Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia 1. série letného semestra

Úloha č. 1: *Vo svietniku sú dve sviečky, ktoré majú rovnakú výšku. Prvá zhorí za päť hodín a druhá za tri hodiny. Obe sviečky zapálime naraz. Po koľkých minútach bude prvá sviečka trikrát vyššia ako druhá?*

Riešenie: (opravovala Baja)
Označme si nami hľadaný čas písmenkom t. (Nech je v minútach.) Vieme, že prvá sviečka zhorí za päť hodín, čo je 300 minút. Ak celá sviečka zhorí za päť hodín, tak za jednu hodinu zhorí 1/5 sviečky. Teda horí rýchlosťou 1/5 sviečky za hodinu alebo 1/300 sviečky za minútu. Za čas t z nej potom zhorí $(1/300)t$. Keďže druhá sviečka horí rýchlejšie (rýchlosťou 1/3 sviečky za hodinu alebo 1/180 sviečky za minútu), tak za čas t zhorí $(1/180)t$ z tejto sviečky. V zadaní bolo povedané, že po čase t bude prvá sviečka trikrát taká vysoká ako druhá sviečka. To nám dáva rovnicu

$$z_1 = 3 \cdot z_2,$$

kde z_1 označuje zvyšok prvej a z_2 zvyšok druhej sviečky. Ako zistíme hodnotu z_1? Už vieme, že z prvej sviečky zhorí za t minút $(1/300)t$ sviečky. Teda túto časť musíme od „celej“ sviečky odobrať. Takže nám zostane $1 - (1/300)t$ sviečky. A to je naše hľadané z_1. Podobne z druhej sviečky musíme odobrať to, čo nám zhorí. Preto nám z druhej sviečky zostane $1 - (1/180)t$ sviečky, čiže poznáme aj z_2 sviečky. Po dosadení do rovnice dostaneme

$$1 - \frac{1}{300}t = 3\left(1 - \frac{1}{180}t\right).$$

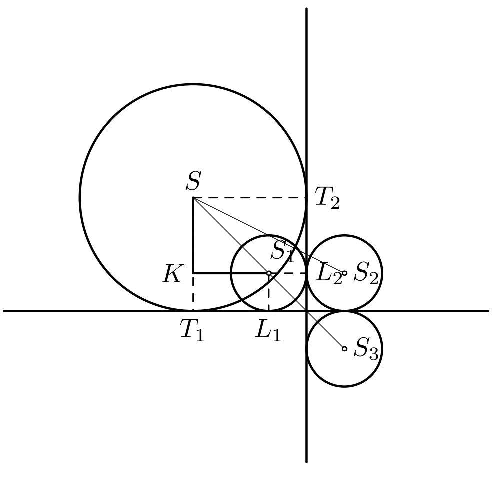
Z toho už ľahko vypočítame, že $t = 150$ minút.

Úloha č. 2: *Dve kružnice s polomermi 1 m a 3 m chceme umiestniť v rovine tak, aby spĺňali tieto dve podmienky:*

- *Existujú dve priamky, ktoré sú na seba kolmé a obe sa dotýkajú obidvoch kružníc.*
- *Vzdialenosť stredov daných dvoch kružníc je čo najmenšia.*

Ako máme tieto kružnice umiestniť? Aká bude vzdialenosť ich stredov a prečo bude najmenšia?

Riešenie: (opravovali Ivka a Zuzka M.)
Najlepší spôsob, ako začať riešiť geometrickú úlohu, je nakresliť si obrázok. Môžeme začať napríklad tým, že si nakreslíme dve na seba kolmé priamky. Teraz chceme dokresliť dve kružnice tak, aby sa dotýkali týchto priamok. Navyše ale chceme, aby vzdialenosť stredov týchto kružníc bola čo najmenšia.



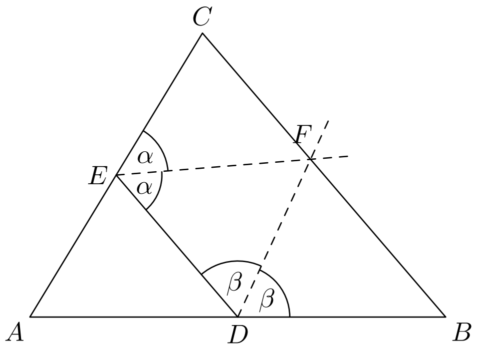
Možností, ako nakresliť tieto dve kružnice, nie je veľa. Keďže dve na seba kolmé priamky nám rozdeľujú rovinu na akési štvrtiny (ktoré sa tiež nazývajú kvadranty), máme štyri možnosti, ako umiestniť tieto kružnice. Nájsť tieto štyri vzájomné polohy sa podarilo väčšine z vás. Pri zisťovaní, ktorá poloha spĺňa druhú podmienku zo zadania, môžeme vypočítať všetky vzdialenosti stredov kružníc a porovnať ich. Stačí si však uvedomiť, že v troch prípadoch je vzdialenosť stredov väčšia ako súčet polomerov kružníc a iba v jednom je menšia. Teraz už musíme iba vyrátať túto vzdialenosť. Keďže priamky dotýkajúce sa kružnice sú dotyčnice, každý z uhlov ST_1O, ST_2O, S_1L_1O, S_1L_2O je pravý. (Pozri obrázok.) Polomer kružnice k je tri metre, polomer kružnice k_1 jeden meter. Veľkosť úsečky S_1S môžeme vyrátať z pravouhlého trojuholníka SS_1K pomocou Pytagorovej vety. Veľkosť úsečiek KS a KS_1 je dva metre. Môžeme teda vyjadriť vzdialenosť stredov

$$|S_1S| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$$

Takže ako väčšina z vás odhalila, správna odpoveď bola umiesniť kružnice do jedného kvadrantu.

Úloha č. 3: *V trojuholníku ABC označme D a E stredy strán AB a AC.*
a) Dokážte, že ak priesečník osí uhlov BDE a CED leží na úsečke BC, tak dĺžka strany BC je rovná aritmetickému priemeru dĺžok strán AB a AC.
b) Dokážte aj opačné tvrdenie, teda že ak je dĺžka strany BC rovná aritmetickému priemeru dĺžok strán AB a AC, tak priesečník osí uhlov BDE a CED leží na strane BC.
Poznámka: Aritmetický priemer dĺžok strán AB, AC je číslo $(|AB| + |AC|)/2$.

Riešenie: (opravovali Zuzka Ceľuchová a Zuska Molnárová)



a) Označme priesečník osí uhlov CED a BDE ako F. Vieme, že leží niekde na strane BC. Všimnime si, že zo zadania vieme v podstate len dva dôležité fakty. Body D, E sú stredy strán AB, AC a priamky DF, EF sú osi uhlov EDB, CED. V preklade to znamená, že platia nasledovné rovnosti: $|AD| = |DB| = |AB|/2$, $|AE| = |EC| = |AC|/2$, $|\sphericalangle DEF| = |\sphericalangle CEF|$, $|\sphericalangle EDF| = |\sphericalangle BDF|$. Označme si veľkosti týchto uhlov ako α, β (ako na obrázku). Čo vieme z týchto skutočností využiť v našej úlohe? Snažíme sa dokázať, že $|BC| = |AB|/2 + |AC|/2$, čo sú práve spomínané dĺžky úsečiek AD, DB a AE, EC. Bolo by teda fajn, keby sa nám podarilo ukázať, že strana BC sa „skladá“ z úsečiek s rovnakými dĺžkami a našou jedinou „zbraňou“ je fakt, že poznáme nejaké uhly. Vyzerá to tak, že sa budeme snažiť nájsť vhodné rovnoramenné trojuholníky, z ktorých nám vypadne, že strana BC sa naozaj dá rozdeliť na dve úsečky sdĺžkami $|AB|/2, |AC|/2$. Ako na to? Vieme, že DE je strednou priečkou trojuholníka ABC. O stredných priečkach vieme, že sú rovnobežné so stranami trojuholníka. V našom prípade platí $DE \parallel BC$. A teraz hoďme poriadny kukuč na uhly na obrázku. Keďže $DE \parallel BC$, uhly DEF a EFC sú striedavé, čiže majú rovnakú veľkosť. Z toho istého dôvodu majú aj uhly EDF a DFB rovnakú veľkosť. Ahaho, čo nevidíme? V trojuholníku EFC máme dva uhly s veľkosťou α a v trojuholníku DBF máme dva uhly s veľkosťou β. To znamená, že tieto trojuholníky sú rovnoramenné, pričom strany EF a DF sú ich základne. A tu už máme úlohu takmer vyriešenú. Stačí si uvedomiť, že musí platiť $|EC| = |CF| = |AC|/2$ a $|DB| = |BF| = |AB|/2$. Dĺžka strany BC je $|BF| + |FC| = |AB|/2 + |AC|/2 = (|AB| + |AC|)/2$, čo je aritmetický priemer veľkostí strán AB a AC. A presne to sme chceli dokázať.

b) V tejto úlohe sa možno vybrať viacerými smermi. Vychádzame z toho, že $|BC| = (|AB|+|AC|)/2$. Potom existuje na strane BC taký bod Z, že rozdeľuje stranu BC na dve časti tak, že platí $|BZ| = |AB|/2$, $|ZC| = |AC|/2$. Keďže $|DB| = |BZ|$ a $|EC| = |CZ|$, tak trojuholníky DBZ a EZC sú rovnoramenné. To znamená, že $|\sphericalangle ZDB| = |\sphericalangle DZB|$ a $|\sphericalangle CEZ| = |\sphericalangle EZC|$. Z časti a) už poznáme dvojice striedavých uhlov (prečo by sa im malo v časti b) niečo stať, však áno?). Keď si to celé dáme dokopy, triumfálne vyhlásime, že platí $|\sphericalangle CEZ| = |\sphericalangle ZED|$, a teda EZ je osou uhla CED. Podobne platí $|\sphericalangle EDZ| = |\sphericalangle ZDB|$, a teda DZ je osou uhla EDB. Takže osi príslušných uhlov sa pretínajú práve v bode Z, na strane BC. Tým je dôkaz hotový.

Iný uhol pohľadu nám ponúka nepriamy dôkaz tohto tvrdenia. Ten je založený na dôkaze obmenenej implikácie. Pôvodná implikácia znela „Ak $|BC|$ je aritmetickým priemerom dĺžok strán $|AB|$, $|AC|$, potom priesečník osí uhlov BDE a DEC leží na strane BC“. Obmenené tvrdenie je takéto: „Ak priesečník osí uhlov BDE a DEC neleží na strane BC, potom $|BC|$ nie je aritmetickým priemerom dĺžok strán $|AB|$, $|AC|$“. Ak máte čas a chuť, zamyslite sa nad tým, čím sa úlohy v tomto prípade líšia.

Úloha č. 4: *a) Každý bod roviny je ofarbený niektorou z dvoch farieb. Dokážte, že v tejto rovine existujú dva body rovnakej farby vzdialené od seba presne jeden meter.*
b) Keďže máme radšej pestrejší svet, ofarbíme našu rovinu troma farbami. Dokážte, že aj teraz existujú v tejto rovine dva body rovnakej farby vzdialené presne jeden meter.

Riešenie: (opravoval Bebe)

a) Najskôr si vyberieme dve farby, ktorými je celá rovina ofarbená. Napríklad oranžovú a zelenú. Pozrime sa teraz na nejaký zelený bod A. Ak by neexistoval žiaden zelený bod v rovine, tak zjavne existujú dva body oranžovej farby presne meter od seba. Všimnime si teraz kružnicu so stredom v bode A a polomerom jeden meter. Akej farby sú body na tejto kružnici? Keby na nej bol zelený bod, tak sme našli dvojicu bodov, ktorá je od seba vzdialená jeden meter a má rovnakú farbu. Preto predpokladajme, že celá táto kružnica je oranžová. Zvoľme si teraz oranžový bod B niekde na našej kružnici. Ak na kružnici so stredom B a polomerom jeden meter nájdeme nejaký oranžový bod, tak sme našli hľadanú dvojicu bodov. Predpokladajme preto, že všetky body na tejto kružnici sú zelené. Teraz máme dve kružnice s polomerom jeden meter, ktorých stredy sú od seba vzdialené jeden meter. Potom ale majú dva priesečníky. Akú farbu majú tieto priesečníky? Ak je jeden z nich oranžový, našli sme dvojicu zo zadania spolu s bodom B, ak je zelený, tak s bodom A. Každopádne sme však takú dvojicu našli.

Iné riešenie:

Ak chceme dokázať, že také dva body existujú stačí ich v tej rovine jednoducho nájsť. Po chvílke rozmýšľania nás napadá rovnostranný trojuholník so stranou jeden meter. Koľko má vrcholov? Tri. A koľko máme farieb? Len dve! Takže nejaké dva z týchto vrcholov musia mať rovnakú farbu. A teda tieto dva body sú tie, ktoré sme chceli nájsť.

b) Skúsme dôkaz sporom. Predpokladajme, že vieme ofarbiť rovinu tak, aby neexistovala dvojica bodov rovnakej farby vo vzdialenosti jedného metra. Pridajme si k našim dvom farbám ešte fialovú. Postupujme najskôr ako v predošlom prípade. Skúsme nájsť nejaký útvar zo štyroch bodov tak, aby každá dvojica bodov bola od seba vzdialená jeden meter. Keďže máme tri farby, tak nejaká dvojica vrcholov by musela mať rovnakú farbu. A tým by bol príklad vyriešený. Po dlhom hľadaní však môžeme našu snahu vzdať, lebo taký útvar v rovine neexistuje. Takže to budeme musieť dokázať inak.

Vezmime ľubovoľný bod roviny, ktorý má fialovú farbu a označme ho písmenkom A. Keby taký bod neexistoval, nastala by situácia z časti a). Pozrime sa na všetky body vzdialené od bodu A presne jeden meter. Možinou takýchto bodov bude zrejme kružnica. Tá musí byť zeleno-oranžová, lebo inak by sme našli dva body fialovej farby vzdialené od seba jeden meter. Keďže najdlhšia tetiva tejto kružnice má dva metre (je to priemer), nájdeme tam aj takú, ktorá bude mať presne jeden meter. Označme jej koncové body ako B a C. Pokiaľ by mali rovnakú farbu opäť máme dvojicu bodov rovnakej farby v metrovej vzdialenosti a teda jeden z nich musí byť zelený a druhý oranžový (nech B je oranžový a C je zelený – ak by tomu tak nebolo, tak stačí vymeniť označenie bodov B a C za opačné). Pozrime sa teraz na všetky body, ktoré sú od bodu B vzdialené jeden meter a takisto na všetky body, ktoré sú od bodu C vzdialené jeden meter. Obe tieto množiny bodov budú kružnice a ich prienikom budú dva body. Rozmyslite si prečo nie viac alebo menej. Bude to bod A, pretože je od B aj C vzdialený meter a nový bod, ktorý označíme D. Ten nemôže byť zelený ani oranžový, pretože body B a C, od ktorých je bod D vzdialený jeden meter, majú oranžovú a zelenú farbu. Teda musí byť fialový. Ale aj A je fialový a navyše ľubovolný v rovine. Z toho dostávame veľmi peknú vlastnosť našej trojfarebnej roviny a to, že ľubovolné dva body v rovine vo vzdialenosti $\sqrt{3}$ metrov (aby sme získali túto vzdialenosť, stačí použiť pytagorovu vetu pre trojuholníky ABE a DBE, kde E je stred strany BC) musia mať rovnakú farbu.

Uvažujme teraz o rovnoramennom trojuholníku KLM so stranami dĺžky $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ a 1 metrov. Nech má vrchol oproti základi, ktorý označíme M nejakú farbu. Potom ju musia mať aj vrcholy K a L, lebo sú od neho vzdialené $\sqrt{3}$ metrov. Ale tie sú od seba vzdialené jeden meter a teda sme našli dva body ktoré sú rovnakej farby. Tým pádom sme dokázali aj časť b).

Komentár: Pre tých, ktorí by si nabudúce chceli ušetriť robotu mám jednu radu. Stačilo dokázať len časť b) a o časti a) prehlásiť, že je to ten istý prípad, ak dve rôzne farby budeme považovať za rovnaké. Toto sa dá využiť nielen v tomto, ale aj v iných príkladoch, ktoré majú viac častí. A ešte jedna otázka na záver, pokiaľ by ste sa počas dlhých jarných večerov nudili: Ako je to so štyrmi či viacerými farbami?

Úloha č. 5: *Na oslave sa zišlo desať priateľov. Posadali si okolo okrúhleho stola, každý na miesto označené štítkom so svojim menom. Okolo jedenástej hodiny vyšli všetci na chvíľu na terasu a sledovali ohňostroj. Po návrate si každý sadol buď na svoje pôvodné miesto, alebo o jedno miesto vedľa (napravo alebo naľavo). Koľkými rôznymi spôsobmi si mohli posadať okolo stola?*

Riešenie: (opravovali Kenny a Miško)

Predtým, ako sa pustíme do samotného riešenia, označme priateľov postupne (napríklad v smere hodinových ručičiek) číslami 1 až 10. Rovnako miesta, na ktorých na začiatku sedeli, označíme číslom priateľa, teda tiež od 1 po 10. Teraz už môžeme úlohu riešiť. Po chvíľke kreslenia stolov, priateľov a ohňostrojov si môžeme všimnúť, že ak si priateľ 1 sadne na miesto 10 a priateľ 2 na miesto 1, tak sa všetci posunú o jedno miesto proti smeru hodinových ručičiek. Stane sa to kvôli tomu, že priateľ 3 si musí sadnúť na miesto 2, pretože nikto iný si tam sadnúť nemôže, a keby toto miesto ostalo prázdne, nezmestia sa za stôl všetci priatelia. Podobnou úvahou nájdeme aj riešenie, keď sa všetci posunú o jedno miesto v smere hodinových ručičiek. Môžeme si všimnúť, že tieto riešenia sa líšia od ostatných – kým v týchto prípadoch sa menili všetci „cyklicky“, v ostatných sa musia meniť po pároch. (Uvedomte si, prečo.)

Zvyšnú časť riešenia budeme hľadať možnosti usadenia také, v ktorých sa budú meniť dvojice. Ukážeme si dve možné riešenia, v prvom jednoducho spočítame všetky možnosti, keď sa mení nula až päť párov. Potom si ukážeme ešte iné riešenie, ktorého myšlienka sa dá použiť aj na všeobecnejšie prípady. Začnime prvou z možností.

Pri našich úvahách nesmieme zabudnúť na to, že dvojice, ktoré sa medzi sebou môžu meniť, musia sedieť vedľa seba. Prípady, keď sa mení nula, jeden alebo päť párov nie sú náročné, ponechávame ich teda na riešiteľa. Napovieme len, že počet možností je postupne jedna, desať a dve.

Ak sa vymieňajú naraz dva páry priateľov, potrebujeme vybrať prvý pár, čo vieme urobiť desiatimi spôsobmi. Potom potrebujeme ďalší pár tak, aby nebol nijaký priateľ v oboch týchto pároch. To môžeme spraviť siedmimi spôsobmi. (Ak prvý vybraný pár je 1 a 2, ďalší môže byť jeden z 3 a 4, 4 a 5, …, 9 a 10.) Uvedomme si však, že pri našom výbere záleží na tom, ktorý pár vyberieme ako prvý, no my nechceme, aby na tom záležalo. Preto musíme počet všetkých možností ešte predeliť dvomi, pretože výber 1 a 2 a potom 4 a 5 je rovnaký ako výber 4 a 5 a potom 1 a 2. Dokopy máme teda $(10 \cdot 7)/2 = 35$ možností.

Prípad, keď chceme vymeniť tri dvojice, je už trochu komplikovanejší. Potrebujeme totiž vybrať iba tie, ktoré neobsahujú žiadneho priateľa viackrát. Premyslite si, prečo nemôžeme napríklad vybrať dvojice 1 a 2, 2 a 3, 7 a 8. Keby sme sa snažili vypočítať tento počet priamo, narazili by sme na problémy. Môžeme si ale uvedomiť to, že páry, v ktorých sa aspoň jeden priateľ vyskytuje dvakrát, vieme spočítať ľahšie. Z toho potom dokážeme určiť aj počet neprekrývajúcich sa párov – vezmeme si počet všetkých možností, ako vieme vybrať tri páry a odpočítame tie, ktoré sa prekrývajú. Ak chceme zistiť počet všetkých trojíc párov, musíme si uvedomiť, že rôznych párov je desať, my z nich chceme vybrať tri. Keby nám záležalo na poradí, tak vyberieme najprv prvú dvojicu desiatimi spôsobmi, druhú deviatimi a tretiu ôsmimi. Nám ale na poradí záleží a keď si uvedomíme, že s možnosťami 1, 2, 3 (kde 1 je prvá dvojica, 2 druhá a 3 tretia) započítavame aj možnosti 1, 3, 2; 2, 1, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2; 3, 2, 1. Teda namiesto jednej možnosti až šesť. Preto celkový výsledok musíme vydeliť šiestimi, dostávame $(10 \cdot 9 \cdot 8)/6 = 120$ možností. Pozrime sa teraz na páry, v ktorých sa aspoň jeden priateľ vyskytuje dvakrát. To, že je priateľ v dvoch pároch znamená, že vyberáme trojicu, v ktorej je on v strede. Rovnako ako keď vyberáme dvojicu susedov, aj trojíc je len 10. Ešte ale potrebujeme vybrať jeden pár zo zvyšných ôsmich. Dokopy máme 80 možností. Je to správny výsledok? Nie tak celkom, totiž ak najprv vyberieme trojicu 1, 2 a 3 a potom dvojicu 3 a 4, dostaneme rovnakú

možnosť ako keby sme vybrali najprv trojicu 2, 3 a 4 a potom dvojicu 1 a 2. Týchto 10 možností (keď vyberieme štyroch ľudí sediacich vedľa seba) musíme od našich 80 odrátať, teda celkový počet možností, ako sa tri dvojice mohli vymeniť je $120 - (80 - 10) = 50$.
Posledný prípad, ktorý sme ešte nerozobrali je, ak sa menia 4 dvojice. Vyberať osem ľudí z desiatich za takýchto podmienok sa nám ale môže zdať mierne komplikované. Preto radšej vyberme tých, ktorí ostanú sedieť na svojich miestach. Prvého vyberieme ľahko – máme na to 10 možností. Kde ale môže sedieť druhý? Títo dvaja priatelia nemôžu sedieť tak, aby medzi nimi bol nepárny počet priateľov, pretože potom by sa jeden z tohto nepárneho počtu priateľov nemal s kým vymeniť. Preto máme len 5 možností ako vybrať druhého priateľa. A keďže nám nezáleží na poradí, ako vyberieme týchto priateľov, počet možností ešte predelíme dvomi. Dokopy dostaneme 25 možností. Teraz už len spočítame všetky medzivýsledky a dostaneme $2 + 1 + 10 + 35 + 50 + 25 + 2 = 125$ možností.

Iné riešenie:
Na náš problém sa môžeme pozrieť aj trochu inak. Na začiatku rovnakou úvahou ako v predchádzajúcom riešení prídeme na to, že ak sa posunú dvaja priatelia vedľa seba doprava (resp. doľava), tak sa tým smerom musia posunúť všetci. Takto dostaneme dve riešenia. Pozrime sa na tie zvyšné. Začneme s priateľom 1. Kam si môže sadnúť? Buď na svoje miesto alebo na jedno z miest 10 a 2. Ak si sadne na svoje miesto, chceme usadiť ďalších deväť priateľov. Ak si ale sadne na miesto 10, priateľ s číslom 10 už má miesto určené, musí sedieť na mieste 1. Podobne v prípade, že si 1 sadne na miesto 2. V týchto dvoch prípadoch chceme usadiť už len osem priateľov. Všimnime si, že pri usádzaní nasledujúceho priateľa (ak ich usádzame po poradí) si tento môže sadnúť buď na svoje miesto alebo na miesto dalšieho v poradí. Nemá úž možnosť sadnúť si na predchádzajúce miesto, pretože tam už niekto sedí. Ak si sadne na svoje miesto, chceme umiestiť o priateľa menej, ak na miesto spolusediaceho, tak aj on už bude mať pevne dané miesto a chceme umiestniť o dvoch priateľov menej. (Poriadne si to premyslite.) Preto počet všetkých možností M môžeme napísať ako $M = 2 + n(9) + 2 \cdot n(8)$, pričom $n(k) = n(k-2) + n(k-1)$, $n(1) = 1$ a $n(2) = 2$. (Jedného priateľa vieme usadiť iba jedným spôsobom, dvaja priatelia môžu sedieť na svojich miestach, alebo si miesta vymeniť.)
Pre počet $n(k)$ a hodnoty k od 1 po 9 dostávame postupne čísla 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55[1]. Teda $M = 2+55+68 = 125$. Skúste si porovnať náročnosť tohto riešenia pre dvadsať priateľov a náročnosť prvého riešenia.

Úloha č. 6: *Nájdite všetky štvorice reálnych čísel a, b, c, d, pre ktoré platí*

$$\begin{aligned} a+b &= 8, \\ ab+c+d &= 23, \\ ad+bc &= 28, \\ cd &= 12. \end{aligned}$$

Riešenie: (opravovali Rasťo a Hanka)
Štyri rovnice, štyri neznáme, to vyzerá tak akurát. Len keby to celé bolo o trochu krajšie, bez výrazov ako ab či cd. Tie nám tam robia šarapatu. Síce, ten príklad predsa nemôže ísť úplne ľahko. To by ho sem nevybrali `:)`. Ale čo s ním mám robiť ja? Skúsme sa naň pozrieť bližšie. Na druhý pohľad si povieme, že predsa nie je až taký škaredý. Vyzerá to, že nejaké tie riešenia by mohol mať aj medzi prirodzenými číslami, no nie? Tak ich skúsme pohľadať. Nepovie nám to síce veľa o množine všetkých riešení, ale aj vedieť, že vôbec nejaké sú, je často dosť užitočné. (Napríklad sa nebudeme snažiť ukázať, že táto sústava žiadne riešenie nemá.)
Z prvej rovnice máme $a + b = 8$. Keď uvažujeme iba prirodzené čísla, tak (a, b) môžu byť iba dvojice $(1, 7)$, $(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$ a $(7, 1)$. Ich súčiny teda môžu byť len 7, 12, 15 a 16. Pre $c + d$ preto z druhej rovnice dostaneme možnosti 16, 11, 8 a 7. Zo štvrtej rovnice vieme $cd = 12$, teda (c, d) môžu byť len $(1, 12)$, $(2, 6)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$ a $(12, 1)$. Všetky možné súčty $c + d$, na základe tejto štvrtej rovnice, preto budú 13, 8 a 7. Iba 7 a 8 sa vyskytuje aj medzi možnými hodnotami $c + d$, ktoré sme dostali z prvej a druhej rovnice. Takže sme vlastne zistili, že k dvojici (a, b) rovnej $(3, 5)$ a $(5, 3)$ máme dvojice (c, d) rovné $(2, 6)$ a $(6, 2)$. Podobne pre $(4, 4)$ máme $(3, 4)$ alebo $(4, 3)$. Dosadením každej z možností do tretej rovnice dostaneme, že riešeniami sú len štvorice $(4, 4, 3, 4)$, $(4, 4, 4, 3)$, $(3, 5, 2, 6)$ a $(5, 3, 6, 2)$.
Fajn, riešenia v prirodzených číslach by sme mali. Ale čo s tými reálnymi? Tak a teraz záleží na spôsobe, ktorým sa do tej sústavy pustíme. Máme možnosť použiť buď hrubú silu alebo sa snažiť nejako to celé obabrať. Ukážeme si obe možnosti, aj keď medzi nimi nie je hrubá deliaca čiara. Aj pri hrubej sile sa časom dá vymyslieť pár trikov ako si robotu uľahčiť a nezošalieť z rovníc na celý riadok. Do pozornosti však chceme dať hlavne to „obabrávacie“ riešenie. Lebo sú rovnice a sústavy, kde si hrubou silou neporadíme vôbec.
Začnime ale najskôr hrubou silou. Z prvej rovnice si vyjadríme $b = 8 - a$, zo štvrtej $c = 12/d$ a dosadíme to do druhej a tretej rovnice. (Všimnime si, že $cd = 12$, teda c ani d nie sú 0, takže nám ani jedno z nich nevadí v menovateli.) Dostaneme

[1] Skúste si túto postupnosť nájsť v Google.

$$
\begin{aligned}
(8-a)a+\frac{12}{d}+d &= 23, &(1)\\
ad+\frac{12(8-a)}{d} &= 28. &(2)
\end{aligned}
$$

Upravíme rovnicu (2) a vyjadríme z nej a, postupne máme

$$
\begin{aligned}
ad+\frac{12(8-a)}{d} &= 28,\\
ad^2+96-12a &= 28d,\\
a(d^2-12) &= 28d-96,\\
a &= \frac{28d-96}{d^2-12}.
\end{aligned}
$$

A teraz to už len dosadíme do (1) a upravíme. (Opäť si všimnime, že sme mohli deliť výrazom d^2-12, lebo hodnotu 0 nadobúda pre $d=\pm 2\sqrt{3}$, ale $28d-96$ pre toto d nenadobúda hodnotu 0.) Dostávame

$$
\begin{aligned}
\left(8-\frac{28d-96}{d^2-12}\right)\frac{28d-96}{d^2-12}+\frac{12}{d}+d &= 23,\\
&\ \vdots\\
d^6-23d^5+212d^4-1000d^3+2544d^2-3312d+1728 &= 0.
\end{aligned}
$$

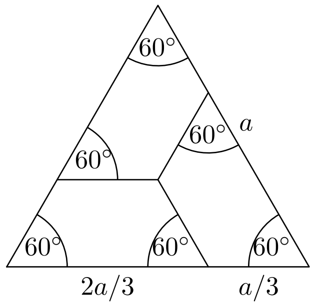
Polynóm (= mnohočlen) šiesteho stupňa určite každého poteší ;). Ale ešte nehádžme flintu do žita. Nie je to až také zlé ako sa na prvý pohľad môže zdať. Nie je to totiž úplne hocijaký polynóm. Pripomeňme si najskôr niekoľko zaujímavých vlastností polynómov. Každý polynóm n–tého stupňa má najviac n rôznych koreňov. Navyše sa dá rozložiť do tvaru $a(x-k_1)(x-k_2)\dots(x-k_m)\cdot R(x)$, kde a je koeficient pri x^n, $k_1,\dots,k_m$ sú jeho korene a $R(x)$ je nejaký zvyšok – polynóm, ktorý už nemá reálne korene. (Korene $k_1,\dots,k_m$ nie sú nutne rôzne – polynóm môže mať aj viacnásobné korene.) Keď máme nejaký polynóm stupňa n, o ktorom vieme, že k je jeho koreň, tak ho vieme vydeliť výrazom $x-k$ a dostaneme polynóm stupňa $n-1$. (Skúste nad tým porozmýšľať, prípadne sa pohrabať v nejakých knižkách.) My máme síce polynóm šiesteho stupňa, ale štyri jeho korene predsa poznáme, nie? Čo na tom že sú prirodzené. Takže keď vydelíme náš polynóm polynómom $(x-2)(x-3)(x-4)(x-6)$, dostaneme polynóm už len druhého stupňa a vyriešiť zostávajúcu kvadratickú rovnicu zvládnete hravo. Jej korene sú 2 a 6, čiže náš polynóm má len štyri rôzne korene a ku každému z nich sme už našli aj zodpovedajúce riešenie celej sústavy. To sú preto zároveň aj všetky riešenia. Ak neradi delíme polynóm šiesteho stupňa polynómom štvrtého stupňa (ja si viem predstaviť trávenie voľného času aj lepšie :)), tak to skúsme trošku inak.
O našom polynóme vieme, že sa dá napísať $(x-2)(x-3)(x-4)(x-6)(x-k_1)(x-k_2)$. Čo dostaneme, keď to roznásobíme? Samozrejme, nebudú nás zaujímať všetky koeficienty, ale len tie pri x^5 (teda $(-2)+(-3)+(-4)+$ $+(-6)+(-k_1)+(-k_2)$) a absolútny člen (čiže $(-2)(-3)(-4)(-6)(-k_1)(-k_2)$). Porovnaním s koeficientmi v našom polynóme a upravením dostaneme pre k_1 a k_2 kvadratickú rovnicu, čo je jednoduchšie ako deliť polynómy, zapísať dve strany a trikrát sa pomýliť. Uvedomme si, že ak sa nám nepodarí nájsť k_1 a k_2, tak náš polynóm by sa dal napísať len ako $(x-2)(x-3)(x-4)(x-6)(x^2+ax+b)$, pričom $R(x)=x^2+ax+b$ by už nemal reálne korene.
Teraz to „obabrávacie“ riešenie. Sčítajme prvú a tretiu rovnicu a odčítajme od nich druhú a štvrtú. Získavame sériu rovností

$$
\begin{aligned}
a+b+ad+bc-ab-c-d-cd &= 8+28-23-12,\\
(a-c)+d(a-c)-b(a-c)-(d-b+1) &= 0,\\
(a-c-1)(d-b+1) &= 0.
\end{aligned}
$$

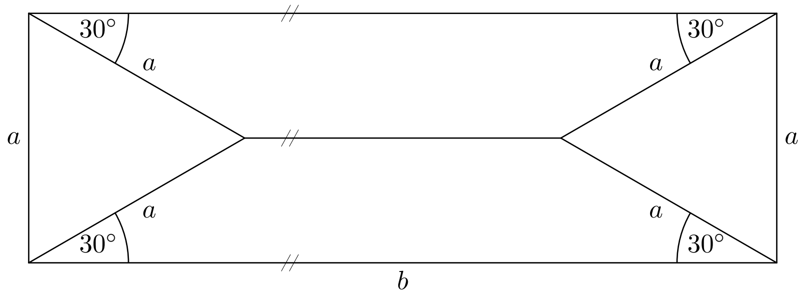
To vyzerá dobre, nie? Musí platiť buď $a=c+1$ alebo $d=b-1$. Dosadíme, dostaneme oveľa sympatickejšiu rovnicu, síce stále tretieho stupňa, ale niektoré korene už predsa poznáme. (Skúste si to.)

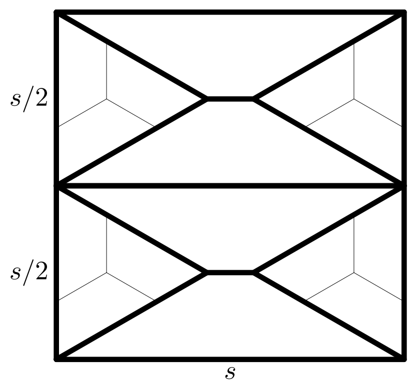
Úloha č. 7: *Rozhodnite, či sa dá štvorec rozdeliť na konečne veľa rovnoramenných nepravouhlých lichobežníkov. Lichobežníky nemusia byť navzájom zhodné. Svoju odpoveď zdôvodnite.*

Riešenie: (opravovali Buggo a Škrečok)
Ako ste si určite v zadaní všimli, musíme „rozhodnúť“, či sa štvorec dá požadovane rozdeliť. V takýchto úlohách je kľúčové vytvoriť si správny názor – či začneme hľadať také rozdelenie, alebo dokazovať, že to nejde. V celom riešení budeme pod slovom lichobežník myslieť lichobežník vyhovujúci zadaniu, teda rovnoramenný nepravouhlý.
Aby sme si názor vytvorili, je potrebné veľa kresliť. Väčšinou je pri takýchto úlohách dobré začať s optimistickým prístupom. Ak riešenie existuje, tak máme veľkú šancu, že ho nájdeme. Ak neexistuje, môžeme ľahšie pochopiť povahu problému a vymyslieť dôkaz.
Riešenie asi nenájdeme hneď pri prvom obrázku, navyše je pomerne ťažké uhádnuť správne rozdelenie štvorca. Treba sa pokúsiť úlohu zjednodušiť, vyriešiť nejaký čiastkový problém.



Dobrou myšlienkou je skúsiť na lichobežníky rozdeľovať trojuholníky. Napríklad ak by sme vedeli rozdeliť rovnostranný trojuholník, možno by sa nám delil štvorec ľahšie. No a práve rovnostranný trojuholník sa veľmi jednoducho rozdelí na 3 lichobežníky. Stačí si zvoliť nejaký bod M v jeho vnútri (napríklad ťažisko, premyslite si ale, že to funguje pre ľubovoľný vnútorný bod trojuholníka) a pospájať ho rovnobežkami so stranami tak, ako na obrázku.
Preto už bude ďalej stačiť, ak sa nám niečo podarí rozdeliť na rovnoramenné nepravouhlé lichobežníky a rovnostranné trojuholníky. Je ale jasné, že so štvorcom máme aj tak stále problém. (Skúste si ho pokryť rovnostrannými trojuholníkmi.)
Rozmýšľajme ďalej, po chvíli nám možno napadne obdĺžnik (štvorec vieme totiž veľmi ľahko rozdeliť na hocikoľko obdĺžnikov). A po ďalšej chvíli nám možno napadne aj toto rozdelenie obdĺžnika na dva lichobežníky a dva rovnostranné trojuholníky:





Nespadlo to z neba, chce to iba dostatok trpezlivosti pri kreslení (napokon, veľká väčšina riešiteľov naozaj dospela k takémuto rozdeleniu). Jediný problém je, pri akých rozmeroch obdĺžnika sa toto rozdelenie dá spraviť. Môže sa totiž stať, že sa nám naše dva trojuholníky prekryjú alebo sa dotknú bodom (vtedy by sa z lichobežníkov stali trojuholníky). Ak máme obdĺžnik s kratšou stranou a a dlhšou stranou b, potom musí platiť

$$2\sqrt{a^2 - \frac{a}{4}^2} < b.$$

Už to treba len doklepnúť. Štvorec so stranou s si rozdelíme na dva obdĺžniky ako na obrázku. Rozmyslite si, prečo sa to takto naozaj dá. (Overte platnosť nerovnosti.)

Poznámka: Toto samozrejme nie je jediné možné rozdelenie. Môžete si za domácu úlohu skúsiť premyslieť, koľko najmenej lichobežníkov potrebujeme.

Úloha č. 8: *V lese býva* 2007 *trpaslíkov očíslovaných číslami* 1 *až* 2007*. Na príkaz Snehulienky sa nejakých* 41 *z nich postaví do radu tak, aby ich čísla tvorili aritmetickú postupnosť. Snehulienka si všimla, že nech sa trpaslíci postavia do radu hocijako, vždy bude medzi nimi aspoň jeden z jej* 90 *obľúbených trpaslíkov. Aké čísla majú Snehulienkini obľúbení trpaslíci? Nájdite aspoň jednu možnosť a zdôvodnite, prečo táto skupina trpaslíkov má požadovanú vlastnosť.*

Riešenie: (opravoval Jakub)
Táto úloha je na prvý pohľad veľmi hravá (však? ;)), tak sa trošku pohrajme s aritmetickými postupnosťami. Keď si napíšeme niekoľko 41 členných aritmetických postupností čísel od 1 po 2007, môžeme si všimnúť hneď niekoľko zaujímavostí. V prvom rade si všimneme, že ak zvolíme rozdiel medzi dvomi po sebe idúcimi členmi postupnosti väčší ako 50, nepodarí sa nám 41 členov vybrať. (Tento rozdiel budeme ďalej nazývať diferencia.) Tiež môže byť zaujímavá voľba diferencie rovnú 41. Môžeme overiť, že najmenší člen tejto postupnosti môže byť najviac $2007 - 40 \cdot 41 = 367$ a najväčší musí byť aspoň $1 + 40 \cdot 41 = 1641$. Všimnime si aj to, že všetky členy tejto postupnosti budú dávať rovnaký zvyšok po delení 41. (Rovnaký ako prvý člen.) To ale znamená, že každá postupnosť s diferenciou 41 bude obsahovať aspoň jedno z čísel 410, 411, …, 450. Máme prvých 41 členov Snehulienkinej obľúbenej skupinky trpaslíkov.
Pozrime sa teraz na prípad, keď diferencia je rôzna od 41. Vzhľadom na to, že 41 je prvočíslo, každá diferencia bude v tomto prípade nesúdeliteľná s 41. Keď už nám v prvom prípade tak dobre poslúžili zvyšky po delení 41, prečo to neskúsiť aj teraz? (Zamyslite sa, kde sme použili zvyšky.) Keď vyskúšame nájsť takú postupnosť, aby aspoň dva členy mali rovnaký zvyšok po delení, nedarí sa nám. Hneď si aj ukážeme, prečo to je tak, ale najprv poriadne sformulujeme tvrdenie, ktoré chceme dokázať. Ak je diferencia rôzna od 41[2], tak členy našej postupnosti dávajú všetkých 41 rôznych zvyškov. Dokážeme to sporom. Nech a_i a a_j $(i \neq j)$ dávajú rovnaký zvyšok po delení 41. Vieme, že i-ty člen postupnosti môžeme zapísať v tvare $a_i = a_1 + (i-1) \cdot d$, kde a_1 je prvý člen a d diferencia. Keďže d je nesúdeliteľné so 41, tak aj $(i-1)$ musí dávať rovnaký zvyšok ako $(j-1)$, ale potom $i = j$, čo je spor. To znamená, že každá takáto postupnosť obsahuje aj člen, ktorý dáva po delení 41 zvyšok 0, čiže je to násobok 41.

[2] a preto s ňou nesúdeliteľná, keďže uvažujeme iba diferencie do 50 vrátane

Ľahko overíme, že násobkov 41 vyskytujúcich sa medzi číslami od 1 po 2007 je 48. Preto ak ďalších 47 trpaslíkov zvolíme ako násobky 41, okrem 410 (toho sme už vybrali), bude každá aritmetická postupnosť obsahovať aspoň jedného z nich.
Vybrali sme teda $(47 + 41 = 88)$ trpaslíkov, posledných dvoch môžeme náhodne zvoliť, napríklad 47 a 74. Dostali sme hľadaných 90 trpaslíkov.

Úloha č. 9: *Riešime rovnicu $x^n - y^n = 2^z$ s neznámymi x, y, z v obore prirodzených čísel.*
a) Nájdite všetky riešenia tejto rovnice pre $n = 2$.
b) Zistite, či má táto rovnica riešenie pre nejaké prirodzené číslo $n > 2$. Svoje tvrdenie dokážte.

Riešenie: (opravoval Miťo)
a) Asi stojí za pokus vyskúšať využiť rozklad na súčin $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. Tento súčin sa podľa zadania má rovnať nejakej mocnine dvojky; nie je tažké uvedomiť si, že potom obe zátvorky musia byť mocniny dvojky. Ak predchádzajúce pozorovanie zapíšeme, máme $x + y = 2^a$, $x - y = 2^b$. Sčítaním, resp. odčítaním týchto rovností dostaneme $x = (2^a + 2^b)/2 = 2^{a-1} + 2^{b-1}$, resp. $y = (2^a - 2^b)/2 = 2^{a-1} - 2^{b-1}$ a teda rovnica má nekonečne veľa riešení, stačí za a, b dosádzať hocaké čísla.

b) Pozrime sa najprv na prípad $n = 3$. Máme vyriešiť rovnicu $x^3 - y^3 = 2^z$, skúsme použiť rozklad na súčin, ktorý sa celkom osvedčil v časti a). Platí $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$ a opäť obe zátvorky musia byť mocninami dvojky. Aby číslo $x - y$ bolo mocninou dvojky, isto musí byť párne a preto x a y musia mať rovnakú paritu (dávať rovnaký zvyšok po delení dvomi). Avšak ak x aj y sú nepárne, výraz v druhej zátvorke je súčet troch nepárnych čísel a je tiež nepárne číslo. Preto takéto riešenie nemôže existovať. Druhý prípad, ktorý musíme zvážiť je, či rovnica môže mať riešenie, keď obe z čísel x, y budú párne. V takom prípade však z oboch môžeme „vybrať“ dvojku, pričom ak pôvodné x, y boli riešením, tak rovnici vyhovujú aj $x/2$, $y/2$. Pritom pre tieto nové riešenie musí opäť platiť, že obe čísla majú rovnakú paritu. Dostávame teda, že v prvočíselnom rozklade x a y vystupuje dvojka s rovnakým exponentom (overte to). Ak tieto dvojky vyberieme, dostáveme nepárne čísla, ktoré nemôžu byť riešením. Pre $n = 3$ teda riešenie neexistuje.
Teraz zrejme ešte nemáme úplne jasno v tom, ako veľa sme vlastne zistili o našej rovnici pre prípad $n > 2$. Preto poďme našu metódu vyskúšať na ďalšie konkrétne hodnoty n. (Vyskúšajte našu metódu.) Dúfam, že ste si to skúsili, napr. pre prípad $n = 4$, ktorý ste zrejme nevyriešili. (Eventuálnym ignorovaním textu v zátvorkách sa pripravujete o časť riešenia :(. Problém je, že po rozklade na súčin má druhá zátvorka tvar (x^2+y^2). To znamená, že neobsahuje nepárne veľa členov a preto nemôžeme spôsobom ako predtým ukázať, že neexistujú nepárne riešenia. Za úplne kľúčové považujem v tomto momente snahu nevzdať[3] a skúsiť ešte jednu hodnotu, najlepšie $n = 5$. (Skúste ešte jednu hodnotu.) Ak ste mali šťastie a skúsili ste takú, pre ktorú metóda funguje, zrejme viete presne povedať, pre ktoré hodnoty n fungovať bude a pre ktoré nie. Aby nám takýto dôkaz prešiel, potrebujeme, aby bolo v niektorej zátvorke nepárne veľa členov, čo sa stane práve vtedy, ak n má nepárneho deliteľa[4]. Presvedčte sa o tom; pre istotu uvediem rozklad napríklad pre prípad $n = 4k$, kde k je nepárne:

$$x^n - y^n = x^{4k} - y^{4k} = (x^{2k} - y^{2k})(x^{2k} + y^{2k}) = (x^k - y^k)(x^k + y^k)(x^{2k} + y^{2k}).$$

Pritom z už povedaného vyplýva, že samotná prítomnosť člena $(x^k - y^k)$ je dostatočným dôvodom, aby takáto rovnica nemohla mať riešenie.
Asi už tušíte, že sme takmer na konci, ostáva už iba rozobrať prípad, keď n je mocnina dvojky, povedzme $n = 2^{k+1}$. Asi najpriamočiarejšie je napísať rozklad na súčin

$$x^n - y^n = x^{2^{k+1}} - y^{2^{k+1}} = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4) \cdots (x^{2^k} + y^{2^k}) \qquad (\Upsilon)$$

a skúsiť využiť časť a)[5]. To nie je ťažké, stačí dosadiť vyjadrenie $x = 2^a + 2^b$, $y = 2^a - 2^b$ do člena $x^2 + y^2$. Spravte to, mne po úprave vyšiel tvar $2^{2b+1}(2^{2(a-b)} + 1)$, pričom $a > b$ a preto je výraz v zátvorke nepárny a väčší ako jedna, preto nedelí mocninu dvojky. Hotovo.

Komentár: Aj keď v tu prezentovanom riešení odzneli všetky potrebné myšlienky, ako to už niekedy býva, občas sme neboli celkom poriadni. Preto riešenie, ktoré ste práve dočítali, nie je hodné deväť bodov; a už vôbec nezodpovedá našim predstavám o ideálnom riešení od vás. Žiaľ, zároveň však práve takto vyzerala značná časť riešení ktoré prišli – skúste s tým v budúcnosti niečo spraviť. Poďme sa teraz chvíľu venovať trochu konkrétnejšie spomínanej neporiadnosti. V časti a) sme (v princípe) odvodili nutnú podmienku na riešenie (sčítanie rovníc je dôsledková úprava) a preto by nezaškodilo zamyslieť sa nad tým, či vyjadrenia, ktoré sme našli, sú skutočne riešeniami. Mimochodom, keď ste písali riešenie, zamysleli ste sa? Ďalej, zrejme za a, b nemôžeme dosádzať úplne hocaké čísla – isto musia byť prirodzené a navyše $a > b \geq 1$. Premyslite si to. Tiež v časti b) sme sa sem-tam nevyjadrili úplne presne. Nájdite dve takéto miesta a opravte ich. Skúste si uvedomiť, že jedno z nich je natoľko fatálne, že prezentovaný dôkaz v podstate nefunguje. No a nakoniec, je dobré sa zamyslieť nad tým, či sme v a) našli všetky riešenia – totiž ak podľa zadania máme nejakú rovnicu *vyriešiť*, zrejme sa od nás chce, aby sme našli riešenia všetky a nie iba niektoré. (Zamyslite sa.)

[3] Koniec-koncov, po jednom úspešnom pokuse je jeden neúspešný príliš málo na paniku, no nie?
[4] Pochopiteľne rôzneho od jedna.
[5] Je dobré mať na pamäti, že v časti a) sme našli podmienky na to, aby bol súčin $(x - y)(x + y)$ mocninou dvojky a tieto podmienky zrejme musia byť splnené aj v prípade, ak súčin Υ má byť mocninou čísla dva.

Poznámka: V časti b) pre prípad párny čísel sa dá uplatniť aj nasledujúci zaujímavý postup. Nech $n = 2k$ a využime rozklad

$$x^n - y^n = (x^k)^2 - (y^k)^2 = s^2 - t^2,$$

čo je vlastne špeciálny prípad časti a). Ak však v a) existuje riešenie a vyberieme z neho všetky dvojky, máme opäť riešenie, v ktorom sa však s a t líšia o 2. To sa síce niekedy môže stať, avšak určite nie, ak s aj t sú k-te mocniny pre $k > 1$. Na dokončenie dôkazu teraz stačí dokázať posledné tvrdenie v predchádzajúcej vete; spravte to, nie je to ťažké.

Úloha č. 10: *Nech M je vnútorný bod trojuholníka ABC taký, že $|\sphericalangle AMC| = 90°$, $|\sphericalangle AMB| = 150°$ a $|\sphericalangle BMC| = 120°$. Označme P, Q, R stredy kružníc opísaných trojuholníkom AMC, AMB a BMC. Dokážte, že obsah trojuholníka ABC je menší než obsah trojuholníkoa PQR.*

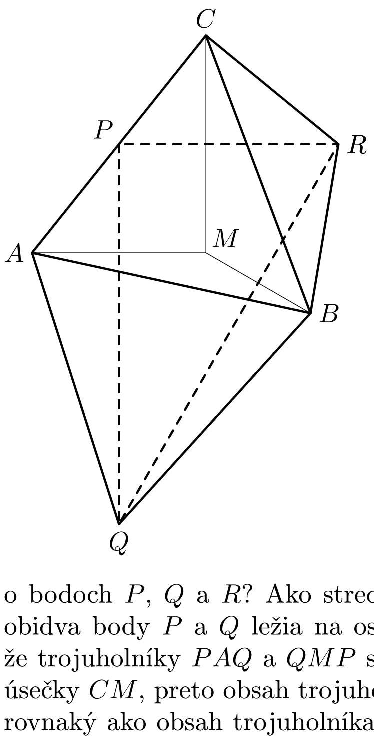
Riešenie: (opravoval Bus)

OK, milá mládež. Skôr než sa pustím do vysvetľovania tejto extrémne náročnej a komplikovanej úlohy, dajme si na zahriatie jeden jednoduchý príklad:

> Vedúci korešpondenčného seminára vloží zadania prvej série KMS do obálky v piatok ráno 26. januára 2007. Obálka sa odošle riešiteľovi ešte v ten istý deň na obed. Odpovedzte na nasledujúce otázky ak viete, že termín odoslania prvej série je 26. februára 2007:
>
> a) Koľko času bude mať priemerný riešiteľ na vypočítanie prvej série?
>
> b) Koľko času v skutočnosti strávi priemerný riešiteľ rátaním prvej série?
>
> Pomôcka: odpovede na časť a) a časť b) sa líšia približne o 30 dní.

Tak, ak ste sa už zohriali (napríklad pomyslením na to, že ste nadpriemerní riešitelia), prejdem späť k pôvodnej úlohe. Najskôr by som sa s vami rád podelil o svoje blažené dojmy z jej opravovania. Musím povedať, že oproti minulým sériam veľa z vás spravilo ozajstný pokrok! Aj keď sa našli takí, ktorí poslali iba nesmelý náčrt na okraji papiera doplnený krátkym vtipným komentárom, ostatní ste ma priam zahrnuli písmenkami či dokonca celými vetami! Možno sa to niektorým z vás bude zdať zvláštne, ale jedným z najsilnejších zážitkov sa pre mňa stalo práve to zdanlivo nekonečné pútavé a dobrodružné upravovanie aritmetických výrazov plných odmocnín, zlomkov a goniometrických funkcií. To množstvo vzťahov, nerovností a ekvivalentných úprav, ktorým ste ma vy, pozorní riešitelia, zahrnuli, bolo skrátka neuveriteľné. Práve toto sú tie chvíle, pre ktoré sa oplatí byť opravovateľom.

Mnohých z vás preto možno prekvapí môj trochu netradičný postup, ktorý sa tu pokúsim načrtnúť. Je síce pravda, že sa hovorí: ak nemáš vo svojom riešení geometrickej úlohy ani jednu odmocninu, nie si IN. Ja sa však napriek tomu pokúsim v riešení artimetickým výrazom vyhnúť, kde sa len bude dať. Veď aj bez nich sa toho dá tak veľa zistiť. Napríklad taký trojuholník AMC. Ten je pravouhlý, preto stred jeho opísanej kružnice P nebude nikde inde ako v strede strany AC. Trojuholníky ABM a BCM už také extravagantné vnútorné uhly nemajú, aj tak sú však čímsi zvláštne – ich tupé uhly zabezpečujú, že body Q a R budú ležať mimo trojuholníka ABC.



Tak, a teraz neviem kam z konopí. Čo by som si na obrázku ešte tak všimol... No keď už mám zadané tie uhly, možno budú na niečo dobré, že by som pomocou nich skúsil vypočítať veľkosti ďalších zaujímavých uhlov? Znalosť vety o stredovom a obvodovom uhle nám príde vhod. V kružnici opísanej trojuholníku ABM je veľkosť obvodového uhla nad tetivou AB rovná presne $180° - |\sphericalangle AMB| = 30°$. Veľkosť stredového uhla AQB teda bude dvojnásobok, čiže $60°$. No to je ale náhoda, trojuholník AQB má dve strany rovnakej dĺžky ($|AQ| = |BQ|$, oba sú to polomery opísanej kružnice) a uhol medzi nimi je $60°$, AQB je teda rovnostranný trojuholník. Teda – človek, čo vymyslel túto úlohu, mal dobré šťastie.

Ale keď už to raz tak dobre vyšlo, čo keby sme sa skúsili pozrieť aj na trojuholník BRC. Veľkosť obvodového uhla nad BC bude $180° - |\sphericalangle BMC| = 60°$, čiže uhol pri vrchole R je tentokrát $|\sphericalangle BRC| = 2 \cdot 60° = 120°$. Nič moc, ale aj také trojuholníky bývajú. Aspoň je aj on rovnoramenný. Oveľa horšie je na tom trojuholník CPA, ten totiž trojuholníkom vlastne vôbec nie je, je to iba taká smutná monotónna priamka bez formy a obsahu.

No a opäť som tam, kde som bol pred dvoma odsekmi, a síce v koncoch. Na čo som tieto uhly vôbec rátal? Chcem sa predsa dostať k obsahom trojuholníkov. Tu sa však ukazuje, aké majú hlupáci a vedúci seminárov šťastie. Čo totiž vieme o bodoch P, Q a R? Ako stredy opísaných kružníc ležia na osiach strán príslušných trojuholníkov. Konkrétne, obidva body P a Q ležia na osi strany AM, čiže priamka PQ *je* osou strany AM. Z toho však hneď vyplýva, že trojuholníky PAQ a QMP sú zhodné a majú rovnaký obsah. Rovnako QR je osou úsečky BM a RP je osou úsečky CM, preto obsah trojuholníka QBR sa rovná obsahu trojuholníka RMQ a obsah trojuholníka RCP je zas rovnaký ako obsah trojuholníka PMR. Keď sa na to teraz pozrieme trošku z diaľky, hneď si uvedomíme, že sme dohromady vyjadrili obsah trojuholníka PQR. Ten sa rovná súčtu obsahov tých troch trojuholníkov okolo neho, alebo inak povedané, obsah trojuholníka PQR je presne polovica obsahu päťuholníka $AQBRC$.

To je úžasné, zatiaľ ani jedna premenná, ba dokonca ani odmocniny. No nič sa nebojte, milí čitatelia, už o chvíľu to napravím. Treba totiž ešte zrátať obsah trojuholníka ABC. Vlastne presne nám ho vedieť netreba – stačí, keď dokážeme, že je menší ako obsah trojuholníka PQR, čiže menší, ako polovica obsahu celého veľkého päťuholníka. Takže, označme si dĺžky strán $|AB| = c$ a $|BC| = a$. Obsah rovnostranného trojuholníka AQB so známou dĺžkou strany vypočítať vieme, obsah trojuholníka BRC sa tiež zráta jednoducho. Keby sme totiž nad stranou BC zostrojili rovnostranný trojuholník, bod R by bol jeho ťažisko a teda obsah trojuholníka BRC je práve tretina obsahu rovnostranného trojuholníka so stranou a. No a na záver je tu trojuholník ABC, ktorého obsah však presne zistiť nevieme. No keby bol pri vrchole B náhodou pravý uhol, bolo by to jednoduché, obsah by bol $ac/2$. Avšak pri vrchole B pravý uhol byť nemôže ani náhodou, pretože bod M by potom musel ležať niekde mimo alebo na obvode trojuholníka ABC. (Viete si ho niekto predstaviť vo vnútri?) Uhol pri B je teda rôzny od pravého – čo však znamená, že obsah trojuholníka ABC je určite menší ako $ac/2$! (Dokážte si vo voľnom čase.) No a celkovo dostávame

$$\begin{aligned} S_{\triangle AQB} &= \frac{\sqrt{3}c^2}{4}, \\ S_{\triangle BRC} &= \frac{\sqrt{3}a^2}{12}, \\ S_{\triangle ABC} &< \frac{ac}{2}. \end{aligned}$$

Chceli by sme dokázať, že

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &< \frac{S_{AQBRC}}{2}, \\ S_{\triangle ABC} &< \frac{S_{\triangle AQB} + S_{\triangle BRC} + S_{\triangle ABC}}{2}, \\ \frac{S_{\triangle ABC}}{2} &< \frac{S_{\triangle AQB} + S_{\triangle BRC}}{2}. \end{aligned}$$

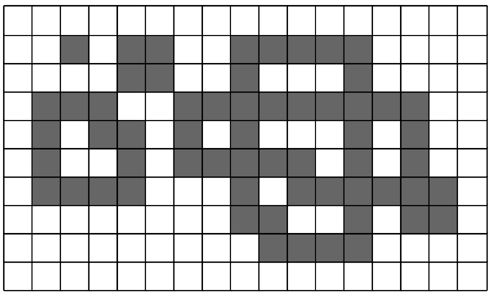
Ale to už je len jednoduchá nerovnosť (využijeme, že štvorec reálneho čísla je vždy aspoň nula)

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{2} < \frac{ac}{4} \leq \frac{ac}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt[4]{3}c}{2} - \frac{\sqrt[4]{3}\sqrt{3}a}{6}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}c^2}{8} + \frac{\sqrt{3}a^2}{24} = \frac{S_{\triangle AQB} + S_{\triangle BRC}}{2}.$$

Tak, koniec, sedí to.

<u>**Úloha č. 11:**</u> *Na nekonečnom bielom štvorčekovom papieri je konečný počet štvorčekov zafarbených čiernou farbou. Každý čierny štvorček má párny počet bielych štvorčekov, ktoré s ním susedia stranou. Dokážte, že vieme každý biely štvorček vyfarbiť zelenou alebo červenou farbou tak, že každý čierny štvorček bude mať rovnaký počet zelených a červených susedov, opäť susediacich celou stranou.*

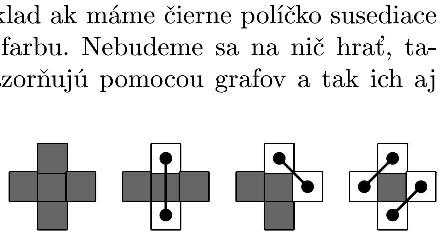
<u>Riešenie:</u> (opravoval Ondro)



Každý štvorček má práve štyroch susedov. Párny počet bielych susedov znamená, že štvorček susedí so žiadnym, s dvoma alebo so štyrmi bielymi štvorčekmi (ekvivalentne: so štyrmi, s dvoma alebo so žiadnym čiernym štvorčekom). Ako môžu byť čierne štvorčeky rozostavené? Hocikde môžeme kresliť osamotené čierne štvorčeky. Ľahko zistíme, že aj „slučky“, čiže nejaké zacyklené postupnosti stranami sa dotýkajúcich čiernych štvorčekov, tiež vyhovujú. Tieto slučky sa však môžu aj nejakým spôsobom spájať a tak vznikajú naozaj komplikované obrazce ako na obrázku 1.

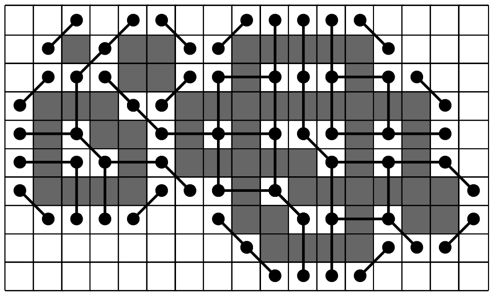
Ďalej to treba skúšať pre konkrétne jednoduché aj zložité prípady. Vhodne ofarbujeme biele štvorčeky zelenou a červenou. Pritom sa snažíme objaviť nejaké súvislosti, všeobecné postupy, skúsiť sformalizovať postup, ako to ofarbujeme. Až keď vieme presne popísať postup, dá sa o ňom dokázať, že vedie k správnemu ofarbeniu. Ukážeme si dva z možných postupov.

Prvé riešenie. Medzi bielymi susedmi čiernych políčok sú isté vzťahy. Napríklad ak máme čierne políčko susediace s práve dvoma bielymi políčkami, tak tieto musia mať po ofarbení rôznu farbu. Nebudeme sa na nič hrať, takéto vzťahy medzi štvorčekmi (ale aj inými objektami) sa veľmi dobre znázorňujú pomocou grafov a tak ich aj použijeme.[6]

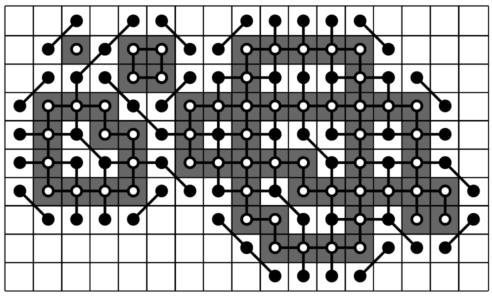


Vrcholmi nášho grafu budú všetky biele štvorčeky, ktoré susedia s aspoň jedným čiernym. Hrany medzi nimi budú znázorňovať vlastnosť „tieto dva štvorčeky musia mať rôznu farbu“. Pre rôzne rozpoloženia susedov čiernych políčok si tie hrany môžeme zvoliť tak, ako na obrázku. V poslednom type to môžeme spraviť aj inak, ale takto (dve šikmé hrany) sa to ukáže najvýhodnejšie.

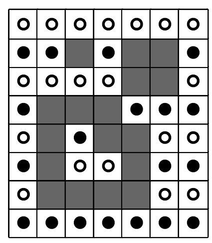
[6]Teória grafov je zaujímavá tým, že je prístupná aj stredoškolákom a pritom ponúka množstvo problémov zaujímavých pre vás i pre vedcov-profesionálov. Skúste sa poobzerať v knižnici po knižke z tejto oblasti.



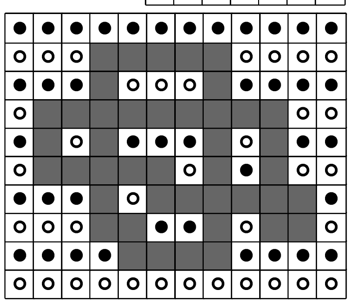
Ak sa nám podarí vrcholy takto zostrojeného grafu ofarbiť dvoma farbami tak, aby žiadne dva susedné vrcholy nemali rovnakú farbu, potom tak isto môžeme ofarbiť aj štvorčeky a zjavne máme vyhovujúce ofarbenie. Konštrukciu grafu si môžeme uzrejmiť na obrázku.
Previedli sme si úlohu na ofarbenie grafu dvoma farbami. Čo nám takéto ofarbovanie môže prekaziť? Áno, sú to cykly (v grafovej terminológii nazývané aj kružnice) nepárnej dĺžky. V cykle sa musia v dobrom ofarbení farby dookola striedať, no pre nepárny cyklus to zrejme nejde. Dobre, a čo ak tam nie je nepárny cyklus, potom sa to dá ofarbiť? Vlastne by sme chceli zodpovedať dve otázky: či vieme zafarbiť graf neobsahujúci cykly nepárnej dĺžky a či náš graf je naozaj vždy bez takýchto cyklov. (Skúsime prezrieť situácie, ktoré sme už nakreslili. Nikde cyklus nepárnej dĺžky nevidno, vyzerá to nádejne.)
i) Nech v našom grafe neexistuje cyklus nepárnej dĺžky. Vrcholy budeme ofarbovať nasledovne. Na začiatku si zoberieme nejaký neofarbený vrchol a zafarbíme ho na zeleno. V druhom kroku ofarbíme všetkých jeho nezafarbených susedov na červeno, v treťom nezafarbených susedov tých červených na zeleno a takto pokračujeme, kým nezafarbíme všetky vrcholy. Ak takto vzniknuté ofarbenie bude vyhovujúce (susediace vrcholy majú rôzne farby), tak je všetko v poriadku. Iná situácia nemôže nastať, čo dokážeme sporom. Predpokladajme, že dva susedné vrcholy majú rovnakú farbu. Zoberme si prvý krok, v ktorom sa to pokazilo, nech je to k-ty krok. Rozmyslite si, že tá chyba musela nastať tak, že nejaké dva vrcholy zafarbené v k-tom kroku (rovnakou farbou) sú ešte k tomu susediace. Potom ale vedie cesta dĺžky $k-1$ z počiatočného zeleného vrchola ku obidvom a medzi nimi je hrana (nakreslite si obrázok). Keby tie cesty nemali spoločnú hranu, tak hneď máme cyklus nepárnej dĺžky, teda spor. A ak tie cesty nejaké spoločné hrany majú, nič to nemení na tom, že niekde sa tam cyklus nepárnej dĺžky nájde (premyslite si). Preto neexistencia cyklu nepárnej dĺžky implikuje dobrú ofarbiteľnosť dvoma farbami.



ii) Ostáva ukázať, že v nami zostrojenom grafe nie je cyklus nepárnej dĺžky. Je jasné, že ten graf je rovinný, čo znamená, že hrany sa mu nekrižujú mimo vrcholov. Zaveďme si súradnicovú sústavu pre štvorčeky (teda polohu štvorčeka bude vyjadrovať usporiadaná dvojica celých čísel). V grafe máme dva druhy hrán. Tie rovnobežné s hranami štvorca, ktoré spájajú štvorčeky so súradnicami (a,b) a $(a,b{+}2)$ (resp. $(a{+}2,b)$) a tie šikmé, čo spájajú (a,b) s $(a{+}1,b{+}1)$ (resp. $(a{+}1,b{-}1)$).Zoberme si ľubovoľný cyklus v našom grafe. Keď po ňom prechádzame dookola, šikmá hrana zmení paritu oboch súradníc, preto šikmých hrán musí byť v cykle párny počet (aby sme sa dostali do toho vrchola, v ktorom sme začali). Stačí už len ukázať, že aj tých ostatných je párny počet. Na to si zostrojíme „čierny“ graf, ktorý bude vyjadrovať susednosť čiernych políčok. Vrcholy v čiernom grafe budú čierne políčka a hrany budú vyjadrovať to, že spolu dané dva štvorčeky susedia. Bude to vyzerať ako na obrázku.
Majme opäť ľubovoľný cyklus v pôvodnom grafe. Všimnime si jeho hrany, ktoré sú rovnobežné s mriežkou. Každá taká hrana pretína čierny graf práve raz a to v nejakom jeho bode. Šikmé hrany nemajú s čiernym grafom nič spoločné. Rozdeľme si vrcholy čierneho grafu na dve skupiny. Na tie, čo ležia vnútri toho cyklu, túto množinu označme V_1 a tie čo ležia na cykle alebo mimo neho označme V_2. Takto nám celkom prirodzene cyklus rozdelil vrcholy čierneho grafu na dve disjunktné množiny. Nás zaujíma parita počtu vrcholov čierneho grafu, ktoré ležia na obvode cyklu. Počet tých vrcholov je zrejme taký istý, ako počet všetkých hrán, ktoré spájajú vrcholy z V_1 a V_2. Vo všeobecnosti však platí, že v párnom grafe (t.j. z každého vrcholu ide párny počet hrán) platí, že ak jeho vrcholy rozdelíme na dve množiny, tak medzi nimi je párny počet hrán. Rozmyslite si prečo. Tým je však všetko vyriešené.



Druhé riešenie. Dá sa na to ísť aj inak, a to tak, že nájdeme dostatočne dobrý popis, ako štvorčeky farbiť vo všeobecnosti. Teórii grafov sa však opäť nevyhneme. Ak máme len izolované čierne štvorčeky, ľahko rovinu ofarbíme napríklad striedaním zelených a červených riadkov (overte si, že to sedí). Čo však so slučkami? S jednoduchými slučkami (bez takých čiernych políčok, čo susedia so štyrmi čiernymi) sa dá vybabrať tak, že farby vo vnútri slučky vymeníme (ako na obrázku). Prísť na to a zistiť, prečo to funguje, naozaj nie je až také ťažké. Horšie je to pre také komplexnejšie slučky, tam to treba striedať ešte aj vo vnútri.



Tieto poznatky sa dajú, možno nie úplne triviálne, sformalizovať do nasledujúceho postupu. Opäť si zaveďme súradnicovú sústavu a náš starý dobrý čierny graf (z prvého riešenia). Farbu políčka bude ovplyvňovať riadok, v ktorom leží (keďže farby sa snažíme striedať po riadkoch) a to, v akých cykloch leží. Spravme to nasledovne. Vieme, že čierny graf je párny (z každého vrcholu vychádza párny počet hrán). Celý čierny graf rozložíme na cykly, ktoré spolu obsahujú všetky hrany čierneho grafu, ale žiadnu nie viackrát. Ako to spraviť? Všímajme si len neizolované čierne vrcholy. Zoberme si ľubovoľný vrchol čierneho grafu a pustime sa po hranách „na cestu“ tak, aby sme sa nevracali (po každej hrane ideme nanajvýš raz). Keďže z každého vrcholu idú aspoň dve hrany, tak to ide. Časom narazíme na nejaký vrchol, v ktorom sme už boli, čím vlastne vytvoríme nejaký cyklus. Odobratím hrán tohoto cyklu opäť dostaneme párny graf s menej hranami. Opakovaním tohoto postupu odstraňujeme hrany cyklov, až minieme všetky hrany. Preto existujú

disjunktné cykly $C_1, C_2, \ldots, C_k$ také, že ich zjednotením je celý čierny graf.
Je jasné, že každý z našich cyklov rozdelí rovinu na dve časti: vonkajšiu a vnútornú (cyklus je uzavretá krivka v rovine, konkrétne obvod mnohouholníka). Každé biele políčko teda leží buď vnútri cyklu, alebo vonku; na hranici cyklu sú len čierne políčka. Preto môžeme spraviť nasledujúcu vec.
Bielemu políčku (a, b) priradíme číslo $a + P(a, b)$, kde $P(a, b)$ vyjadruje počet cyklov z $C_1, C_2, \ldots, C_k$, v ktorých vnútri leží štvorček (a, b). Teraz jednoducho stačí priradiť farbu podľa parity $a + P(a, b)$. Stačí ukázať, že pri všetkých typoch rozmiestnenia susedov čierneho políčka sú jeho susedia dobre ofarbení. Pre ilustráciu to spravíme pre dva prípady. Ostatné prípady si môžete rozobrať analogicky.
i) Nech (a, b), $(a+1, b)$, $(a, b+1)$ sú čierne, $(a-1, b)$ a $(a, b-1)$ biele. Potom nám ide o paritu čísel $a-1+P(a-1, b)$ a $a + P(a, b-1)$. Políčka $(a-1, b)$ a $(a, b-1)$ však susedia rohom, preto nemôže existovať cyklus taký, že jedno z nich leží vnútri neho a druhé vonku. Preto $P(a-1, b) = P(a, b-1)$. Čiže čísla, ktorých paritu skúmame, sa líšia len o 1. Inak povedané, bieli susedia (a, b) majú rôzne farby.
ii) Nech (a, b), $(a + 1, b)$, $(a - 1, b)$ sú čierne, $(a, b + 1)$ a $(a, b - 1)$ biele. Ide nám o paritu čísel $a + P(a, b + 1)$ a $a + P(a, b - 1)$. Vieme, že cez tie čierne vrcholy prechádza práve jeden z cyklov. Jeden z vrcholov $(a, b + 1)$ a $(a, b - 1)$ v ňom zjavne leží a druhý nie. Každý ďalší cyklus buď obsahuje oba, alebo ani jeden z tých bodov. Preto sa $a + P(a, b + 1)$ a $a + P(a, b - 1)$ líšia len o jedna a opäť máme, čo sme chceli.
Komentár. S týmto príkladom sa dalo hrať a objavovať nejaké zákonitosti. Na úplné riešenie sa však veľmi hodí znalosť aspoň základov teórie grafov a takisto niekoľko netriviálnych myšlienok. Niektorí ste skúšali iné alternatívne postupy, no nie s veľkým úspechom.

Úloha č. 12: *Nech p, q sú navzájom rôzne prvočísla. Zistite, či existuje funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taká, že $f(x)^p$ aj $f(x)^q$ sú polynómy a pritom f nie je polynóm.*

Riešenie: (opravoval Peťo G.)
Nech p, q sú rôzne prvočísla, nech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je taká funkcia, že $f(x)^p$ a $f(x)^q$ sú polynómy. Ukážeme, že potom aj f je polynóm.
Aby sme šetrili písmenká, označme si $P(x) = f(x)^p$ a $Q(x) = f(x)^q$. Oba tieto polynómy si môžeme vyjadriť v tvare

$$\begin{aligned} P(x) &= r(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdots(x-a_m)^{\alpha_m} \qquad \text{a} \\ Q(x) &= s(x-b_1)^{\beta_1}(x-b_2)^{\beta_2}\cdots(x-b_n)^{\beta_n}, \end{aligned}$$

kde $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ sú korene $P(x)$ a $Q(x)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots \beta_n \in \mathbb{N}$ sú exponenty prislúchajúce týmto koreňom a platí $\alpha_i \neq \alpha_j$ a $\beta_i \neq \beta_j$ pre všetky $i \neq j$. Keďže f je funkcia z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, je aj $P(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, preto aj jeho najvyšší koeficient $r \in \mathbb{R}$, analogicky $s \in \mathbb{R}$. Vieme, že $(P(x))^q = (f(x))^{pq} = (Q(x))^p$, takže

$$r^q(x-a_1)^{\alpha_1 q}(x-a_2)^{\alpha_2 q}\cdots(x-a_m)^{\alpha_m q} = s^p(x-b_1)^{\beta_1 p}(x-b_2)^{\beta_2 p}\cdots(x-b_n)^{\beta_n p}.$$

Z tejto rovnosti polynómov vyplýva niekoľko čiastkových rovností. Zjavne $r^q = s^p$, $m = n$ a $\{a_1, \ldots, a_m\} = \{b_1, \ldots, b_n\}$, teda množiny koreňov $P(x)$ a $Q(x)$ sa rovnajú, rozdiel je iba v násobnosti. Nech bez ujmy na všeobecnosti $a_i = b_i$, potom dostávame aj $\alpha_i q = \beta_i p$ pre všetky $i \in \{1, \ldots, n\}$. Keďže p a q sú nesúdeliteľné, platí $p \mid \alpha_i$ a $q \mid \beta_i$.
Všimnime si teraz, že aspoň jedno z čísel p, q je nepárne. Bez ujmy na všeobecnosti nech je to p. Potom je funkcia f v každom bode $x \in \mathbb{R}$ jednoznačne určená hodnotou $P(x)$. Oborom hodnôt f je totiž podľa zadania množina $\mathbb{R}$ a nepárne odmocniny sú nad $\mathbb{R}$ jednoznačne určené. Funkcia f musí byť tvaru

$$f(x) = r^{1/p}(x-a_1)^{\alpha_1/p}(x-a_2)^{\alpha_2/p}\cdots(x-a_m)^{\alpha_m/p},$$

pretože spĺňa rovnosť $(f(x))^p = P(x)$. Navyše, z predošlých úvah vyplýva jednoznačnosť tohto riešenia. Keďže ale $p \mid \alpha_i$, funkcia f je polynóm.
Iné riešenie:
Namiesto komplexných čísel využijeme, že polynómy sa dajú deliť so zvyškom. Preto pre nich fungujú niektoré veci tak, ako pre celé čísla, napríklad vieme nájsť najväčšieho spoločného deliteľa dvoch polynómov. (Ako?)
Čísla p, q sú nesúdeliteľné, preto existujú celé čísla a, b také, že $ap + bq = 1$.[7] Podľa zadania existujú polynómy $P(x)$ a $Q(x)$ také, že $f(x)^p = P(x)$, $f(x)^q = Q(x)$. Potom platí

$$f(x) = f(x)^{ap+bq} = f(x)^{ap} \cdot f(x)^{bq} = P(x)^a Q(x)^b.$$

Keby čísla a, b boli obe nezáporné, sme hotoví, to však takmer nikdy nie je pravda. Aj tak však z toho vieme, že naša funkcia sa dá zapísať v tvare

$$f(x) = \frac{R(x)}{S(x)},$$

[7]Dokážte si to. To isté platí aj pre polynómy: ak $P(x)$, $Q(x)$ sú dva polynómy s reálnymi koeficientami, tak existuju polynómy $A(x)$ a $B(x)$ také, že $A(x)P(x) + B(x)Q(x) = D(x)$, kde $D(x)$ je najväčší spoločný deliteľ polynómov $P(x)$ a $Q(x)$. Namiesto polynómov s reálnymi koeficientami môžeme uvažovať polynómy s racionálnymi alebo komplexnými koeficientami. Zachová sa táto vlastnosť, ak uvažujeme koeficienty celočíselné?

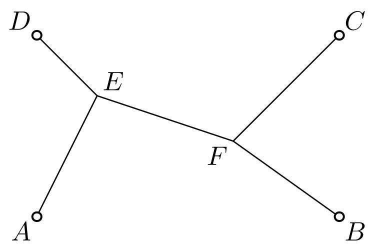
kde $R(x)$ a $S(x)$ sú nesúdeliteľné polynómy s reálnymi koeficientami. Potom

$$P(x) = f(x)^p = \frac{R(x)^p}{S(x)^p}, \qquad \text{čiže} \qquad P(x)\cdot S(x)^p = R(x)^p.$$

Ľavá strana je deliteľná polynómom $S(x)$, preto aj pravá musí byť. Lenže $R(x)$ a $S(x)$ sú nesúdeliteľné. Toto môže nastať len vtedy, keď je polynóm $S(x)$ konštantný. Koniec.

Úloha č. 13: *Vo vrcholoch obdĺžnika sú štyri mestá. Chceme postaviť cestnú sieť tak, aby sa z každého mesta dalo dostať do každého a pri tom aby táto sieť mala minimálnu dĺžku (t.j. súčet dĺžok jednotlivých úsekov). Ako to máme spraviť?*

Riešenie: (opravoval Mazo)

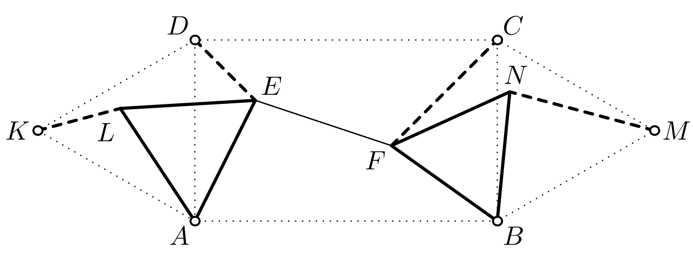


Po chvíľke kreslenia rôznych cestných sietí usúdime, že hľadaná sieť s minimálnou dĺžkou vyzerá asi ako na prvom obrázku. Je jasné, že sa musí skladať z úsečiek, keďže úsečka je najkratšou spojnicou dvoch bodov. Pripúšťame aj to, že niektoré z bodov budú totožné, napríklad body E a F či A a E. Celá cestná sieť leží v našom obdĺžniku: keby nejaký bod bol mimo, namiesto neho použijeme k nemu najbližší bod obdĺžnika; takouto konštrukciou by sa dĺžka siete skrátila (akú vlastnosť obdĺžnika sme použili v tejto úvahe?).

Siete s tromi a viac križovatkami uvažovať netreba. Prečo? Majme nejakú sieť s minimálnou dĺžkou. Vezmime si jednu cestu z A do B takú, že nepretína sama seba (taká cesta musí existovať, cestná sieť je súvislá). Bod C buď už leží na tejto ceste, alebo je na ňu nejako pripojený. Pripojený môže byť len v jednom bode jednou cestou, inak by sme dostali v našej cestnej sieti okruh, a ten v sieti minimálnej dĺžky byť nemôže. A teraz na spomínané cesty musí byť pripojený bod D, pribudne jedna ďalšia križovatka. (Niektoré úseky cestnej siete môžu mať nulovú dĺžku, čo zodpovedá tomu, že križovatka splýva s inou križovatkou alebo niektorým vrcholom obdĺžnika).

Našim cieľom je minimalizovať súčet dĺžok jednotlivých úsekov našej siete. Za týmto účelom by bolo fajn, keby tvorili lomenú čiaru s pevným začiatočným aj koncovým bodom; minimálnej sieti by zodpovedalo, že naše úseky ležia na priamke. (Sme inšpirovaní mnohými podobnými situáciami, s ktorými sme sa už stretli. :) Kedy nastáva v trojuholníkovej nerovnosti rovnosť? Ako minimalizovať obvod trojuholníka, ktorého vrcholy ležia na jednotlivých stranách daného trojuholníka? Ako sa dokazuje Ptolemaiova nerovnosť s využitím Simsonovej priamky?) Skúste vyriešiť jednoduchšiu úlohu. Daný je trojuholník KLM. Nájdite bod P v jeho rovine taký, že súčet vzdialeností $PK + PL + PM$ je minimálny. Potom pokračujte v čítaní riešenia a potom skúste túto úlohu vyriešiť znova, ak sa vám to teraz nepodarilo.

V rovine sú dané dve úsečky. Chceme ich premiestniť tak, aby mali spoločný krajný bod. Ako sa premiestňujú úsečky v rovine? No predsa zhodnými zobrazeniami: posunutím, otočením, … Naša sieť sa skladá z konečného počtu úsečiek, preto vhodným premiestňovaním dostaneme všetky úsečky našej cestnej siete do lomenej čiary.



Uvažujme otočenie okolo bodu A o 60 stupňov proti smeru hodinových ručičiek. V ňom sa bod D zobrazí do bodu K a bod E do bodu L. Trojuholníky ADK a AEL sú rovnostranné (kvôli tomuto otáčame presne o 60 stupňov). Trojuholník ALK je zhodný s trojuholníkom AED (premyslite si), preto $KL = DE$.

Ďalej uvažujme otočenie okolo bodu B o 60 stupňov v smere hodinových ručičiek. Bod C sa zobrazí do bodu M a bod F do bodu N. Analogicky ako v predchádzajúcom prípade sú trojuholníky BCM a BFN rovnostranné a trojuholníky BFC a BNM zhodné. Celkovo je teda súčet dĺžok úsekov našej cestnej siete rovný

$$DE + AE + EF + BF + CF = KL + LE + EF + FN + NM,$$

čo je vždy aspoň dĺžka úsečky KM.

Rovnosť nastane vtedy, keď ležia úseky KL, LE, EF, FN, NM na priamke. Rozmyslite si, že to je práve vtedy, keď trojuholníky AED a BFC sú rovnoramenné s uhlami 120 stupňov pri vrcholoch E a F.

Ostáva uvážiť, či robíme takéto trojuholníky nad dlhšou alebo kratšou stranou obdĺžnika $ABCD$. No, nad tou nie dlhšou, keďže $|KM| = |AB| + |BC|\sqrt{3}$. Vtedy je aj zaručené, že oba trojuholníky AED a BFC existujú a nemajú spoločný bod.

Úloha č. 14: *Máme pred sebou rad vriec tiahnúci sa na obe strany do nekonečna. V týchto vreciach je nejako rozmiestnený konečný počet zemiakov. V tejto neľahkej situácii môžme robiť dve operácie:*

1) Nech A, B, C sú v tomto poradí (zľava doprava) tri susedné vrecia. Zoberieme po jednom zemiaku z vriec A a B a pridáme jeden zemiak do vreca C.

2) Nech A, B, C, D sú v tomto poradí (zľava doprava) štyri susedné vrecia. Zoberieme dva zemiaky z vreca C

a pridáme po jednom zemiaku do vriec A a D.
Dokážte, že po istom počte krokov sa nutne dostaneme do situácie, v ktorej už nemôžeme použiť ani jednu operáciu. Zistite, či výsledná situácia závisí od operácií, ktoré sme použili v jednotlivých krokoch.

Riešenie: (opravovali Feráč a Ondro)
Ako prvé by sme si mali všimnúť, že medzi danými operáciami je jeden zásadný rozdiel. Vykonaním 1) sa počet zemiakov o jedna zníži, zatiaľ čo 2) ich počet nemení. Z toho môžeme hneď usúdiť, že operáciu 1) môžeme použiť iba konečne veľa krát. Pre prvú časť úlohy nám teda stačí ukázať, že nie je možné donekonečna opakovať operáciu 2) bez toho, aby sme niekedy nevykonali operáciu 1). Inak povedané, že po istom počte operácií 2) sa nutne dostaneme do situácie, v ktorej už nemôžeme 2) použiť. Odteraz nám teda stačí uvažovať už len operácie typu 2).
Pre zjednodušenie vyjadrovania si očíslujme vrecia zľava doprava od $-\infty$ do ∞ (zatiaľ nám nezáleží na tom, kde presne sa nachádza nula) a označme celkový počet zemiakov n (ten teraz ostáva konštantný počas celého procesu). Najprv ukážeme, že všetky zemiaky ostávajú v ohraničenej oblasti radu vriec. Presnejšie, existuje d_n také, že ak sa na začiatku zemiaky vyskytujú len vo vreciach $\{a, \dots, b\}$, tak po ľubovoľnom počte krokov budú vždy len vo vreciach $\{a - d_n, \dots, b + d_n\}$. Toto zrejme platí pre malé počty zemiakov: môžeme zobrať napríklad $d_1 = 0$ a $d_2 = 2$. Ďalej pokračujeme indukciou. Predpokladajme, že sme našli $d_1, \dots, d_{n-1}$ a pozrime sa na nejaké počiatočné rozostavenie n zemiakov. Označme a resp. b číslo najľavejšieho resp. najpravejšieho vreca obsahujúceho aspoň jeden zemiak v tomto rozostavení. Uvedomte si, že vždy, keď odoberieme zemiak z nejakého vreca, tak pridáme po jednom zemiaku do vriec napravo aj naľavo od neho (nie nutne do susedných vriec), a preto budeme mať vždy aspoň jeden zemiak v oboch úsekoch $\{-\infty, \dots, a\}$ a $\{b, \dots, \infty\}$. To však znamená, že presunutím zemiaku do vzdialenosti d od pozícií $\{a, \dots, b\}$ zväčšíme vzdialenosť medzi najpravejším a najľavejším zemiakom tiež aspoň na d. Zemiakov je však stále rovnako veľa, preto ich rozťahovaním sa musia zväčšovať medzery medzi susednými zemiakmi. Konkrétne, ak je vzdialenosť medzi okrajovými zemiakmi aspoň d, tak medzi nimi musí existovať úsek dĺžky aspoň $(d + 1 - n)/(n - 1)$ neobsahujúci žiadne zemiaky. Označme $m = \max\{d_i \,|\, 1 \le i < n\}$. Akonáhle dostaneme nejaký zemiak do vzdialenosti aspoň $(2m + 1)(n - 1)$ od počiatočných pozícií $\{a, \dots, b\}$, tak nám vznikne medzera dĺžky aspoň $2m$. Táto nám rozdelí zemiaky na dve skupiny vzdialené aspoň $2m$ obsahujúce menej ako n zemiakov. Rozťahovanie oboch skupín je však ohraničené číslom m (tak sme si m zadefinovali), preto zemiaky v rôznych skupinách sa už nemôžu dostať dosť blízko na to, aby sa navzájom ovplyvňovali. To znamená, že od tohto okamihu môžeme posunúť okrajové zemiaky najviac o m. To nám dáva $d_n \approx (2m + 1)(n - 1) + m$.
A ako nám toto pomôže? Všimnite si, že každá operácia (stále len druhého typu) nám akosi zanáša zemiaky doľava. Formálne, s každou operáciou sa aritmetický priemer pozícii všetkých zemiakov (môžete si to predstaviť ako ich ťažisko) zmenší o $1/n$. My už ale vieme, že všetky možné pozície sú zdola ohraničené (číslom $a - d_n$), a preto aj ich priemer musí byť ohraničený. A to znamená, že môžeme vykonať len obmedzene veľa operácií.
Tým sa dostávame k druhej časti úlohy, kde musíme znovu zobrať do úvahy obe zadané operácie. Ako býva v úlohach tohto typu zvykom, snažíme sa nájsť nejaký užitočný invariant (vlastnosť, ktorá sa zachováva počas celého procesu). Predstavte si, že každému zemiaku priradíme nejakú hodnotu závislú na jeho aktuálnej polohe a všetky tieto hodnoty potom sčítame. Dá sa to spraviť tak, aby sa nám tento súčet vykonávaním operácií nemenil? Označme H_k hodnotu priradenú zemiaku vo vreci s číslom k. Požadujeme, aby $H_k + H_{k+1} = H_{k+2}$ a $2H_k = H_{k-2} + H_{k+1}$. Overte si, že Fibonacciho postupnosť (definovaná ako $F_1 = F_2 = 1$ a $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ pre $k > 2$) spĺňa obe tieto podmienky. Aby sme sa vyhli problémom so zápornými indexami, môžeme si prečíslovať vrecia tak, aby všetky zemiaky boli vždy len napravo od nuly (to vieme urobiť, keďže zemiaky sa môžu vyskytovať len v ohraničenej oblasti vriec).
Zamyslime sa teraz na tým, čo všetko už vieme povedať o záverečnej situácii. Súčet hodnôt všetkých zemiakov sa vykonávaním jednotlivých operácií nemení, takže na konci musí byť taký istý ako bol na začiatku. Navyše, vo výslednej pozícii už nemôžeme spraviť žiadnu operáciu, preto všetky vrecia obsahujú najviac po jednom zemiaku a z každých dvoch susedných vriec je aspoň jedno prázdne. Ostáva ukázať, že takéto rozostavenie je iba jedno, čo už nechávame na vás (môžete vyskúšať napríklad indukciu vzhľadom na pozíciu najpravejšieho zemiaku).

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
1.	Hapák Samuel	3.	Gamča BA	7	5			9	9	9	8	9		44	44
1.	Szabados Michal	4.	ŠPMNDG BA	9	6			9	9	9	9	8		44	44
3.	Kocák Tomáš	3.	GPoš KE	7	2		9	7	9	9	9			43	43
4.	Bzdušek Tomáš	4.	GPdC PN	9	3			5	9	9	9	9		41	41
5.	Kočiský Tomáš	3.	Gamča BA	4	1		9	8		7	9	3		36	36
6.	Tureková Katarína	3.	GJGT BB	9	3			9	9	9	6	1		34	34
7.	Eiben Eduard	2.	GPoš KE	4	1		9	7	9	7				32	32
8.	Matejovičová Lenka	3.	Gamča BA	9	3			9	9	3	9	1		31	31
9.	Jakubík Jozef	3.	GKom PE	7	2		4	9	5	5		6		29	29
10.	Mikuláš Ondrej	4.	GBST LC	11	6			7	7	9	2	3		28	28

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
11.	Csiba Peter	2.	ŠPMNDG BA	4	0	8	2	8	4	5				27	27
11.	Popovič Viktor	1.	GJAR PO	3	0	9	8	7	1	2				27	27
11.	Spišiak Michal	2.	Gamča BA	4	1			9	9	3	6			27	27
14.	Alif Maja	3.	GCelje	4	1	5		9	9	8				26	26
14.	Vendel Dávid	2.	GPoš KE	5	1		9	8	6	2	1			26	26
16.	Boža Vladimír	3.	GDT PP	7	4			0	8	3	7	7		25	25
16.	Kubina Filip	3.	GPOH DK	6	1		9	0	9	3	1	3		25	25
16.	Polačko Martin	2.	GAlej KE	6	1		9	7	6	3				25	25
19.	Starovská Mária	3.	Gamča BA	9	3				9	9	6			24	24
19.	Vancáková Judita	4.	GPoš KE	7	2		4	7	2	2	9			24	24
21.	Bendová Lenka	2.	GĽŠ TN	3	0	7	9	0		5	2			23	23
21.	Jursa Jakub	2.	GAlej KE	6	1		9	7	4	3				23	23
23.	Jablonická Kristína	2.	ŠPMNDG BA	4	0	8	1	7		1		5		22	22
23.	Kobza Vladimír	3.	GJGT BB	5	0	7	9	0	1		4	1		22	22
25.	Kuzma Tomáš	2.	GAlej KE	6	1		9	7		3				19	19
25.	Szabadosová Emília	3.	ŠPMNDG BA	6	0		9	7		1	2			19	19
27.	Hodásová Judita	2.	Gamča BA	4	0		3	7	6	2				18	18
27.	Štrbka Dávid	3.	Gamča BA	4	0		6	7	3	2				18	18
29.	Baláž Miroslav	3.	GLS HE	8	3			7	6	3				16	16
29.	Petrucha Michal	2.	GMet BA	4	0			7	6	3				16	16
29.	Simanová Lucia	3.	Gamča BA	7	1		1	7	1	2	5			16	16
32.	Dvoranová Mária	2.	G Šurany	4	0	8	3		3					14	14
32.	Hudec Vladimír	2.	GVar ZA	4	0		7	7						14	14
32.	Kuklišová Nina	2.	GMet BA	5	0	6	4	0		3		1		14	14
32.	Melo Matej	2.	GsvFA ZA	4	0	7	3	0		2		2		14	14
32.	Šagát Marián	3.	GŠkol PB	6	1		9			5				14	14
37.	Godány Martin	4.	ŠPMNDG BA	7	1		6	7						13	13
37.	Hojčka Michal	2.	GKom PE	5	2		4	0		3		6		13	13
37.	Magyarová Katarína	4.	GBST LC	8	1		3		5	1	2	2		13	13
40.	Fekiač Jozef	2.	Gamča BA	4	0	8		0		2	2	0		12	12
40.	Kovalčíková Kristína	4.	GVar ZA	11	3			1	6	1		4		12	12
40.	Paulovský Michal	3.	Gamča BA	5	0		1	8		2	1	0		12	12
43.	Biskupičová Lívia	2.	GŠkol PB	4	0		4	0	1	2	4			11	11
43.	Čevorová Kristína	4.	ŠPMNDG BA	9	3			7	1	2	1	0		11	11
43.	Haas Emil	2.	Gamča BA	6	1				8	2	1			11	11
46.	Dvoranová Veronika	3.	G Šurany	6	1		3	0	5		2			10	10
46.	Herencsár Albert	2.	Gmaď GA	5	1		9	0		1				10	10
46.	Kotrlová Katarína	2.	GVPT MT	4	0	7		0	3					10	10
49.	Juríková Katarína	3.	GJGT BB	6	1		6	0		3				9	9
49.	Košinárová Alena	3.	Gamča BA	8	3			7		2				9	9
49.	Minárik Marián	3.	GPár NR	5	1		0		3	2	4			9	9
49.	Zubnárová Katarína	3.	GJGT BB	4	0	8				1	0			9	9
53.	Kotrlová Janka	3.	GVPT MT	3	0	6		0		2				8	8
54.	Melicherčík Martin	3.	GPár NR	9	3		0		3	3				6	6
54.	Vdovičenko Martin	3.	GPár NR	7	2		0		3	3				6	6
56.	Slovík Lukáš	3.	GJGT BB	4	0					1	1	1		3	3
57.	Alberty Roman	3.	GJGT BB	4	0			0		2				2	2
57.	Mieresová Ľubomíra	0.	GJH BA	1	0	0		1	1					2	2
57.	Pažický Martin	2.	GJH BA	2	0		2				0			2	2
60.	Vrbovská Mária	3.	GJGT BB	5	0									0	0
60.	Šiagi Miroslav	3.	GJGT BB	4	0									0	0

kategória ALFA, Bratislava

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Konečný Jakub	1.	Gamča BA	3			9	9	9	7	9		43
2.	Hagara Michal	1.	GJH BA	2		9	9	2	7	9	8		42

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
2.	Karásková Natália	1.	Gamča BA	3			9	9	9	6	9		42
4.	Firbas Karol	1.	Gamča BA	2			9	3	7	3	9		31
5.	Hašík Juraj	1.	Gamča BA	3			9	3	9		9		30
5.	Rudolfová Barbora	1.	GMet BA	2		9		6	6		9		30
7.	Belan Tomáš	1.	ŠPMNDG BA	2		7		9	9	4			29
8.	Peitl Tomáš	1.	ŠPMNDG BA	2		6		6	9		7		28
9.	Matulová Daniela	1.	GVaz BA	1	9	9	4		1		0		23
10.	Floriánová Michaela	1.	Gamča BA	3			2	4	4	3	8		21
11.	Křemenová Lucie	1.	GMet BA	1		7	0	4	0	4	3		18
12.	Sabová Simona	2.	ŠPMNDG BA	3			7	2			8		17
13.	Buchholcerová Anna	1.	GBil BA	2			9	2	0	3	0		14
14.	Formánek Michal	2.	ŠPMNDG BA	3				2			9		11
15.	Mieresová Ľubomíra	0.	GJH BA	1		5		3	0		1		9
16.	Pažický Martin	2.	GJH BA	2						2			2
17.	Zajac Anton	1.	Gamča BA	3		7			1				1

kategória ALFA, západ

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Bogár Ján	1.	GĽŠ TN	2		5	4	4	8		7		28
2.	Bendová Lenka	2.	GĽŠ TN	3		9	4	3	7	9	0		23
2.	Tonhauserová Ivana	1.	GPár NR	2		8	9	2	4	0			23
4.	Kotry Lukáš	1.	GPár NR	2		7	5	2	2	0			16
5.	Bošanská Eva	2.	GĽŠ TN	3			1		9	3	0		13
6.	Kutnár Marek	1.	GPár NR	2		7	3	2					12

kategória ALFA, stred

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Porembová Alexandra	1.	BiG Sučany	2		9	9	9	9	4	9		45
2.	Bachratý Martin	1.	GVO ZA	3			9	9	9	7	9		43
3.	Rošťáková Zuzana	1.	GMMH LM	2		8	9	4	9	9	2		39
4.	Lauková Ivana	1.	GJL MT	2		9		5		5	9		28
5.	Štyráková Kamila	1.	GPOH DK	2		9		9	9				27
6.	Ziman Michal	1.	GBST LC	1		9		4	3		8		24
7.	Majdiš Mojmír	1.	GPOH DK	2		8		2	9	3	0		22
8.	Vajdová Zlatica	1.	GJGT BB	2		8			6	2	2		18
9.	Jagoš Ľubomír	1.	GVO ZA	3			9	6			1		16
10.	Suchá Nina	2.	GVPT MT	3			0	0	5	2	0		7
11.	Duníková Katarína	1.	GŠkol PB	1	5	1		0	0		0		6
11.	Kotrlová Janka	3.	GVPT MT	3					6		0		6

kategória ALFA, východ

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Cocuľová Zuzana	1.	GPoš KE	3			9	9	8	6	8		40
2.	Batmendijnová Kristína	2.	GTV SL	3			9	9	9	4	8		39
3.	Lešková Andrea	1.	G Lipany	1		9	9	4	9	4	7		38
4.	Popovič Viktor	1.	GJAR PO	3			9	3	9	8	7		36
5.	Bačo Ladislav	1.	GPoš KE	3			9	9	8	9			35
6.	Rigdová Emília	1.	GKuk PP	2		7	4	7	9	3	7		34
7.	Hudák Adam	1.	GMRŠ KE	1	9	9		4	4		0		26
8.	Šefčovičová Nina	1.	GMRŠ KE	1		7		1		2	0		10
9.	Koreňová Nikola	3.	GPH MI	3			0	1	1				2

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$

kategória ALFA, mimo SR

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Matúš Kopf	1.	GMen OP	2	4	9	9	9	2	7			38

kategória GAMA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**p**	$\sum$
1.	Hapák Samuel	3.	Gamča BA	8	9	7	6	4		85
2.	Kubina Filip	3.	GPOH DK	1	3		1	1		14
3.	Paulovský Michal	3.	Gamča BA	1	0		0			1
4.	Slovík Lukáš	3.	GJGT BB	1	1		0			4
5.	Szabados Michal	4.	ŠPMNDG BA	9	8	6	7			100