuholník. Jediný problém je v tom, že v zadaní od nás chceli, aby sme to zvládli na 6 častí a nie 24. Teraz však stačí zaručiť, aby sa každá z tých 6 častí skladala z niekoľkých najmenších trojuholníkov a máme vyhrané. Po chvíli skúšania na to určite prídete. Keby nie, tu je jedno z možných riešení.



Poznámka: Pomocou trojuholníkov alebo štvorcov vieme vydláždiť celú rovinu. Viete to dokázať? A viete vydláždiť rovinu pomocou lichobežníkov či pravidelných šesťuholníkov? Pomocou pravidelných päťuholníkov rovnakej veľkosti rovinu vydláždiť nevieme. Skúste to dokázať pomocou úvah z tohto vzorového riešenia. A keby tie pravidelné päťuholníky mohli mať rôzne veľkosti? Nešlo by to? A čo pravidelné sedemuholníky?

Ďalšou zaujímavou úlohou je rozrezať trojuholník na niekoľko (konečne veľa) častí tak, aby sa z nich dal poskladať štvorec. Dokážete to? A viete poskladať z pravidelného päťuholníka pravidelný šesťuholník, ak majú rovnaký obsah? Táto posledná úloha je naozaj ťažká, ale keď sa k nej prepracujete postupne cez tie ostatné, mohli by ste to zvládnuť. (A keď to dokážete, skúste sa spýtať svojho učiteľa matematiky, či to dokáže aj on. :))

Úloha č. 2: *Ďaleko-preďaleko, v krajine púští a stromov, žil si šťastne kmeň beduínov na čele s náčelníkom Omarom. Omar bol múdry a spravodlivý náčelník, preto sa rozhodol vysporiadať sa aj s krádežou slona, ktorá sa jedného dňa v kmeni odohrala. Nájsť zlodeja nebolo ťažké, ale na veľké prekvapenie všetkých bolo ťažké nájsť majiteľa slona. Vedelo sa, že slon patrí jednému z trojice Ahmed, Mehak a Zafir, pričom je všeobecne známe, že každý z nich buď vždy klame, alebo vždy hovorí pravdu. Títo traja muži predniesli pred Omarom nasledujúce výroky:*

Ahmed: „Slon patrí Zafirovi.“

Mehak: „Môj slon to nie je."
Zafir: „Aspoň dvaja z nás klamú."
Z týchto výrokov Omar, aj napriek svojej veľkej múdrosti, nemohol určiť, komu slon patrí. To ho trochu nahnevalo, a tak povedal: „No tak, komu z vás slon naozaj patrí?" Zafir mu odpovedal a odpoveďou bolo meno jedného z nich, teda jedno z mien Ahmed, Mehak a Zafir. Potom už Omar vedel, komu slon patrí. Viete to už aj vy?

Riešenie: (opravovala Katka)
Rozoberieme dva prípady: Zafir hovorí pravdu (i) a Zafir klame (ii).
(i) Zafirov výrok je pravdivý, a preto aspoň dvaja musia klamať. Keďže Zafir hovorí pravdu, Ahmed a Mehak musia klamať. Aby tvrdenia Ahmeda a Mehaka boli nepravdivé, musí slon patriť Mehakovi (stačí si uvedomiť, čo platí, ak klamali). Zafir je pravdovravný, a preto mohol Omarovi odpovedať na otázku, komu patrí slon, jedine meno Mehak.
(ii) Zafirov výrok je nepravdivý, a preto najviac jeden z trojice klamal. Vieme, že Zafir klamal, Ahmed a Mehak museli hovoriť pravdu. Z tvrdení Ahmeda a Mehaka tak vieme, že slon patril (v tomto prípade, keby Zafir klamal) Zafirovi. Zafir je klamár, a preto mohol Omarovi povedať meno Ahmed alebo Mehak.
Poslednou úlohou bolo vžiť sa do Omarovej pozície. Zo zadania vieme, že Omar už vedel určiť vlastníka slona. Z predchádzajúcich úvah zase vyplýva, že Omar od Zafira nemohol počuť meno Zafir. Túto možnosť môžeme vylúčiť. Ak by Zafir povedal meno Mehak, Omar by nevedel určiť, ktorý z prípadov (i), (ii), nastal, v oboch totiž mohol Zafir povedať Mehakovo meno a keďže v týchto prípadoch patrí slon rôznym ľuďom, nevedel by ani určiť jeho majiteľa. Ak by však Omar počul Ahmedovo meno, vedel by, že Zafir musí klamať, nastáva prípad (ii) a teda slon patrí Zafirovi.
Zafir povedal meno Ahmed a slon patrí Zafirovi.

Komentár: Úlohu sa vám podarilo riešiť celkom úspešne a rôznymi zaujímavý spôsobmi. Niektorí z vás sa však nedokázali úplne „vžiť" do Omara, a preto úlohu nedotiahli do konca. Ak máte menej bodíkov, skúste sa zamyslieť, kde ste nesprávne postupovali (naznačila som vám to vo vašich riešeniach, ale poriadne si to musíte aj vy uvedomiť vo vašich hlávkach). Logické úlohy sú krásne v tom, že nemusíte vedieť veľa, len používať hlavu. Tak šup do toho :).

Úloha č. 3: *Je známe, že štvorec (druhá mocnina) každého nepárneho prirodzeného čísla dáva po delení číslom* 2 *zvyšok* 1.
a) Bude tento zvyšok rovný 1 *aj po delení jednotlivými číslami* 4, 8, 16, *resp.* 32*?*
b) Vezmime ľubovoľné prirodzené číslo, ktoré nie je deliteľné číslom 3*. Bude jeho štvorec po delení číslom* 3 *dávať zvyšok* 1*? Aké zvyšky bude dávať po delení číslom* 9*?*

Riešenie: (opravovala Lenka)
a) Vezmime si ľubovoľné nepárne číslo. Vieme ho nejako rozumne zapísať tak, aby sme zachytili to, že je nepárne? Asi si spomeniete na zápis v tvare $2n + 1$, kde n je celé číslo. Vtedy totiž môžeme za n dosadiť také číslo, aby sme dostali nepárne číslo, aké len chceme. Dobre, máme teda nepárne číslo $2n + 1$; čo sa stane po tom, ako ho umocníme? Dostávame

$$(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1.$$

Všimnime si, že $4n^2 + 4n$ je deliteľné číslami 2 aj 4. Preto číslo $4n^2 + 4n + 1$ dáva zvyšok 1 po delení každým z čísel 2 a 4.
Ako to vyzerá so zvyškami po delení číslom 8? Použitie zápisu $2n + 1$ nám už príliš nepomôže, pretože členy, ktoré nám vystupujú po umocnení, majú koeficient štyri. Ak si pozorne všimneme, ako sme postupovali, možno nás napadne, že sa oplatí skúsiť zápis $4n + 1$, respektíve $4n + 3$ (nezabúdajme, že stále uvažujeme iba o nepárnych číslach). Po umocnení týchto vyjadrení dostávame

$$\begin{aligned}(4n + 1)^2 &= 16n^2 + 8n + 1,\\ (4n + 3)^2 &= 16n^2 + 24n + 9 = 16n^2 + 8 \cdot 3n + 8 + 1.\end{aligned}$$

Takže nakoniec každý výraz pozostáva zo súčtu niečoho, čo je deliteľné číslom 8 a čísla 1. Teraz už jasne vidíme, že všetky nepárne čísla po umocnení dávajú zvyšok 1 po delení ôsmimi.
A ako je to so zvyškami po delení číslami 16 a 32? Tam to žiaľ nefunguje už s číslom 3. Po umocnení dostaneme 9 a to dáva po delení číslami 16 aj 32 zvyšok 9.
b) Ostáva nám zistiť, aké zvyšky dávajú druhé mocniny čísel, ktoré nie sú deliteľné tromi, po delení číslom 9. Jedna možnosť, ako postupovať, je zapísať dané číslo ako $9n + z$, kde z je zvyšok tohto čísla po delení číslom 9, a tieto vyjadrenia umocniť pre konkrétne hodnoty z, ktoré nie sú deliteľné tromi. Napríklad pre $z = 5$ dostávame $(9n + 5)^2 = 81n^2 + 90n + 25 = 81n^2 + 90n + 18 + 7$, teda čísla tohto tvaru dávajú zvyšok 7. Iná možnosť je vrátiť sa k vyjadreniam v tvare $3n + 1$, respektíve $3n + 2$, umocniť ich a všímať si, aké zvyšky môže po delení dávať člen $6n$, respektíve $12n$. (Pretože po delení deviatimi člen $9n^2$ dáva vždy zvyšok nula a člen 1 dáva vždy zvyšok jedna.) Rozoberieme prípad pre $12n$, druhý nechávame na čítateľa, ktorý sa už isto nevie dočkať. (Inými slovami: ukážeme, ako postupovať. Náš postup je dostatočne názorný a zároveň umožňuje vyriešiť aj druhý prípad. Preto by ste mali byť bez problémov schopní tento postup aplikovať. A mali by ste ho skúsiť, aby ste si ho osvojili a vedeli ho aktívne používať, nielen pasívne mu rozumieť.) Číslo $12n$ dáva po delení deviatimi zrejme rovnaký zvyšok ako $3n$,

ktoré budeme skúmať. Skúsme teraz za n dosadiť malé čísla, $0, 1, 2, \ldots$ Dostávame postupne $0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots$ Nás ale zaujímajú iba zvyšky, takže máme $0, 3, 6, 0, 3, 6, 0, \ldots$ To vyzerá podozrivo, otázka teraz je, či sa naozaj stále opakujú iba tieto tri zvyšky, alebo nie. Teraz by ste mali skúsiť nad touto otázkou porozmýšľať, pokúsiť sa ju zodpovedať a svoju odpoveď aj dokázať a až potom pokračovať v čítaní. Už máte? Výborne, len pre úplnosť uvedieme dôkaz toho, že zvyšky sa naozaj opakujú. Konkrétne chceme dokázať, že $3n$ a $3(n+3)$ dávajú rovnaký zvyšok po delení číslom 9. To je ale pomerne zrejmé, keďže $3(n+3) = 3n+9$ a 9 dáva po delení číslo 9 zvyšok 0. Teda druhé mocniny čísel, ktoré nie sú deliteľné tromi, dávajú po delení deviatimi niektorý zo zvyškov $1, 4, 7$.

Poznámka: Ukážeme si, načo je skúmanie zvyškov dobré. Je to jeden zo základných spôsobov dokazovania nemožnosti niečoho. Takýto dôkaz musíme robiť tak, že nevyužívame vlastnosti žiadneho konkrétneho spôsobu, musíme ukázať, že sa to nedá spraviť *žiadnym* spôsobom – takže treba vylúčiť aj spôsoby, ktoré vopred nepoznáme, nielen dokázať nefunkčnosť nejakého konkrétneho.
Má rovnica $x^2 + 2 = 5y^2$ nejaké celočíselné riešenie? Odpoveď je nie, pretože pravá strana našej rovnice môže po delení štyrmi dať iba zvyšok 0 alebo 1 a ľavá strana zase dáva iba zvyšky 2 alebo 3. Úloha pre vás: zistite, či súčet trinástich štvrtých mocnín nejakých celých čísel môže byť 1711. Ďalšiu aplikáciu úvahy o zvyškoch nájdete v úlohe číslo 9.

Komentár: Niektorí ste boli v riešeniach trošku nedôslední a poriadne ste neukázali, prečo sa zvyšok zmení po umocnení čísla tak, ako sa zmení. Iní ste predpokladali, že ak môže mať číslo po delení číslom 9 nejaké zvyšky, tak tie isté zvyšky potom musia mať aj druhé mocniny. Takéto tvrdenie sa síce na prvý pohľad môže zdať jasné a úplne správne, no aj takéto „jasné“ tvrdenia si treba vždy overiť. Inak sa vám to môže vypomstiť, pretože nakoniec to tvrdenie pravdivé nebude, tak ako teraz.

Úloha č. 4: *Danka mala v zošite napísané tri rôzne nenulové cifry. Vytvorila z nich všetky možné trojciferné čísla a tie sčítala. Vyšlo jej číslo* 2125. *Neskôr si uvedomila, že jedno z trojciferných čísel zabudla pripočítať. Ktoré to bolo?*

Riešenie: (opravoval Jakub)
Označme si Dankine tri cifry ako a, b, c. Z nich vyrobila tieto trojciferné čísla: $100a + 10b + c$, $100a + 10c + b$, $100b + 10a + c$, $100b + 10c + a$, $100c + 10a + b$, $100c + 10b + a$. Keby ich všetky sčítala, vyšlo by jej $222 \cdot (a + b + c)$. Ona však na jedno zabudla (označme si ho x), a tak jej vyšlo 2125. Z toho vieme, že $2125 + x = 222 \cdot (a + b + c)$, kde a, b, c sú cifry čísla x, a teda $(a+b+c)$ je ciferný súčet čísla x. Dôležité je, že $2125+x$ musí byť nejaký násobok 222, ktorý je menší ako 3125 (lebo $x < 1000$) a väčší ako 2224 (lebo $x > 99$). Do úvahy prichádzajú iba tieto štyri násobky:
(i) $11 \cdot 222 = 2442$, teda $x = 317$ – vyhovuje, lebo ciferný súčet x je 11.
(ii) $12 \cdot 222 = 2664$, teda $x = 539$ – nevyhovuje, lebo ciferný súčet x nie je 12.
(iii) $13 \cdot 222 = 2886$, teda $x = 761$ – nevyhovuje, lebo ciferný súčet x nie je 13.
(iv) $14 \cdot 222 = 3108$, teda $x = 983$ – nevyhovuje, lebo ciferný súčet x nie je 14.
Takže číslo, na ktoré Danka zabudla, môže byť jedine 317.

Komentár: Veľa z vás riešilo úlohu inak. Snažili ste sa vyriešiť rovnicu $2125 = 122a + 212b + 221c$, čo viedlo k rozoberaniu veľa rôznych možností. Nabudúce sa skúste už na začiatku riešenia úlohy zamyslieť nad tým, ako vyskúšať čo najmenej možností (násobkov 222 zjavne nie je veľa).

Úloha č. 5: *Kde bolo, tam bolo, bola raz jedna krajina. V tejto krajine si žili dievčatá a chlapci, a žili si šťastne, pretože každý mal aspoň jedného kamaráta. Jedného dňa sa deti rozhodli, že sa zabavia, a preto usporiadajú dve súťaže: volejbalový turnaj a matematickú olympiádu. Pochopiteľne, že obe súťaže sa uskutočnili presne v ten istý čas. Všetkým deťom sa síce páčili obe súťaže, ale každý sa zúčastnil práve jednej z nich. „Nuž, nevadí,“ povedali si deti a pretože sú zvedavé, dodali: „Poprosím teda niektorého zo svojich kamarátov, aby mi prezradil, ako bolo na druhej súťaži.“*
Vašou úlohou je dokázať, že deti sa mohli rozdeliť na obe súťaže tak, aby každé z nich malo kamaráta na druhej súťaži (teda na tej, ktorej sa nezúčastnilo).

Riešenie: (opravovali Dada a Miťo)
Keďže väčšina z vás úlohu bez problémov vyriešila, ukážeme si riešenia, ktoré sú síce trochu náročnejšie, ale veľmi poučné a elegantné.
Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou vzhľadom na počet detí, označme ho n. Keďže každé dieťa má aspoň jedného kamaráta, v prvom indukčnom kroku sa budeme zaoberať prípadom $n = 2$. Tento prípad je však triviálny, stačí jedno dieťa poslať na jednu súťaž a druhé na druhú. Predpokladajme teraz, že naše tvrdenie platí pre nejaké $n \geq 2$, dokážeme, že platí aj pre $n + 1$. Majme na základe indukčného predpokladu vyhovujúce rozdelenie n detí do dvoch skupín. „Nové“, $(n+1)$-vé, dieťa má aspoň jedného kamaráta. Ak má iba jedného alebo sú všetci jeho kamaráti v rovnakej skupine, stačí ho dať do opačnej skupiny. Ak má nové dieťa kamarátov v oboch skupinách, je jedno, do ktorej ho umiestnime. Toto rozdelenie zjavne vyhovuje zadaniu.

Poznámka: Všimnime si, že toto riešenie nám nedáva takmer žiaden vhľad do podstaty problému, aj keď je pomerne podarené. Je to ukážka sily matematickej indukcie pri tvrdeniach podobného druhu.

Iné riešenie:
Dieťa, ktoré má kamaráta v druhej skupine, budeme nazývať *spokojné*. Dajme najprv všetky deti do jednej skupiny. *Krokom* budeme rozumieť to, že vyberieme jedno z nespokojných detí a preradíme ho. Takýto krok budeme opakovať, až kým nebudú všetky deti spokojné. Teraz dokážeme, že tento algoritmus naozaj povedie k rozdeleniu s požadovanými vlastnosťami a navyše že skončí v konečnom čase[1]. Každým naším krokom zabezpečíme, že dieťa, ktoré sme preradili, už bude spokojné, pretože predtým bolo so všetkými svojimi kamarátmi v jednej skupine a preradili sme ho, pričom jeho kamarátov sme nechali tam, kde boli. Teda nielenže preradené dieťa sa stane spokojným, ale aj všetci kamaráti preradeného dieťaťa budú spokojní, a navyše sa nemôže stať, že niektoré spokojné dieťa by sa stalo nespokojným. Pristavme sa na chvíľu pri tom, prečo sa nemôže žiadne dieťa stať nespokojným. Keby sa stalo nespokojným, znamenalo by to, že v opačnej skupine malo iba jedného kamaráta a toho sme preradili. To je však v spore s výberom detí v *kroku*, pretože sme sa dohodli, že budeme vyberať iba nespokojné deti. Ešte zostáva dokázať konečnosť algoritmu. Na začiatku sme mali konečne veľa detí, povedzme n, a teda aj najviac n nespokojných detí. Ukázali sme, že v každom kroku sa počet nespokojných detí zmenší aspoň o jedna, teda algoritmus po najviac n krokoch zastane. Hotovo.

Poznámka: Aj keď uvedené riešenia sú nepochybne zaujímavé, asi sa vám zdá, že je pomerne ťažké na niečo podobné prísť. S tým samozrejme súhlasíme; myšlienku riešenia, ktorú objaviť bolo asi najjednoduchšie, teraz popíšeme. Deti budeme rozdeľovať do skupín postupne. Na začiatku hociktoré dieťa zaradíme do jednej zo skupín, ďalej budeme postupovať tak, že všetkých ešte nezaradených kamarátov všetkých detí, ktoré sme zaradili naposledy, dáme do opačnej skupiny. Keďže každé dieťa má aspoň jedného kamaráta, mohlo by sa zdať, že takto rozdelíme všetky deti, čo však nie je pravda. Najjednoduchší protipríklad tvoria štyri deti, pričom prvé sa kamaráti s druhým a tretie so štvrtým. Teraz by ste už mali vedieť povedať, ako pri našom rozdelení postupovať, aby sme nakoniec zaradili všetky deti.

Komentár: Najčastejšou chybou vo vašich riešeniach bolo to, že ste sa nezmienili o tom, že vaše rozdelenie je správne (všimnite si, že túto časť sme – zámerne – vynechali pri riešení, ktoré sme načrtli v poznámke). Ak v našom riešení priamo zostrojujeme nejaké rozdelenie, ktoré vyhovuje zadaniu, je vhodné postupovať v dvoch krokoch. V prvom povieme „aha, toto je rozdelenie a takto ho zostrojíme“, v druhom kroku dokážeme, že toto rozdelenie naozaj funguje, teda spĺňa všetky podmienky zo zadania. Skoro všetci ste tieto dve časti spájali do jednej a nerozlišovali medzi nimi, čo však zrejme nie je vhodné, pretože sa potom môže ľahko stať, že podceníte dôležitosť dôkazu, prípadne naň úplne zabudnete. Za nespomenutie nutnosti dôkazu, respektíve za jeho neuskutočnenie, sme strhávali tri body. Dva sa dali stratiť za to, ak vaše riešenie nefungovalo pre rozdelenia typu uvedeného v poznámke.

Úloha č. 6: *Nech x, y, z sú ľubovoľné reálne čísla.*
a) Dokážte, že ak platí $y < 1 < x$, tak platí aj $xy + 1 < x + y$;
b) Ak sú splnené všetky tri predpoklady $1 \leq x$, $y \leq z$ a $y + z < x + 1$, tak platí $y < x$.

Riešenie: (opravovali Rasťo a Ďuriško)
Máme na prvý pohľad dva podobné typy úloh, ktoré však vyriešime mierne odlišnými prístupmi:
a) Všimnime si nerovnosť $xy + 1 < x + y$, ktorú chceme dokázať. V takomto tvare asi len ťažko vidíme jej súvis s podmienkami, z ktorých máme vychádzať. Nemôžeme sa však nechať odradiť. Veľmi často nám malé úpravy dokážu povedať viac, ako by sme čakali. Samozrejme, rôznych úprav je nepreberné množstvo. Treba skúšať nejaké nádejne vyzerajúce. Často pomôže, keď si dáme všetky členy na jednu stranu a skúsime to rozložiť na súčin. Pozrime sa, ako sa dá upraviť naša nerovnosť:

$$\begin{aligned} xy + 1 &< x + y, \\ xy + 1 - x - y &< 0, \\ (x-1)(y-1) &< 0. \end{aligned}$$

Tu už pekne vidíme, že posledná nerovnosť platí v dvoch prípadoch. Buď je $x < 1 < y$, alebo $y < 1 < x$, čo je náš prípad. Pozor však! Takto môžme postupovať iba v tom prípade, ak sú naše úpravy ekvivalentné. Inak povedané, musíme sa pozrieť, či môžeme medzi krokmi postupovať korektne aj zozadu smerom k tomu, z čoho sme vychádzali. V našom prípade to naozaj platí. Veľký pozor si však treba dávať, ak pracujeme s nerovnosťou, kde sa vyskytujú zložitejšie výrazy s druhými mocninami, odmocninami a podobne. Všimnime si ešte, že týmto postupom sme ukázali tiež to, že druhá implikácia neplatí a teda nerovnosť $xy + 1 < x + y$ nám ešte nezaručuje, že $y < 1 < x$.

Vráťme sa teraz na chvíľu k tomu nepreberného množstvu úprav, ktoré máme k dispozícii. Okrem prístupu, ktorý ste práve videli, je ďalšou prirodzenou možnosťou skúsiť upraviť predpoklady tak, aby sa „viac podobali“ na tvrdenie, ktoré sa snažíme dokázať. Napríklad skúsme nerovnosť $y < 1$ vynásobiť číslom x a k obom stranám pripočítať 1. Dostávame nerovnosť $xy + 1 < x + 1$, ktorá na základe predpokladov platí ($x > 1 > 0$). Keby platilo $x + 1 < x + y$, získali by sme odhad, ktorý by nám zabezpečil platnosť dokazovaného tvrdenia. Toto však neplatí; náš odhad je príliš „hrubý“. Mohli by sme teraz vyskúšať podobným spôsobom upraviť niektorú zo zvyšných dvoch (rozmyslite si) nerovností v predpokladoch. Skúste si to a porozmýšľajte nad tým, čo ste dostali a prečo.

[1] Táto časť je dôležitá. Totiž to, že algoritmus vedie k správnemu výsledku nám nie je nič platné, ak algoritmus nikdy neskončí a teda správny výsledok nevyprodukuje.

Ďalším z osvedčených postupov je substitúcia tvaru $x = 1 + a$, $y = 1 - b$, kde a, b sú kladné reálne čísla. Práve túto substitúciu sme zvolili práve z dôvodu, že nové premenné a, b sú kladné a s takými sa často pracuje lepšie (napríklad niektoré známe nerovnosti platia iba pre kladné čísla). Navyše keď sa nad predchádzajúcou vetou zamyslíme, môžeme si všimnúť, že premenná x bola kladná už aj predtým. Čo by sa teda stalo, ak by sme nahradili uvedeným spôsobom iba y? Skúste si úlohu vyriešiť aj týmito spôsobmi a porovnajte ich. (Toto sme vám nehovorili zbytočne :), všimnite si, ako začína riešenie úlohy číslo 10.)

b) Na druhú nerovnosť pôjdeme priamočiarejšie. Znova si však všimnime, čo chceme dokázať. Vidíme, že v nerovnosti $x < y$ sa nenachádza z, a teda sa ho budeme chcieť rozumným spôsobom zbaviť. Využitím ohraničenia $y \leq z$ dostaneme s pomocou ďalšej nerovnosti z predpokladu inú nerovnosť $2y \leq y + z < x + 1$, čím sme sa z-ka naozaj zbavili. Uvidíme, či nám to pomôže. Z ďalšieho ohraničenia $1 \leq x$ však dostávame $x + 1 \leq 2x$, čo nám v spojení s predchádzajúcou nerovnosťou dáva $2y < 2x$, teda $y < x$.

Takéto nahrádzanie pomocou ohraničení nám môže často pomôcť v úlohách o poznanie ťažších, takže je veľmi prospešné zautomatizovať si podobné úpravy, aby sme sa tým potom nemuseli zdržovať (ťažisko ťažších úloh spočíva v niečom inom). Tiež si treba vždy uvedomiť, či robíme nahrádzanie v správnom smere a teda či sú úpravy korektné. Skúste si teraz na precvičenie vyskúšať tento príklad: Majme tri predpoklady $b \leq 2$, $c \leq a + 1$ a nakoniec $d + 1 \leq b$, kde a, b, c, d sú kladné reálne čísla. Dokážte, že $a + b > cd$.

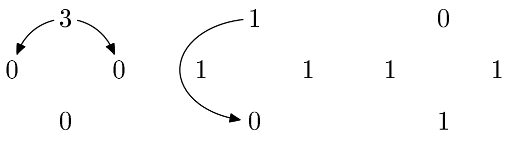
Úloha č. 7: *Okolo ohňa sedí $n + 1$ psov ($n \geq 1$). Jeden z nich je bankár a má n kariet, ostatní nemajú ani jednu kartu. V jednom kroku zvolíme dvoch psov A a B (nie nutne rôznych), z ktorých každý má aspoň jednu kartu a spolu majú aspoň dve. Zoberieme jednu kartu od psa A a dáme ju jednému zo susedov psa B a zoberieme jednu kartu od psa B a dáme ju jednému zo susedov psa A. Pre ktoré n sa po sérii vhodných krokov môžeme dostať do situácie, že každý pes okrem bankára má jednu kartu?*

Riešenie: (opravovali Bus a Čermo)

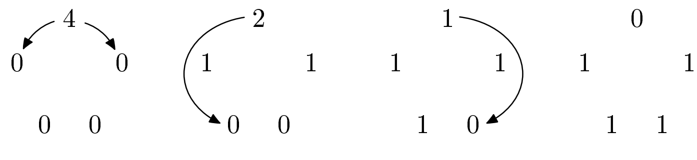
Najjednoduchšia cesta, ako sa pustiť do tohto problému, je preveriť, ako môže vyzerať pohyb kariet pre najmešie zoskupenia psov. Tu hneď narazíme na dva problémy. Prvým je, ako vôbec začať. Máme jedinú možnosť, ako spraviť krok, zvolíme za A aj B bankára (a potom dáme karty buď po jednej jeho susedom, alebo obe jednému zo susedov; prípad $n = 1$ vyriešime osobitne). Druhým problémom je, že operácia presunu kariet je komplikovaná a treba zakaždým dbať na splnenie niekoľkých podmienok. Nevedeli by sme pomocou nej realizovať nejaké „jednoduchšie" operácie, s ktorými sa nám bude ľahšie pracovať? Uvedomme si, že pri dôkaze nemožnosti dosiahnutia cieľovej situácie budeme musieť uvažovať pôvodnú operáciu presunu kariet, nestačí zobrať do úvahy len niektoré odvodené operácie, pretože pôvodnou operáciou sa možno dá dosiahnuť čosi viac. Tak či tak, pri hľadaní možného postupu môžu tieto jednoduchšie operácie pomôcť.

Jednu operáciu sme už našli: ak má niektorý pes aspoň dve karty, môže po jednej posunúť susedom tak ako bankár na začiatku. Dá sa to pomocou šípok kresliť do obrázka. Iná užitočná operácia je takáto: ak máme za sebou idúcich psov, ktorí majú $1, 1, 0$ kariet, tak vieme jednou operáciou dosiahnuť situáciu $0, 1, 1$ (rozmyslite si, ako). Inak povedané, vieme kartu posunúť psovi o dve pozície ďalej, pokiaľ pes, ktorého preskakujeme, má aspoň jednu kartu. (Obe zatiaľ spomenuté operácie vieme obrátiť, mohlo by sa to hodiť.)

Skúsme s touto obmedzenou množinou operácií nájsť postup, ktorým sa dostaneme z počiatočnej do cieľovej pozície pre malé n. Veľmi názornou pomôckou môže byť kreslenie obrázkov.



$n = 3$



$n = 4$

Nájdite podobný postup pre niekoľko väčších n. Určite ste si všimli, že tieto postupy vieme zovšeobecniť. Prípad $n = 4$ vieme rozšíriť na všetky väčšie párne n. Podobne algoritmus pre $n = 3$ vieme použiť pre $n = 7, \ldots, 4k + 3$ (skúste sami na základe obrázkov popísať také postupy).

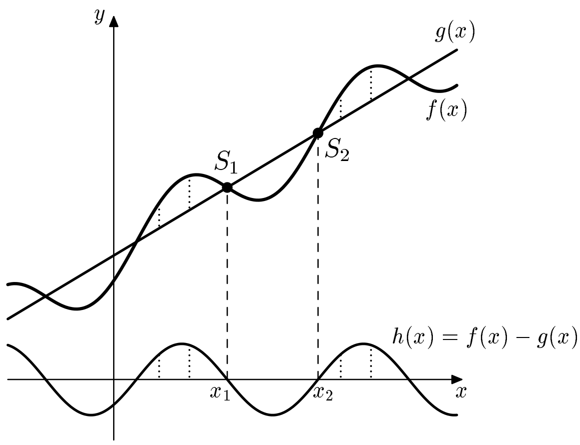
Zostali nám prípady, kde $n = 4k + 1$, ktoré vytrvalo odolávajú snahe o nájdenie riešenia. Môžeme skúsiť použiť pôvodné operácie namiesto tých odvodených, ale k cieľu bližšie nebudeme. Dalo by sa dokázať, že v tomto prípade nie je možné dosiahnuť cieľovú pozíciu z počiatočnej?

Pri našich pokusoch sme zistili, že sa nám nedarí posunúť kartu o jedno miesto. Vieme ju posunúť o dve miesta. Alebo ju síce posunieme o jedno, ale súčasne sa nám premiestni iná karta. V dôkaze nemožnosti potrebujeme vylúčiť všetky možné spôsoby. Nemožnosť znamená, že cieľová pozícia obsahuje čosi, čo počiatočná neobsahuje a pritom to nevieme popísanými operáciami pridať. Hodnota, ktorá sa nemení, aj keď robíme akékoľvek prípustné operácie, sa nazýva *invariant*. Čo sa nemení v našom prípade? Očíslujme psov – bankár má číslo 1 a ostatní sú očíslovaní zaradom v smere hodinových ručičiek. Označme P súčet počtov kariet, ktoré majú psi s párnymi číslami. Označme N súčet počtov kariet, ktoré majú psi s nepárnymi číslami. Vieme, že na začiatku $N = 4k + 1$ a $P = 0$. Všimnime si

rozdiel $P-N$. Na začiatku je tento rozdiel $4k+1$ a na konci 0 (overte si). Môže sa zmeniť pri vykonávaní operácií? Ak vybraní psi A, B majú párne čísla, tak P sa zmenší o 2 a N zmenší o 2 (susedmi psa s párnym číslom sú psi s nepárnym číslom a naopak, platí to aj pre psa 1, overte si to). Ak vybraní psi majú nepárne čísla, tak P sa zväčší o 2 a N sa zmenší o 2. A ak jeden z vybraných psov má párne číslo a druhý nepárne, tak P ani N sa nezmenia. Takže rozdiel $P-N$ sa síce zmeniť môže, ale nie jeho zvyšok po delení dvoma. Inak povedané, tento zvyšok bude vždy taký, ako v počiatočnej pozícii, teda 1. Nikdy nemôžeme dosiahnuť pozíciu, kde je tento zvyšok rovný 0, preto ani cieľovú pozíciu.
Na záver si to môžeme zhrnúť. Dosiahnuť cieľovú pozíciu z počiatočnej nevieme, ak n dáva zvyšok 1 po delení štyrmi a vieme v každom inom prípade.
Skúste si hľadanie invariantov na ďalších úlohách. Napríklad: máme na stole tri poháre, otočené dnom nadol. Môžeme ľubovoľné dva z nich chytiť a otočiť dnom nahor. Vieme takýmito krokmi dosiahnuť, aby všetky poháre boli otočené dnom nahor? A čo ak máme pohárov 9 a otočiť môžeme naraz ľubovoľných 5 z nich?

Úloha č. 8: *Graf funkcie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ má dva stredy symetrie. Dokážte, že funkcia f sa dá napísať ako súčet lineárnej a periodickej funkcie.*

Riešenie: (opravovala Erika)
Máme funkciu f definovanú na reálnych číslach. To znamená, že každému reálnemu číslu je priradená nejaká funkčná hodnota, a dokonca je táto hodnota práve jedna. Našou úlohou je dokázať, že f sa dá napísať ako súčet lineárnej a periodickej funkcie. Budeme postupovať tak, že obe tieto funkcie nájdeme a dokážeme, že naozaj spĺňajú požiadavky zadania.
Označme stredy súmernosti funkcie S_1, S_2. Ukážme najskôr, že stredy súmernosti patria grafu funkcie. Nech stred S_1 má súradnice (x_1, y_1). Nech $y_1 \neq f(x_1)$. Potom v stredovej súmernosti podľa stredu S_1 sa bod $(x_1, f(x_1))$ zobrazí do nového bodu $(x_1, f(x_1)+2(y_1-f(x_1)))$. Tento bod musí patriť grafu funkcie. V bode x_1 tak máme dve rôzne funkčné hodnoty, čo je v spore s definíciou funkcie. Teda S_1 patrí grafu funkcie (podobne to vieme ukázať pre stred S_2). Ako dôsledok tohto máme, že tieto stredy nemôžu mať rovnakú x-ovú súradnicu. (Premyslite si to a uvedomte si, že toto vieme dokázať aj bez znalosti, že stredy súmernosti patria grafu funkcie f.) Teda S_1 má súradnice $(x_1, f(x_1))$ a S_2 súradnice $(x_2, f(x_2))$, pričom $x_1 \neq x_2$.

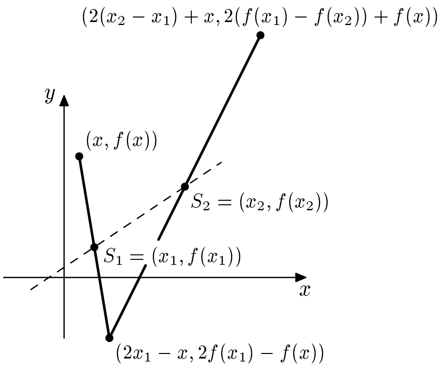


Skúsme sa teraz na chvíľu pozrieť na úlohu z geometrického hľadiska. Vieme, že ak máme dva rôzne stredy súmernosti a zobrazíme nejaký útvar postupne podľa týchto dvoch stredov, dostaneme útvar, ktorý bude oproti pôvodnému útvaru iba posunutý o dvojnásobok spojnice týchto dvoch stredov. (Skúste toto dokázať geometricky. Uvedomte si vzťah strednej priečky trojuholníka k jeho základni.) Máme teda, že aj celý graf sa po zobrazení podľa oboch stredov na seba posunie. Zostrojme priamku prechádzajúcu oboma stredmi S_1, S_2. Táto priamka sa dá zapísať ako lineárna funkcia g (to nám zaručuje vlastnosť, že stredy S_1 a S_2 majú rôznu x-ovú súradnicu). Keď sa pozrieme na obrázok, zistíme, že pre každé x platí

$$f(x)-g(x)=f(x+2(x_2-x_1))-g(x+2(x_2-x_1)).$$

Tento rozdiel funkcií nám vytvára novú funkciu, ktorú budeme označovať $h(x)$. Ako vidíme, je periodická s periódou $2(x_2-x_1)$. Čo funkcia $h(x)$ vyjadruje? Vyjadruje „dĺžku“ úsečky, ktorú vytína na grafe funkcií f a g rovnobežka s osou y (nemôžeme povedať, že je to dĺžka, lebo niekedy môže byť $h(x)$ záporné). Podarilo sa nám teda napísať funkciu f ako súčet lineárnej funkcie g a periodickej funkcie h.

Možno by ste povedali, že úloha je už vyriešená. No keďže sa jedná o funkcie, geometrický prístup nestačí. Veď niektoré funkcie sa nakresliť vôbec nedajú. (Skúste napríklad nakresliť Dirichletovu funkciu, ktorá má na racionálnych číslach funkčnú hodnotu jedna a na iracionálnych má funkčnú hodnotu nula. Je táto funkcia periodická? S akou najmenšou periódou?) Preto ešte vyriešime úlohu algebraicky. Samozrejme, geometrický pohľad nám pri vymýšľaní tohoto riešenia veľmi pomôže.



Zobrazme bod $(x, f(x))$ v stredovej súmernosti podľa bodu S_1. Dostávame, že obrazom tohto bodu je bod

$$\big(2x_1 - x, 2f(x_1) - f(x)\big).$$

Keď tento nový bod zobrazíme v stredovej súmernosti podľa S_2, obraz bude mať súradnice

$$\big(2(x_2 - x_1) + x, 2(f(x_2) - f(x_1)) + f(x)\big).$$

Teda ak označíme $2(x_2 - x_1)$ písmenom a a $2(f(x_2) - f(x_1))$ písmenom b, dostávame

$$f(a + x) = f(x) + b.$$

Keďže a je nenulové (stredy S_1, S_2 majú rôzne x-ové súradnice), dostali sme nový zaujímavý výraz (geometricky tento výraz predstavuje posunutie). Zvoľme teraz funkciu $g(x) = (b/a)x$ (táto funkcia je rovnobežná so spojnicou stredov súmernosti). Označme $h(x) = f(x) - g(x)$. Ukážme, že táto funkcia je periodická s periódou a. Na to nám treba ukázať, že $h(x + a) = h(x)$. Zistime, čomu sa rovná $h(x + a)$.

$$h(x+a) = f(x+a) - g(x+a) = f(x) + b - g(x+a) = f(x) + b - \frac{b}{a}(x+a) = f(x) + b - \frac{b}{a}\cdot x - b = h(x).$$

Teda $h(x)$ je periodická funkcia s periódou a. Z toho máme, že funkcia f sa dá zapísať ako súčet funkcií g, h, kde g je lineárna funkcia a h je periodická funkcia.

Komentár: Pri riešení sa dá prísť na veľa vecí. Niektorí z vás prišli na to, že ak má graf funkcie dva rôzne stredy súmernosti, tak ich má nekonečne veľa. Potom riešenie ukončili tým, že niet čo dokazovať, lebo funkcia, ktorej graf má dva stredy súmernosti, neexistuje. Je síce pravda, že neexistuje funkcia, ktorej graf má *práve* dva stredy súmernosti, ale v zadaní slovko „práve“ nebolo.

Úloha č. 9: *Nech m, n sú kladné celé čísla. Dokážte, že číslo $5^m + 5^n$ sa dá napísať ako súčet dvoch štvorcov práve vtedy, keď je číslo $m - n$ párne.*

Riešenie: (opravovali Hanka a Feráč)
Na začiatku je dôležité uvedomiť si, čo to vlastne máme dokázať. Ako prvá by nám mala udrieť do očí fráza „práve vtedy, keď“. To znamená, že musíme ukázať dve tvrdenia. Jednak, že pre m a n rovnakej parity vieme napísať výraz $5^m + 5^n$ ako súčet dvoch štvorcov a naopak, ak jedno z čísel m, n je párne a druhé nepárne, tak žiaden takýto zápis neexistuje. (Namiesto opačnej implikácie dokazujeme jej obmenu, pretože je to výhodnejšie.) Tak hor sa na to.
Dôkaz prvej implikácie si rozdelíme na dve časti: najprv vezmeme obe m a n párne a potom obe nepárne. Prvý prípad je jednoduchý. Pre m a n párne sú totiž obe čísla 5^m a 5^n štvorce, ich súčet je teda očividne súčtom dvoch štvorcov. V druhej časti sa nám to začína komplikovať. Čo robiť? Asi najlepšou radou je skúšať rozkladať daný výraz na súčet dvoch štvorcov pre nejaké konkrétne hodnoty m a n (napríklad aj pomocou počítača) a hľadať v tom isté pravidelnosti. S trochou šťastia môžeme takto dospieť k nasledovnému rozkladu (položíme $m = 2k + 1$ a $n = 2l + 1$).

$$\begin{aligned} 5^{2k+1} + 5^{2l+1} &= 5(5^{2k} + 5^{2l}) = (4+1)(5^{2k} + 5^{2l}) = \\ &= (2\cdot 5^k)^2 + (5^k)^2 + (2\cdot 5^l)^2 + (5^l)^2 = \\ &= (2\cdot 5^k - 5^l)^2 + (5^k + 2\cdot 5^l)^2 \end{aligned}$$

To je súčet dvoch štvorcov. Stojí za povšimnutie, že znamienka v zátvorkách môžeme medzi sebou vymeniť a hodnota výrazu sa nám nezmení, preto rozklad na súčet štvorcov nemusí byť určený jednoznačne.
No a teraz druhá implikácia. Pozor, nemôžeme len jednoducho tvrdiť, že $5^m + 5^n$ nevieme žiadnymi úpravami vyjadriť priamo ako súčet dvoch štvorcov. Čo ak by tie štvorce vôbec nesúviseli s mocninami päťky? Čo ak by sa nedali podľa nich pekne vyjadriť? My chceme poriadny dôkaz a tu prichádza na rad deliteľnosť a skúmanie zvyškov. Ako by to malo fungovať? Štvorce celých čísel môžu dávať len niekoľko rôznych zvyškov po delení niektorými číslami. Po delení trojkou len zvyšky 0 a 1, po delení štvorkou tiež len 0 a 1 a podobne. (Pozrite si úlohu 3.) A rovnako to funguje aj s mocninami päťky: po delení tromi sú to striedavo zvyšky 2 a 1, po delení štyrmi je zvyšok vždy 1 (skúste si tieto veci dokázať sami). Stačilo by nám nájsť číslo, po delení ktorým by dávali súčty štvorcov vždy iné zvyšky ako súčty mocnín päťky s exponentami rôznej parity, tieto by sa teda nikdy nemohli rovnať. Po počiatočných neúspechoch sa dostaneme až k číslu 8, ktoré spĺňa tieto požiadavky. Číslo 5^n totiž dáva po delení osmičkou zvyšok 5 pre n nepárne a 1 pre n párne, čiže $5^m + 5^n$ bude vždy dávať zvyšok 6. A čo štvorce? Tie dávajú zvyšky 0, 1 alebo 4 a súčet žiadnych dvoch z týchto čísel nie je 6.

Komentár: Podaktorí z vás dokázali indukciou, že $5 + 5^{2t+1}$ sa dá napísať ako súčet dvoch štvorcov pre všetky t (čo sa dá potom jednoducho rozšíriť na všetky nepárne m a n). Takto dostaneme rekurentné vyjadrenie štvorcov. Skúste si odvodiť, že v skutočnosti to bude ten istý rozklad ako vo vzorovom riešení.

Uvedomte si, že pri skúmaní zvyškov netreba skúšať všetky čísla. Ak už napríklad vieme, že delenie dvojkou a trojkou nevedie k cieľu, nemá zmysel skúšať deliť šestkou, nedá nám to o nič viac. Stačí sa teda zamerať na prvočísla a mocniny prvočísel.
A ako sme hodnotili? Za vyriešenie príkladu pre obe m a n párne sa dalo získať 0 bodov, 4 body sme dávali za časť s nepárnymi číslami a 5 bodov bolo za opačnú implikáciu. Samozrejme nejaký ten bodík hore-dole za náznaky správneho postupu či drobné chyby.

Poznámka: Súčet štvorcov je dobre preštudovanou oblasťou teórie čísel. Už Fermat objavil, že prirodzené číslo sa dá napísať ako súčet dvoch štvorcov práve vtedy, keď všetky prvočísla tvaru $4k+3$, ktoré sa vyskytujú v jeho prvočíselnom rozklade, majú párny exponent. Prvý kompletný dôkaz tohto tvrdenia pochádza od Eulera. Základným kameňom dôkazu je tzv. Lagrangeova identita $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$, podľa ktorej súčin dvoch čísel, ktoré sa dajú napísať ako súčet dvoch štvorcov, je tiež súčtom dvoch štvorcov. Všimnite si, že v našom dôkaze pre m a n nepárne využívame práve túto identitu. A čo ak povolíme viac ako dva štvorce? Iba čísla tvaru $4^n(8k+7)$ sa nedajú vyjadriť ako súčet troch štvorcov a štyri štvorce už stačia na napísanie všetkých prirodzených čísel (toto tvrdenie je známe ako Lagrangeova veta o štyroch štvorcoch). No a vôbec sa nemusíme obmedzovať len na štvorce. Existuje totiž funkcia g taká, že každé prirodzené číslo sa dá napísať ako súčet najviac $g(n)$ n-tých mocnín. Funkcia g rastie veľmi rýchlo: $g(2) = 4$, $g(3) = 9$, $g(4) = 19$, $g(5) = 37$, $g(6) = 73\dots$ Treba však podotknúť, že dôkaz tohto tvrdenia bol nájdený až v dvadsiatom storočí a je veľmi komplikovaný. Ak vás táto téma upútala, určite sa poobzerajte na internete (napr. `mathworld.wolfram.com`), dá sa tam nájsť fúra zaujímavých materiálov.

Úloha č. 10: *Pre reálne čísla a, b, c platí $a+b+c=0$. Dokážte, že potom platí nerovnosť*

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3 \ge 6abc\,.$$

Riešenie: (opravoval Peťo)
Pri prvom pohľade na nerovnosť vidíme, že ľavá strana je vždy kladná (dokonca väčšia alebo rovná trom), zatiaľ čo pravá strana môže byť záporná alebo nulová. Preskúmajme teda najskôr, pre aké hodnoty a, b, c platí $6abc \le 0$. Určite to platí, ak je aspoň jedna z nich rovná 0; vtedy $6abc = 0$. Keď sú dve hodnoty kladné a jedna záporná, tak $6abc < 0$. Nakoľko $a+b+c=0$, nemôžu byť všetky hodnoty kladné, takisto nemôžu byť všetky záporné. Ostala nám tak jediná možnosť, že dve hodnoty spomedzi a, b, c sú záporné a jedna kladná; pre všetky ostatné prípustné možnosti sme ukázali, že

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3 \ge 3 > 0 \ge 6abc,$$

teda pre ne dokazovaná nerovnosť platí.
Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $a > 0$, $b < 0$ a $c < 0$ (ak nerovnosť dokážeme pre takéto hodnoty, vďaka jej symetrickosti to rovnako urobíme pre zostávajúce možnosti). Nerovnosti sa dobre dokazujú, ak premenné, ktoré v nich vystupujú, sú kladné. Označme preto $x = -b$ a $y = -c$ (zo zápornosti b, c máme $x > 0$ a $y > 0$). Z predpokladu $a+b+c=0$ dostávame $a = x+y$. Po dosadení do dokazovanej nerovnosti a drobných úpravách dostávame

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3 \ge 6abc,$$
$$(x+y)^2x^2 + x^2y^2 + y^2(x+y)^2 + 3 \ge 6(x+y)xy, \tag{1}$$
$$x^4 + y^4 + 2x^3y + 2xy^3 + 3x^2y^2 + 3 \ge 6x^2y + 6xy^2. \tag{2}$$

Ak dokážeme, že nerovnosť (2) platí pre ľubovoľné kladné čísla x, y, bude platiť aj pôvodná nerovnosť (premyslite si, prečo). Na prvý pohľad sme úlohu príliš nezjednodušili. Avšak vďaka šikovnému preznačeniu sme na ľavej aj pravej strane dostali výrazy s kladnými premennými a s kladnými znamienkami. Nerovnosti takéhoto typu sa často dajú dokázať pomocou AG-nerovnosti (t. j. známej nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom). Tomuto nasvedčuje aj to, že pre $x = y = 1$ platí rovnosť. (To objavíme pri skúšobnom dosadení viacerých hodnôt. Neskúšali ste dosádzať konkrétne hodnoty? Prečo?)
Na pravej strane sú dva členy. Každý z nich chceme odhadnúť zhora súčtom niektorých členov z ľavej strany. Inými slovami, ľavú stranu chceme rozdeliť na dve časti, jedna bude väčšia ako člen $6x^2y$, druhá väčšia ako člen $6xy^2$. Naľavo máme o. i. členy $3x^2y^2$ a 3, ktoré sú symetrické vzhľadom na x a y. V rozdelení ľavej strany sa teda hádam rozdelia „napoly“. Nepárna trojka sa však delí na dve rovnaké časti zle, preto dokazovanú nerovnosť ešte vynásobme dvoma. Dostaneme

$$2x^4 + 2y^4 + 4x^3y + 4xy^3 + 6x^2y^2 + 6 \ge 12x^2y + 12xy^2. \tag{3}$$

Teraz už po krátkom skúšaní pohodlne objavíme dve AG-nerovnosti

$$\frac{x^4+x^4+x^3y+x^3y+x^3y+xy^3+x^2y^2+x^2y^2+x^2y^2+1+1+1}{12} \ge \sqrt[12]{x^{24}y^{12}} = x^2y,$$
$$\frac{y^4+y^4+xy^3+xy^3+xy^3+x^3y+x^2y^2+x^2y^2+x^2y^2+1+1+1}{12} \ge \sqrt[12]{x^{12}y^{24}} = xy^2$$

(nie je to jediná možnosť, dalo sa to rozdeliť aj inak). Ich sčítaním a prenásobením dvanástimi dostaneme nerovnosť (3) (prípadne prenásobením iba šiestimi priamo nerovnosť (2)), ktorú sme chceli dokázať. Tým je úloha vyriešená. Rovnosť nastane len vtedy, ak nastane v oboch AG-nerovnostiach, t. j. keď $x = y = 1$, čomu zodpovedá trojica $(a, b, c) = (2, -1, -1)$ (prípadne trojice $(-1, 2, -1)$ a $(-1, -1, 2)$ pri predpoklade $b > 0$, resp. $c > 0$).

Iné riešenie:
Dokážme iným spôsobom nerovnosť (1) pre kladné x a y. Ako naznačuje rovnosť pre hodnoty $x = y = 1$, dokazovaná nerovnosť by mohla byť „kritická" pre $x = y$. Ak označíme $z = (x + y)/2$ (mimochodom, vtedy $z = a/2$) a $\delta = (x - y)/2$, máme $x = z + \delta$, $y = z - \delta$. Situácia $x = y$ zodpovedá hodnote $\delta = 0$. Po dosadení do nerovnosti dostávame ekvivalentnými úpravami

$$\begin{gathered}(2z)^2(z+\delta)^2 + (z+\delta)^2(z-\delta)^2 + (z-\delta)^2(2z)^2 + 3 \geq 6 \cdot 2z(z+\delta)(z-\delta),\\ (2z)^2(2z^2 + 2\delta^2) + z^4 - 2z^2\delta^2 + \delta^4 + 3 \geq 12z(z^2 - \delta^2),\\ (9z^4 - 12z^3 + 3) + (\delta^4 + 6z^2\delta^2 + 12z\delta^2) \geq 0. \qquad (4)\end{gathered}$$

Druhá zátvorka na ľavej strane nerovnosti (4) je nezáporná, lebo $z > 0$ a $\delta^2 \geq 0$ (nulová je práve pre „kritickú" hodnotu $\delta = 0$). Prvá zátvorka sa dá upraviť (po nenáročnom zistení, že 1 je dvojnásobným koreňom polynómu v tejto zátvorke) na

$$9z^4 - 12z^3 + 3 = (z-1)^2(9z^2 + 6z + 3) = \underbrace{(z-1)^2}_{\geq 0}\underbrace{\left((3z+1)^2 + 2\right)}_{\geq 2} \geq 0.$$

Ľavá strana nerovnosti (4) je teda súčtom dvoch nezáporných výrazov. Tým je nerovnosť (4) (čiže aj nerovnosť (1), aj zadaná nerovnosť) dokázaná. Rovnosť nastane iba pre $z = 1$ a $\delta = 0$, čomu prislúchajú rovnaké trojice (a, b, c) ako v prvom riešení.

Iné riešenie:
(Podľa *Kataríny Turekovej*.) V oboch uvedených riešeniach sme najskôr po diskusii a dosadení *väzby* $a + b + c = 0$ úlohu previedli na nerovnosť s kladnými premennými. Uvedieme riešenie, ktoré takúto „prípravu" nepotrebuje. Skusmým dosadzovaním hodnôt a, b, c spĺňajúcich zadanú väzbu objavíme, že rovnosť v nerovnosti platí, keď dve z čísel sú rovné -1 a jedno je rovné 2. Nerovnosť by platila, keby sa nám (po prevedení všetkých členov naľavo) podarilo rozložiť ľavú stranu na súčet nezáporných výrazov. Ak taký rozklad existuje, jeho sčítance musia byť pre trojicu $(a, b, c) = (-1, -1, 2)$ nulové (a takisto pre trojice $(-1, 2, -1)$ a $(2, -1, -1)$). Vhodným sčítancom by mohol byť napríklad (zjavne nezáporný) výraz $(a+1)^2(b+1)^2$. Ten je nulový pre všetky tri uvedené trojice a zároveň jeho roznásobením vzniknú členy, ktoré sú aj v dokazovanej nerovnosti. Podobne sú vhodné aj sčítance $(b+1)^2(c+1)^2$ a $(c+1)^2(a+1)^2$. Ďalšie už je len vecou šikovného využívania zadanej väzby. Postupne dostávame

$$\begin{aligned}0 &\leq (a+1)^2(b+1)^2 + (b+1)^2(c+1)^2 + (c+1)^2(a+1)^2 =\\ &= (ab + \underbrace{a+b}_{=-c} + 1)^2 + (bc + \underbrace{b+c}_{=-a} + 1)^2 + (ca + \underbrace{c+a}_{=-b} + 1)^2 =\\ &= (a^2b^2 + c^2 + 1 - 2abc + 2ab - 2c) + (b^2c^2 + a^2 + 1 - 2abc + 2bc - 2a) + (c^2a^2 + b^2 + 1 - 2abc + 2ca - 2b) =\\ &= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3 - 6abc + (\underbrace{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca}_{=(a+b+c)^2=0}) - 2(\underbrace{a+b+c}_{=0}) =\\ &= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3 - 6abc.\end{aligned}$$

Dostali sme presne to, čo sme chceli dokázať. Rovnosť nastáva, keď sú nulové všetky tri sčítance zo začiatku úprav, t. j. keď dve z čísel a, b, c sú rovné -1 (kvôli väzbe je potom tretie rovné 2).

Komentár: V zadaní sme nevyžadovali vyšetriť rovnosť. Pri riešení je však dôležité uvedomiť si, kedy nastáva. Na základe toho ľahšie objavíme, ako nerovnosť dokázať, resp. niektoré nápady môžeme odmietnuť už v zárodku (napr. aplikáciu AG-nerovnosti priamo na zadaný tvar).
Uviedli sme tri rôzne dôkazy, medzi vašimi riešeniami sa však vyskytlo ešte veľa iných postupov. Možností, ako úlohu riešiť, bolo naozaj veľa. V každom riešení ale bolo nutné použiť väzbu zo zadania – bez nej nerovnosť neplatí, ako sa môžete sami presvedčiť.
Na nasledujúcich dvoch úlohách si môžete precvičiť to, čo ste sa naučili pri riešení tejto úlohy.
1. Nech a, b, c sú nezáporné reálne čísla také, že $a + b + c = 1$. Nájdite maximum výrazu $V = a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{12abc}$.
2. Zistite, či má polynóm $x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 2$ reálny koreň.

Úloha č. 11: *Nech* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť s počiatočnými členmi* $a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 15$ *a s predpisom*

$$a_n = 15a_{n-2} - 4a_{n-3} \qquad \text{pre } n \geq 4.$$

Dokážte, že ak je a_n *prvočíslo, tak aj* n *je prvočíslo.*

Riešenie: (opravoval Peťo G.)
Na začiatok sa vyplatí skúsiť si vypísať niekoľko členov skúmanej postupnosti (napríklad na počítači). Rýchlo si všimneme, že sa správa podľa jednoduchšej rekurencie než je uvedená v zadaní, spĺňa totiž pre $n \geq 3$ vzťah

$$a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}. \tag{1}$$

Aby sme si túto hypotézu potvrdili, dokážeme ju indukciou. Pre $n = 3$ možno platnosť vzťahu overiť jednoduchým dosadením, predpokladajme teda, že $n > 3$ a pre všetky menšie hodnoty naša postupnosť uvedenú rekurenciu spĺňa. Potom $a_n = 15a_{n-2} - 4a_{n-3} = 4(4a_{n-2} - a_{n-3}) - a_{n-2} = 4a_{n-1} - a_{n-2}$, čím sme ukázali, že naša postupnosť spĺňa rekurenciu (1) pre všetky $n \geq 3$. Zo vzťahu (1) možno tiež triviálnou indukciou ukázať, že naša postupnosť je rastúca a preto pre všetky $n \geq 2$ platí $a_n > 1$.
Ak budeme postupnosť skúmať ešte pozornejšie, zistíme, že koeficienty v rekurentnom zápise sú aj sami členmi našej postupnosti (vidno to už aj zo vzťahu (1) či pôvodného zadania; všimnite si analógiu s Fibonacciho postupnosťou v poznámke). Presnejšie povedané, platí

$$a_n = a_{k+1}a_{n-k} - a_k a_{n-k-1} \tag{2}$$

pre $n \geq 3$ a $1 \leq k \leq n-2$, čo si opäť dokážeme indukciou, tentoraz vzhľadom na k. Majme nejaké pevne zvolené n, potom pre $k = 1$ dostávame z dokazovaného vzťahu rekurenciu (1), ktorej platnosť sme už dokázali. Nech teda $k > 1$ a pre hodnotu $k-1$ rovnosť (2) platí. Potom

$$\begin{aligned} a_n &= a_{(k-1)+1}a_{n-(k-1)} - a_{k-1}a_{n-(k-1)-1} = a_k a_{n-k+1} - a_{k-1}a_{n-k} = \\ &= a_k(4a_{n-k} - a_{n-k-1}) - a_{k-1}a_{n-k} = (4a_k - a_{k-1})a_{n-k} - a_k a_{n-k-1} = \\ &= a_{k+1}a_{n-k} - a_k a_{n-k-1}\,, \end{aligned}$$

čím sme vzťah (2) dokázali.
Toto zistenie nám už dáva istú predstavu o tom, ako sa naša postupnosť správa a sme teda pripravení zasadiť príkladu rozhodujúci úder v podobe nasledujúceho tvrdenia: platí $a_k \mid a_{n\cdot k}$ pre všetky $k, n \geq 1$. Dokazovať ho budeme – ako inak – indukciou, a to vzhľadom na n. Pre $n = 1$ je tvrdenie triviálne, preto predpokladajme, že $n > 1$. Potom podľa (2) dostávame $a_{n\cdot k} = a_{k+1}a_{(n-1)k} - a_k a_{(n-1)k-1}$. Z indukčného predpokladu vieme, že $a_{(n-1)k} = c \cdot a_k$ pre nejaké celé číslo c. Potom $a_{n\cdot k} = a_k(a_{k+1}c - a_{(n-1)k-1})$ a preto $a_k \mid a_{k\cdot n}$, čo sme chceli dokázať.
Pozorný čitateľ si už iste všimol, že tým je úloha vyriešená: Ak by bolo a_n prvočíslo, ale číslo n by bolo zložené, tak $n = r \cdot s$ pre nejaké celé čísla r, s väčšie ako 1. Ale potom podľa dokázaného tvrdenia platí $a_r \mid a_n$ a keďže naša postupnosť je rastúca a všetky jej členy okrem prvého sú väčšie ako 1, platilo by $1 < a_r < a_n$ a preto a_n by malo deliteľa rôzneho od jednotky a seba samého, čo je spor.
My sa však s týmto výsledkom neuspokojíme a ukážeme navyše, že v našej postupnosti sa nevyskytuje vôbec žiadne prvočíslo! Na párnych pozíciách skutočne nemôže byť, to vyplýva z posledného dokázaného faktu $(a_2 | a_{2k})$ a pre $n = 2$ z definície tejto postupnosti. A ako je to s nepárnymi pozíciami? Nech $n = 2k+1$, podľa (2) platí

$$\begin{aligned} a_n &= a_{k+1}a_{(2k+1)-k} - a_k a_{2k+1-k-1} = a_{k+1}^2 - a_k^2 = \\ &= (a_{k+1} + a_k) \cdot (a_{k+1} - a_k) \end{aligned}$$

Stačí teda ukázať, že pre všetky k platí $1 < a_{k+1} - a_k < a_{2k+1}$, ale to už je jednoduché, takže si to pekne skúste sami. Napríklad tou indukciou… :)
Poznámka: Overte si, že indukciu robíme poriadne, teda má prvý aj druhý krok, aj keď to výslovne nespomíname. Určite ste si všimli nesmiernu silu indukcie pri práci s rekurentnými postupnosťami. Pozor, nie je všemocná. Ale postačí na to, aby ste si analogické tvrdenia dokázali pre Fibonacciho postupnosť ($F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$): platia vzťahy $F_{m+n} = F_m F_{n-1} + F_{m+1}F_n$, $F_k \mid F_{kn}$ aj $F_{2k+1} = F_{k+1}^2 - F_k^2$. Skúste odhaliť ďalšie takéto zákonitosti, napríklad zistiť súčet $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$. Ako by sa dali popísať postupnosti, ktoré majú tieto vlastnosti? Súvisí to s ich rekurentným predpisom? (Tieto otázky sú ťažké. Skúste nájsť aspoň čiastočnú odpoveď.)
Všimnite si, že v celom dôkaze sa stále treba starať o ohraničenia, napr. $1 \leq k \leq n-2$. Tomuto sa dá vyhnúť, ak si rozšírime našu postupnosť aj o členy so záporným indexom. Akú hodnotu by malo mať číslo a_0? Takú, aby platila rekurencia, t. j. $a_0 = 4a_1 - a_2$. Preto $a_0 = 0$. Podobne vieme dorátať aj $a_{-1} = 4a_0 - a_1 = -1$ a tak Ďalej. Uvážte si, nakoľko vieme potom rozšíriť platnosť našich tvrdení o postupnosti.
Určite poznáte geometrickú postupnosť. Jej výhoda oproti týmto tu spomínaným postupnostiam je tá, že vieme n-tý člen zrátať bez toho, aby sme potrebovali rátať predchádzajúce. Dá sa aj pre postupnosť z nášho príkladu nájsť nejaký predpis, pomocou ktorého budeme vedieť rátať rovno n-tý člen? Pozrime sa na geometrickú postupnosť. Spĺňa nejakú rekurenciu? A naopak, ako vyzerá geometrická postupnosť, ktorá spĺňa rekurenciu našej postupnosti? Všimnite si, že ak nejaké dve postupnosti spĺňajú náš rekurentný predpis, tak ho spĺňa aj ich súčet a násobok jednej z nich. Nevieme „nasčítať“ našu postupnosť z nejakých jednoduchších? Dotiahnutím týchto myšlienok do konca dostaneme, že Fibonacciho postupnosť má predpis

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Premyslite si to a skúste podobný predpis nájsť pre postupnosť z našej úlohy. Dal by sa takýto predpis hľadať, aj keby sme poznali len pôvodnú rekurenciu $a_n = 15a_{n-2} - 4a_{n-3}$ zo zadania a nie tú upravenú $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$?

Milí riešitelia!
Keďže nikto neposlal riešenia úloh 12 a 13b), zostávajú tieto úlohy do letného semestra. Preto vzorové riešenia k týmto úlohám nebudú. Nie sú také ťažké, aby ste ich nedokázali zrátať sami. Budeme radi, ak si na to nájdete čas a venujete týmto úlohám primerané úsilie.

Úloha č. 13: *a) (3 body) Daná je priamka a na nej $mn+1$ úsečiek. Dokážte, že medzi týmito úsečkami existuje $m+1$ navzájom disjunktných úsečiek alebo $n+1$ úsečiek, ktoré majú spoločný bod.*

Riešenie: (opravovali Fero a Mazo)
Čo s takouto úlohou? V prvom rade si treba niečo vyskúšať. Nakreslíme si niekoľko úsečiek a overíme, či spĺňajú tvrdenie zo zadania. Prečo sú dôležité predpoklady, ktoré o úsečkách majú platiť? Je podstatné, že všetky ležia na priamke? Popri zoznamovaní sa s úlohou si spomenieme na mnohé úlohy, ktoré sme už vyriešili a táto nám ich čímsi pripomína. Čím? Rovnaké predpoklady? Dokazovali sme podobné tvrdenie? Ako sme k nemu pristupovali? Sporom? Čo pomohlo pri riešení v minulosti? Dirichletov princíp, vhodný algoritmus, extremálny princíp[2]? Klásť si správne otázky (a odpovedať na ne) je veľmi dobrou cestou k nájdeniu riešenia úlohy. Táto úloha sa dá vyriešiť zostrojením algoritmu, ktorý buď nájde $m+1$ disjunktných úsečiek, alebo $n+1$ úsečiek so spoločným bodom. Takýto algoritmus môže napríklad skúsiť vyberať disjunktné úsečky „pažravým“ (greedy) spôsobom. Vezme prvú zľava, potom ďalšiu hneď za ňou, a tak ďalej, kým sa dá. Keď sa už nedá, začne opäť zľava vyberať z nepoužitých úsečiek. Skúste domyslieť tento algoritmus, zatiaľ si ukážeme iné riešenie od *Petra Perešíniho.*
Predpokladajme, že medzi našimi úsečkami nie je žiadnych $n+1$ takých, ktoré majú spoločný bod. Ukážeme, že potom medzi nimi vieme nájsť $m+1$ po dvojiciach disjunktných úsečiek. Otočme si danú priamku tak, aby pred nami ležala vodorovne. Nech u je tá úsečka, ktorej pravý koniec je najviac vľavo (ak je takých úsečiek viac, tak vezmeme ľubovoľnú z nich), a tento jej krajný bod označme A. V akej polohe vzhľadom na u môžu byť ostatné úsečky? Buď sú s u disjunktné alebo majú s u spoločný bod. Zamerajme sa na druhý prípad. Pravé konce všetkých ostatných úsečiek sú napravo od A, preto ak má niektorá z nich spoločný bod s u, tak aj A je ich spoločným bodom (rozmyslite si to). Takýchto úsečiek však môže byť najviac $n-1$, inak by spolu s u tvorili $n+1$ úsečiek so spoločným bodom A. Zapamätajme si teraz úsečku u a spolu so všetkými ostatnými, s ktorými má spoločný bod, ju jednoducho vymažme. Takto sme vymazali najviac n úsečiek a všetky zostávajúce sú už s u disjunktné. Keďže máme až $mn+1$ úsečiek, môžeme tento proces zopakovať aspoň $(m+1)$-krát, skôr všetky úsečky určite nevymažeme. No a čo sme tým získali? Predsa $m+1$ zapamätaných úsečiek. Tie sme vyberali tak, že každá z nich je disjunktná so všetkými nasledovnými, máme teda množinu $m+1$ po dvojiciach disjunktných úsečiek.

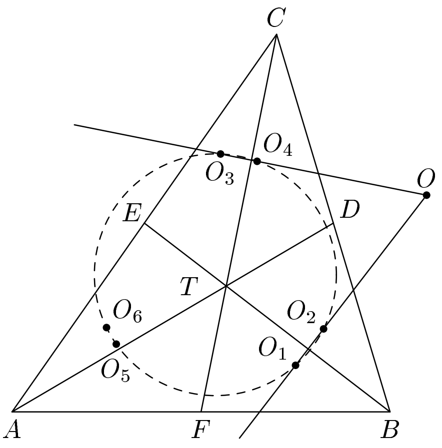
Iné riešenie:
(Podľa *Ondreja Budáča.*) Pozor, toto riešenie je len pre silné povahy `:)`. Definujme si čiastočné usporiadanie na danej množine $mn+1$ úsečiek nasledovným spôsobom: nech $u \le u$ pre všetky u a nech $u \le v$, ak úsečky u a v sú disjunktné a u leží celá naľavo od v. Ľahko overíme, že takto definovaná relácia je reflexívna ($u \le u$), tranzitívna ($u \le v \wedge v \le w \Rightarrow u \le w$) a antisymetrická ($u \le v \wedge v \le u \Rightarrow u = v$), spĺňa teda všetky požiadavky na čiastočné usporiadanie. Môžeme preto použiť *Dilworthovu lemu*[3], podľa ktorej sa v našej množine nachádza reťazec dĺžky $m+1$ alebo antireťazec dĺžky $n+1$. V prvom prípade máme postupnosť $m+1$ úsečiek takých, že každá z nich je menšia ako nasledovná úsečka, čo nie je nič iné ako $m+1$ disjunktných úsečiek. Naopak v druhom prípade máme $n+1$ po dvojiciach neporovnateľných úsečiek. To znamená, že každá dvojica z nich má spoločný bod (inak by sa dali porovnať). No a dôkaz toho, že prienik ľubovoľného počtu úsečiek s touto vlastnosťou je neprázdna množina, už nechávame na vás (je podstatné, že tých úsečiek je konečne veľa?)[4].

Poznámka: Úsečky $u_1, u_2, \ldots, u_k$ tvoria *reťazec*, ak $u_1 \le u_2 \le \cdots \le u_k$. Množina úsečiek tvorí *antireťazec*, ak sú navzájom neporovnateľné. Ak vás zaujalo, že existujú aj iné usporiadania, než to bežné na reálnych číslach, môžete sa poobzerať po ďalších zdrojoch informácií na internete či v knižnici. Hľadajte napríklad niečo o zväzoch či Spernerových systémoch.

Úloha č. 14: *Trojuholník ABC je ťažnicami rozdelený na šesť menších trojuholníkov. Dokážte, že stredy kružníc opísaných týmto šiestim trojuholníkom ležia na jednej kružnici.*

Riešenie: (opravovali Feráč a Mazo)

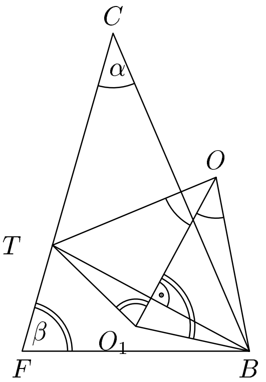
[2] Zvolíme si prvok, ktorý je v istom zmysle maximálny či minimálny a skúsime to nejako využiť v ďalších úvahách.
[3] `http://mathworld.wolfram.com/DilworthsLemma.html`
[4] Môžete sa skúsiť poobzerať po tvrdení známom ako *Hellyho veta* pre konvexné útvary `:)`.



Zaveďme si vhodné označenie. Nech stredy strán BC, CA, AB sú po rade D, E, F, ťažisko trojuholníka ABC nech je T. Stredy kružníc opísaných trojuholníkom BFT, BDT, CDT, CET, AET, AFT označíme zaradom $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6$. Keďže v riešení budeme často používať dĺžky úsečiek, dohodneme sa, že dĺžku úsečky XY budeme značiť XY (bez „absolútnej hodnoty", možno ste viac zvyknutí na označenie $|XY|$).

Pozrime sa na to, čo máme dokázať. Nejakých šesť bodov leží na kružnici. Narysujeme si presný obrázok, je to nejaká špeciálna kružnica? Nevieme, nevidno, že by prechádzala význačnými bodmi, aj stred má kdesi mimo. Skúsme dokázať aspoň to, že nejaké štyri z našich bodov ležia na jednej kružnici. Túto vlastnosť štyroch bodov vieme sformulovať viacerými ekvivalentnými spôsobmi, napríklad pomocou obvodových uhlov alebo pomocou súčtu protiľahlých uhlov v štvoruholníku. Ani jeden z týchto spôsobov sa tu veľmi nehodí, pretože uhly na obrázku sú „škaredé", sú to totiž uhly pri ťažniciach (o ich vzájomných vzťahoch nevieme takmer nič). Neznamená to, že nemôžeme aj takýto smer úvah vyskúšať, podarilo by sa nám tak dokázať, že trojuholníky $O_1O_3O_5$ a $O_4O_6O_2$ sú podobné. Nádejnejšie vyzerajú vzdialenosti, keďže ťažnice sa delia v známych pomeroch a tiež tam máme stredy strán.

Zatiaľ nie je jasné, ktorú štvoricu bodov by sme mali skúmať. Pozrime sa na situáciu. Body O_1, O_2 ležia na osi úsečky BT. Body O_3, O_4 ležia na osi úsečky CT. Tieto dve osi strán sa pretínajú v strede kružnice opísanej trojuholníku BCT, označme ho O. (Rada do života: keby ste si tie osi nakreslili prikrátke, iba ako úsečky, a nepretli by sa vám, tak by ste o tomto bode ani neuvažovali. Preto stojí za pokus predĺžiť si úsečky na priamky a popozerať sa, či ich presečníky nie sú nejaké významné body.) A nielen to. Body O_1, O_2, O_3, O_4 ležia na kružnici práve vtedy, keď $OO_1 \cdot OO_2 = OO_3 \cdot OO_4$. (Toto vyplýva z vlastností mocnosti bodu ku kružnici, nakreslite si to niekde osobitne a dokážte, ak ste sa s tým ešte nestretli. Pozor, sú tam dve implikácie, nie iba jedna!) Toto stojí za pokus dokázať, poďme teda zrátať veľkosť úsečiek OO_1 až OO_4. Budeme ich vyjadrovať podľa možnosti pomocou spoločných prvkov, aby sme po dosadení získaných hodnôt do vzťahu $OO_1 \cdot OO_2 = OO_3 \cdot OO_4$ vedeli ľahko dokázať, že platí rovnosť. Trojuholníky, v ktorých sú O_1 až O_4 stredmi opísaných kružníc, majú (okrem iného) „spoločný" trojuholník BTC.



Body O, O_1 sú stredy kružníc opísaných trojuholníkom BTC, BTF. Tieto trojuholníky sú k sebe pekne „prilepené". Uhly pri stredoch opísaných kružníc vieme vyjadriť dobre, navyše uhly CTB a FTB sú doplnkové. Dĺžku OO_1 môžeme skúsiť zrátať z trojuholníka OO_1B. Plán máme, poďme ho vykonať. Nech $|\sphericalangle BCT| = \alpha$, $|\sphericalangle BFT| = \beta$. Jednoduchým porátaním stredových uhlov dostaneme $|\sphericalangle O_1OB| = \alpha$, $|\sphericalangle OO_1B| = \beta$. Inak povedané, trojuholníky BFC a BO_1O sú podobné. Preto platí $OO_1/BO = FC/BC$ a z toho vieme dĺžku

$$OO_1 = \frac{BO \cdot FC}{BC} = \frac{3}{2}\,\frac{BO \cdot CT}{BC}\,.$$

Teraz sa pozrieme na dĺžku OO_2. Bod O_2 je „taký istý" ako bod O_1, tiež je to stred opísanej kružnice jedného z tých šiestich malých trojuholníčkov. Preto by sa táto vzdialenosť mala dať zrátať podobne, ako vzdialenosť OO_1. Vzdialenosť OO_1 sme vyjadrili pomocou „prvkov" trojuholníka BTC. Preto skúsime využiť tento trojuholník aj teraz. Trojuholníky CTB a DTB sú v podobnej pozícii ako tie pred chvíľou, stredy kružníc im opísaných sú body O a O_2. Tentokrát vieme počítaním stredových uhlov ukázať, že $|\sphericalangle TOO_2| = |\sphericalangle TCB|$ a $|\sphericalangle TO_2O| = 180^\circ - |\sphericalangle TDB| = |\sphericalangle TDC|$. To znamená, že trojuholníky TO_2O a TDC sú podobné a preto $OO_2/TO = DC/CT$, z čoho dostaneme

$$OO_2 = \frac{TO \cdot CD}{CT} = \frac{1}{2}\,\frac{TO \cdot BC}{CT}\,.$$

Dajme dokopy získané hodnoty (využijeme, že $OB = OT = OC$).

$$OO_1 \cdot OO_2 = \frac{3}{2}\,\frac{BO \cdot CT}{BC} \cdot \frac{1}{2}\,\frac{TO \cdot BC}{CT} = \frac{3}{4} BO \cdot TO = \frac{3}{4} TO^2$$

Podobne vieme dokázať, že $OO_3 \cdot OO_4 = 3/4 \cdot TO^2$ a preto body O_1, O_2, O_3, O_4 ležia na kružnici. Analogicky aj štvorice bodov O_3, O_4, O_5, O_6 a O_5, O_6, O_1, O_2 ležia na kružnici.

Čo nám ešte chýba ku šťastiu? Dôkaz, že tieto tri kružnice, na ktorých naše štvorice ležia, sú totožné. Poďme sporom. Nech nie sú totožné. Ak dve sú totožné, tak všetkých 6 bodov leží na jednej kružnici a máme spor. Inak môžeme predpokladať, že sú tie kružnice navzájom rôzne a teda každé dve z nich sa pretínajú v práve dvoch bodoch. Chordály dvojíc jednotlivých kružníc (t. j. priamky O_1O_2, O_3O_4, O_5O_6) sa pretínajú v jednom bode. Tieto priamky sú však osami úsečiek BT, CT, AT, preto sa v jednom bode pretínať nemôžu. Hotovo.

Je náš dôkaz správny pre ľubovoľnú konfiguráciu bodov? Napríklad body $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6$ môžu byť na tej kružnici v rôznom poradí podľa tupouhlosti istých trojuholníkov. Náš dôkaz však funguje, keďže toto poradie bodov nevyužíva. Overte si to po jednotlivých krokoch.