Korešpondenčný Matematický Seminár

Vzorové riešenia 1. série zimného semestra 2007/2008

Úloha č. 1: *a) V Krajine majú mince s hodnotami* 10 *a* 11 *korún krajinských. Problém však je, že niektoré sumy sa nimi bez vydávania nedajú zaplatiť. Nájdite najvyššiu takú sumu.*
b) Vláda v snahe zlepšiť situáciu zaradila do obehu aj mince s hodnotou 12 *korún krajinských. Asi je vám jasné, že toto opatrenie vlády stále nestačí na to, aby sa dali zaplatiť všetky možné sumy. Aká je teraz najvyššia suma, ktorá sa nedá zaplatiť bez vydávania?*

Riešenie: (opravoval Bebe)
a) Skúsme zistiť, ktoré sumy sa dajú zaplatiť. Čo ak suma končí nulou? Tú vieme bez obáv zaplatiť pomocou desiatok. Teraz sa pozrime na to, čo vieme získať pomocou 11 Kk (jedenásť korún krajinských). Napríklad sumy 11, $22 = 11 + 11$, $33 = 11 + 11 + 11$,... veľmi jednoducho. Vieme však zaplatiť napríklad 54 korún? Áno, štyroma 11 Kk a jednou 10 Kk. Teraz si môžeme všimnúť jednu podstatnú vec. Skúsme zaplatiť sumu, ktorá má na mieste jednotiek inú číslicu ako nulu. Desaťkorunové mince túto cifru neovplyvňujú, lebo sa končia nulou a sčítaním ľubovoľného počtu núl na mieste jednotiek dostaneme vždy len nulu. A preto musíme dať 11 Kk podľa toho, aké číslo je na mieste jednotiek v našej sume. Napríklad pri 65 je na mieste jednotiek číslo päť, takže potrebujeme päť 11 Kk a na doplatenie použijeme desaťkorunu.
A prečo niektoré sumy zaplatiť nevieme? Zamyslime sa najskôr nad dvojcifernými číslami. Napríklad, aby sme zaplatili 37, potrebujeme aspoň sedem 11 Kk (podľa číslice na mieste jednotiek). Tie však majú súčet 77, čo je viac ako 37. Ak použijeme na zaplatenie nejaké 11 Kk, tak každá z nich zvýši číslicu na mieste desiatok aj jednotiek o jedna. Minca 10 Kk zvyšuje len číslicu na mieste desiatok. Na to, aby bola takáto suma zaplatiteľná, musí byť jej číslica na mieste desiatok väčšia alebo rovná, ako tá na mieste jednotiek. Zrejme všetky čísla medzi 90 a 99 vieme zaplatiť. Pridaním niekoľkých 10 Kk k týmto sumám vieme zaplatiť aj ľubovoľnú inú väčšiu sumu (napríklad $129 = 99 + 20 = 9 \cdot 11 + 2 \cdot 10$).
A čo tak 89? V tomto čísle je číslica na mieste jednotiek väčšia ako tá na mieste desiatok, a teda ju nevieme zaplatiť. A keďže všetky väčšie vieme, je to naša hľadaná suma.

b) Skúsme riešiť túto časť trošku inak. Na začiatok si predstavme, že nejakú sumu vieme zaplatiť. Potom použitím 10 Kk vieme zaplatiť aj sumy väčšie o 10 Kk, 20 Kk,... Inak povedané, ak vieme zaplatiť nejakú sumu, tak vieme zaplatiť aj všetky väčšie sumy s rovnakou cifrou na mieste jednotiek. Na začiatku vieme zaplatiť sumy 10 Kk, 11 Kk, 12 Kk a s ich použitím aj 20 Kk, 21 Kk, 22 Kk, 30 Kk, 31 Kk,... Ktorá bude prvá zaplatiteľná suma končiaca trojkou? Hodnotu 13 Kk zaplatiť nevieme, no 23 Kk ($23 = 11 + 12$) už áno.
Skúsme pre každú číslicu nájsť najmenšiu zaplatiteľnú sumu, ktorá má túto číslicu na mieste jednotiek. Jednotky sú opäť ovplyvnené len 11 Kk a 12 Kk. Všimnime si, že dvojku na mieste jednotiek vieme dostať dvoma spôsobmi. Buď jednou 12 Kk, alebo dvoma 11 Kk. Použitie dvoch 11 Kk nám zvýši číslicu na mieste desiatok o dva, zatiaľ čo použitie 12 Kk len o jedna. My sa však snažíme nájsť najmenšie zaplatiteľné sumy. Preto budeme používať namiesto dvoch 11 Kk jednu 12 Kk.
Najmenšie sumy s párnou číslicou na mieste jednotiek vieme získať jednoducho. Napríklad štvorku na mieste jednotiek ako 12 Kk + 12 Kk, šestku ako 12 Kk + 12 Kk + 12 Kk,... Preto sú najmenšie sumy s párnymi ciframi na mieste jednotiek 12, 24, 36 a 48. Pre nepárne číslice dostaneme výsledok rovnako. Trojku získame ako 12 Kk + 11 Kk, päťku ako 12 Kk + 12 Kk + 11 Kk,... Tieto čísla budú 23, 35, 47 a 59. Najväčšie z nich je 59. Zároveň všetky ostatné čísla väčšie ako 50 sa zaplatiť dajú, lebo majú rovnakú číslicu na mieste jednotiek ako už zaplatiteľné menšie sumy. Teda najväčšia suma, ktorú nevieme zaplatiť, bude 49.

Úloha č. 2: *Marta a Irena sú roboty skúmajúce povrch Marsu, ktoré sa oba pohybujú rovnomerným priamočiarym pohybom smerom ku sebe. Na poludnie boli od seba vzdialené presne* 90 *km, o nejaký čas neskôr sa tesne minuli a o druhej poobede už boli opäť od seba vzdialené* 90 *km. Inžinier Sirup pracujúci v kontrolnom centre vypočítal, že súčet vzdialenosti precestovanej Martou pred stretnutím s Irenou a vzdialenosti precestovanej Irenou po stretnutí s Martou je* 60 *km. Môže mať inžinier Sirup pravdu?*

Riešenie: (opravovali Jano M. a Mišo T.)
Na začiatku boli Marta a Irena od seba vzdialené 90 km. Preto do stretnutia spoločne prešli práve túto vzdialenosť. Po stretnutí sa od seba vzďaľovali, až kým neboli od seba opäť vzdialené 90 km. Keďže sa pohybovali rovnomerným pohybom, vzdialenosť do stretnutia museli prejsť za taký istý čas ako rovnako veľkú vzdialenosť po stretnutí. To znamená, že Irena (aj Marta) za taký istý čas prešla vďaka rovnomernému pohybu pred stretnutím rovnakú vzdialenosť ako po ňom. Hľadáme súčet vzdialeností prejdených Martou pred stretnutím a Irenou po stretnutí.

Práve sme zdôvodnili, že Irena prejde pred stretnutím rovnakú vzdialenosť ako po ňom. Z toho vyplýva, že hľadaný súčet je rovnaký ako súčet vzdialeností prejdených oboma robotmi pred stretnutím. Vieme, že to je 90 km, čiže inžinier Sirup sa mýli.

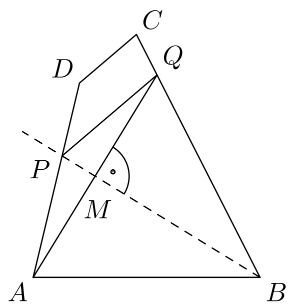
__Úloha č. 3:__ *Na súťaži v jedení gumených medvedíkov sa zúčastnili štyria súťažiaci A, B, C a D. Tu je záznam z ich rozhovoru pred súťažou:*
A: „Vyhrám ja!“
B: „Ja som chlapec a budem prvý!“
C: „Chlapci sa mýlia, D skončí jedno miesto za mnou a za A už nebudú žiadni chlapci.“
D: „C má pravdu a za A už nebudú žiadne dievčatá.“
Po súťaži sa ukázalo, že práve dve z týchto štyroch tvrdení boli pravdivé. Zistite ako dopadla súťaž a aké sú pohlavia súťažiacich ak viete, že sú medzi nimi práve dvaja chlapci a že žiadni dvaja súťažiaci neskončili na tom istom mieste.

Riešenie: (opravovala Ivka a Hanka)
Viacerí z vás riešili úlohu rozpísaním všetkých možností a vylúčením tých, ktoré nevyhovujú zadaniu. Posledná možnosť, ktorá ostala, bola riešením úlohy. Môžeme si to však trošku zjednodušiť tým, že sa pozrieme na výroky a zamyslíme sa nad nimi. Aby sme si v riešení nepomýlili osoby a výroky, píšme osoby A, B, C, D normálnym písmom a výroky A, B, C, D kurzívou. Ak platí výrok D, tak nutne musí platiť výrok C, teda nemôže už platiť žiadny iný výrok, lebo iba dva výroky možu byť pravdivé. Touto úvahou sme vylúčili kombinácie dvojíc pravdivých výrokov (A, D) a (B, D). Zostali nám ešte kombinácie (A, B), (A, C), (B, C) a (C, D).
Môžu platiť súčasne výroky A a B? Nie, pretože na prvom mieste môže byť iba jeden človek. Výroky A, C tiež nemôžu platiť súčasne, lebo ak A je na prvom mieste a v súťaži sú dvaja chlapci, tak za A je určite aspoň jeden chlapec, ale C tvrdí že za A už žiadny chlapec nie je, čo je spor. Výroky B a C tiež nemôžu platiť súčasne, pretože B tvrdí, že je chlapec a C tvrdí, že chlapci klamú, čo je tiež spor.
Teda jediná možná situácia je, keď pravdu vravia C a D. Vtedy z výroku C (chlapci klamú) vieme, že dievčatá sú C a D, keďže obe hovoria pravdu a chlapci sú A, B. (Rozmyslite si prečo.) A skončil na štvrtom mieste, pretože za ním nie sú ani chlapci ani dievčatá. Na pozícii za C sa nachádza D. Aby výrok B nebol pravdivý, B nesmie byť na prvom mieste. (Lebo už vieme, že je chlapec.) Preto skončil hneď za dievčatami, čiže tretí. Súťažiaci skončili v poradí od prvého miesta postupne C, D, B, A.

Komentár: Niektoré chyby sa opakovali často a tak sme sa rozhodli vás všetkých na ne ešte raz upozorniť. Ako sme už povedali, ak výrok D platí, tak musí platiť aj výrok C. To však ešte neznamená, že ak platí výrok C, tak musí platiť D. Výrok D je totiž zložený z dvoch častí a jedna je síce pravdivá (ak predpokladáme, že výrok C platí), ale o druhej zatiaľ nič nevieme. Keby za A ešte nejaké dievčatá boli, tak nastane situácia, že výrok C platí a D nie. Taktiež mali niektorí z vás problémy s negovaním výrokov. Ak B tvrdí že vyhrá a je chlapec, tak aby tento výrok neplatil, stačí, aby B bol buď dievča, alebo nevyhral - netreba nutne obe naraz.

__Úloha č. 4:__ *Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník, ktorého vnútorné uhly BAD a BCD majú rovnakú veľkosť. Os uhla ABC pretína priamku AD v bode P. Kolmica z bodu A na priamku BP pretína priamku BC v bode Q. Dokážte, že priamky PQ a CD sú rovnobežné.*

Riešenie: (opravovala Kika a Mazo)



Označme priesečník priamok AQ a BP písmenom M. Os uhla ABC delí tento uhol na dve rovnaké časti – uhly ABM a MBC. Ďalej vieme, že uhly AMB a BMQ sú pravé. Trojuholníky ABM a QBM majú okrem dvoch dvojíc rovnakých uhlov aj zhodnú stranu BM, teda o nich môžeme povedať, že sú zhodné. Z toho vyplýva, že uhly MAB a MQB sú rovnaké a úsečky AM a MQ majú rovnakú dĺžku. Aj trojuholníky AMP a QMP sú zhodné, lebo majú pravý uhol pri vrchole M, spoločnú stranu PM a rovnaké strany AM a QM (použili sme vetu *sus*). Čiže aj uhly PAM a PQM sú rovnaké. Teraz si všimnime, že uhly PAB a PQB sú rovnaké – vznikli sčítaním dvoch rovnako veľkých uhlov. Zo zadania vieme, že je s nimi rovnako veľký aj uhol DCB. A už sme na konci: priamka QB pretína priamky DC a PQ pod rovnakým uhlom, preto sú tieto dve priamky rovnobežné.
Pri tejto poslednej úvahe potrebujeme zvážiť, či náš dôkaz je všeobecný alebo sa hodí len pre tento konkrétny obrázok. V prvom rade bod Q leží na polpriamke BC v polrovine ABC, pretože uhol pri vrchole B je menší ako priamy (z konvexnosti štvoruholníka $ABCD$). Bod P leží na polpriamke AD, presnejšie na úsečke AX, kde X je priesečník priamok AD a BC (situáciu, v ktorej tento priesečník neexistuje, vyšetríme osobitne). Celá úsečka AX leží v jednej z polrovín určených priamkou BC, a to v tej, v ktorej leží bod D (lebo štvoruholník $ABCD$ je konvexný). Preto body P a D ležia v tej istej polrovine a môžeme použiť spomínané kritérium rovnobežnosti priamok PQ a CD (teda že uhly BQP a BCD sú rovnaké).

Komentár: Väčšina z vás použila spomínané kritérium rovnobežnosti bez overenia toho, že situácia vyzerá vždy tak, ako máte nakreslené na obrázku. Pravdivosť vášho tvrdenia však závisí od polohy niektorých bodov a na to ste úplne zabudli.
Zo samotnej rovnosti veľkostí uhlov BCD a BQP ešte nevyplýva, že priamka PQ je rovnobežná s DC! Potrebujeme na to navyše to, že body D a P ležia v tej istej polrovine určenej priamkou BC. Skúste si to nakresliť s bodmi D

a P v rôznych polrovinách. A čo sa stane, ak by body B, Q, C ležali na priamke v poradí Q, B, C? Ako vtedy sformulovať kritérium rovnobežnosti cez rovnosť uhlov?

<u>Úloha č. 5:</u> *a) Majme číslo zapísané v desiatkovej sústave ako* $c_nc_{n-1}c_{n-2}\dots c_2c_1c_0$. *Toto číslo je deliteľné jedenástimi práve vtedy, keď je jedenástimi deliteľné číslo* $(c_0+c_2+c_4+\cdots)-(c_1+c_3+c_5+\cdots)$ *(teda rozdiel súčtov cifier na párnych a nepárnych miestach). Vyskúšajte si to na vašom rodnom čísle, malo by byť deliteľné jedenástimi. Prečo toto pravidlo funguje? (Skúste využiť, že každá párna mocnina desiatich, teda* $1, 10^2, 10^4, \dots$, *dáva zvyšok* 1 *po delení jedenástimi, nepárne mocniny desiatich zas dávaju zvyšok* 10 *po delení jedenástimi.)*
b) Máme 19 *kartičiek a na každú z nich chceme napísať niektorú z cifier okrem nuly. Dá sa to spraviť tak, aby sa potom z týchto kartičiek dalo zložiť iba jediné* 19*-ciferné číslo deliteľné jedenástimi?*

<u>Riešenie:</u> (opravoval KatkaM a Erika)
a) Našou úlohou je ukázať, že číslo c je deliteľné jedenástimi práve vtedy, keď je jedenástimi deliteľný výraz $(c_0+c_2+c_4+\cdots)-(c_1+c_3+c_5+\cdots)$. Kvôli jednoduchosti dôkazu si uvedomme, že vlastnosť deliteľnosti čísla c jedenástimi sa zachováva, keď od c odčítame ľubovoľný násobok jedenástky. To znamená, že ak c bolo deliteľné jedenástimi, tak aj $c-11\cdot k$ bude deliteľné jedenástimi, a ak c nebolo deliteľné jedenástimi, tak ani $c-11\cdot k$ deliteľné jedenástimi nebude.
Keby sme číslo c upravili na tvar $(c_0+c_2+c_4+\dots)-(c_1+c_3+c_5+\dots)$ pomocou odčítavania a pričítavania násobkov jedenástky, tak by sme na základe vyššie uvedeného už dokázali to, čo sa od nás vyžaduje. Poďme sa o to spolu pokúsiť. Vieme, že číslo c sa dá v desiatkovej sústave napísať v tvare $c_0\cdot 10^0+\cdots+c_k\cdot 10^k+\cdots+c_n\cdot 10^n$. Vezmime z neho časť $c_k\cdot 10^k$, $0\le k\le n$. Toto číslo vieme zapísať aj v tvare $c_k(11-1)^k$. Použitím binomického rozvoja na zátvorku $(11-1)^k$ dostaneme

$$c_k\cdot 10^k = c_k(11-1)^k = c_k(11\cdot N_k+(-1)^k) = c_k\cdot 11\cdot N_k + c_k(-1)^k,$$

kde N_k je vhodné číslo. (Ak nepoznáte binomický rozvoj, skúste medzi sebou vynásobiť niekoľko zátvoriek $(11-1)$. Pozor, neupravte pred násobením ich „vnútro“ na 10, nechajte v nich $11-1$. Príkladom uvedenej úpravy je úprava čísla $4\cdot 10^7$ na tvar $4(11\cdot 909091+(-1)^7)$.
Keď od čísla $c_k\cdot 10^k$ odčítame $c_k\cdot 11\cdot N_k$, ostane nám iba $c_k(-1)^k$ (odčítajte to aj sami). Vráťme sa teraz k číslu c a postupne od neho odčítajme výrazy $c_k\cdot 11\cdot N_k$, $0\le k\le n$. Vieme, že takéto odčítavanie nemá vplyv na deliteľnosť čísla c jedenástimi. To, čo nám ostane, je výraz $c_0+(-1)c_1+(-1)^2c_2+(-1)^3c_3+\cdots$, ktorý po jednoduchej úprave prevedieme na tvar $(c_0+c_2+c_4+\cdots)-(c_1+c_3+c_5+\cdots)$. Vidíme, že to je rozdiel súčtov cifier na párnych a nepárnych miestach. Teda ak je číslo c je deliteľné jedenástimi, tak aj tento rozdiel musí byť deliteľný jedenástimi a naopak.

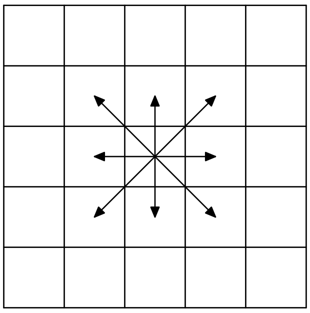
b) V tejto časti stačí nájsť jedno vhodné očíslovanie kartičiek, resp. jedno vhodné devätnásťciferné číslo. Predpokladajme, že sme toto číslo už našli a poďme ho preskúmať. Keby v našom čísle boli viac ako dve rôzne cifry, mohli by sme cifry na párnych, resp. nepárnych miestach medzi sebou vymeniť. (Toto si dobre premyslite.) Rozdiel ich súčtov by sa zachoval (číslo by bolo stále deliteľné jedenástimi podľa kritéria z časti a)), ale cifry by boli na iných miestach. Teda by sme z nášho čísla vedeli vyrobiť aj iné číslo deliteľné jedenástimi. To znamená, že naše číslo musí byť zložené najviac z dvoch rôznych cifier.
Ak by boli všetky cifry rovnaké, rozdiel súčtov cifier na párnych a nepárnych miestach by bol rovný cifre, ktorú sme použili. Keďže nemôžeme používať cifru 0, tak aj túto možnosť môžeme zavrhnúť (na základe kritéria).
Preto naše číslo musí byť zložené z práve dvoch rôznych číslic. Jedným z takých čísel je číslo 1616161616161616161. Ľahko overíme, že je deliteľné jedenástimi (lebo $10\cdot 1-9\cdot 6=-44$). Zámenou cifier na párnych (resp. nepárnych) pozíciách sa číslo nezmení. Ostáva nám ešte ukázať, že ak zameníme nejaké šestky s jednotkami, nemôžeme dostať číslo deliteľné jedenástimi. Vieme, že párnych pozícií v čísle je 10 a nepárnych je 9. Zameňme nejaké čísla z párnych pozícií na nepárne. Na párnych pozíciách budeme mať po zámene n jednotiek a $10-n$ šestiek. Na nepárnych pozíciách budeme mať $10-n$ jednotiek a $n-1$ šestiek (dokopy máme naozaj $n+10-n=10$ jednotiek a $10-n+n-1=9$ šestiek).
Súčet cifier na párnych pozíciách je teda $n+6(10-n)=60-5n$. Súčet cifier na nepárnych pozíciách je $10-n+6(n-1)=4+5n$. Rozdiel súčtov cifier na párnych a nepárnych pozíciách je $(60-5n)-(4+5n)=56-10n$. Vieme, že počet jednotiek na párnych pozíciách, t. j. n, je minimálne 1 a maximálne 10. Dosadením čísel 1 až 10 za n dostávame postupne čísla 46, 36, 26, 16, 6, -4, -14, -24, -34, -44. Z týchto čísel je iba rozdiel -44 deliteľný jedenástimi. Tento rozdiel zodpovedá jedine nášmu číslu 1616161616161616161. Teda žiadnou zámenou cifier tohto čísla nezískame nové číslo deliteľné jedenástimi.

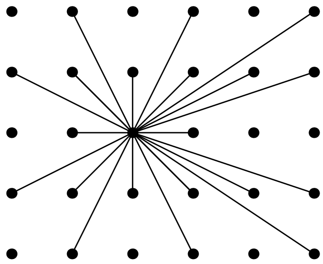
<u>Komentár:</u> Časť b) vám väčšinou nerobila ťažkosti. V časti a) niektorí z vás dokázali iba jednu časť tvrdenia, a to tú, že ak je číslo deliteľné jedenástimi, tak je aj rozdiel súčtov cifier na párnych a nepárnych miestach deliteľný jedenástimi. Dostali ste iba dva body zo štyroch, lebo ste urobili iba polovicu. Bolo treba ešte ukázať, že ak je rozdiel súčtov cifier na párnych a nepárnych miestach deliteľný jedenástimi, tak potom je aj číslo zložené z týchto cifier deliteľné jedenástimi. Dokazujete totiž ekvivalenciu, a pri nej treba ísť obidvoma smermi. V našom dôkaze sa nám to podarilo všetko schovať do jediného slovka „naopak“ v poslednej vete časti a). Do poslednej chvíle sme totižto nič nepredpokladali. Upravovali sme iba číslo c tak, aby sme nijako neovplyvnili deliteľnosť čísla c jedenástimi.

Úloha č. 6: *V štvorcom parku je do štvorcovej mriežky umiestnených* 10000 *stromov. Koľko z nich sa dá najviac vyťať tak, aby zo žiadneho pňa nebolo vidieť iný peň? Dokážte, že viac pňov sa už takto vyťať nedá.*

Riešenie: (opravoval 5ko a Ondráč)

Veľa z vás túto úlohu pochopilo inak, ako sme pôvodne mysleli. S odstupom času zisťujeme, že zadanie nebolo najšťastnejšie sformulované. Väčšina prišla na to, že stromy sú vo štvorci 100×100. Samotné stromy ste si však predstavovali rôzne, niektorí ako body v mrežovej sieti (tak to bolo myslené), iní zas ako štvorčeky. Rozdiel bol hlavne v tom, ktoré stromy vidíme, keď sa postavíme na peň. (Viď obrázok.) Dosť bodov ste mohli získať aj za správne vyriešenie úlohy so štvorčekovými stromčekmi.





Poďme k riešeniu. Pozrime sa, čo sa stane, ak vytneme nejaký strom. (Okrem toho, že po ňom ostane peň.) Z tohto pňa budeme určite vidieť na oba riadky stromov, ktoré susedia s riadkom, v ktorom je náš peň. Takže ak vyrúbeme nejaké stromy v nejakom riadku, tak v riadkoch okolo neho už rúbať nemôžeme. To isté platí aj pre stĺpce.

Skúsme si zobrať nejaký riadok a vyrúbať v ňom čo najviac stromov tak, aby sa „pne nevideli". Zdá sa, že to dosiahneme, ak vyrúbeme každý druhý, teda 50 stromov. V riadkoch okolo tohto riadku už nemôžeme rúbať. Ale čo tak urobiť to isté v každom druhom riadku? Zoberme si druhý, štvrtý, šiesty,... riadok a vyrúbeme v nich každý druhý strom. Nakreslite si to. Sami ľahko zistíte, že tak dostaneme $50 \times 50 = 2500$ pňov. Vyzerá to, že zo žiadneho pňa na iný nevidíme. Skúsme to dokázať. Aby sa nám ľahšie pracovalo, označme si riadky a stĺpce číslami 1, 2,..., 100. Potom stromy vieme zapísať ako dvojicu čísel (a, b). (Dvojicou $(1, 1)$ označíme strom v ľavom hornom rohu a dvojicou $(100, 1)$ strom v pravom hornom rohu.) Keď vyrúbeme každý druhý strom v každom druhom riadku, znamená to, že vyrúbeme stromy, ktoré majú obe súradnice párne.

Chceme ukázať, že ak zoberieme ľubovoľné dva pne, tak z jedného nevidno na druhý, teda na ich spojnici stojí nejaký strom. Pod spojnicou budeme rozumieť úsečku, ktorá ich spája, nie celú priamku. Ako na to? Majme dva rôzne pne $(2a, 2b)$ a $(2c, 2d)$. (Čísla a, b, c, d sú prirodzené medzi 1 a 50 vrátane.) Vieme o nejakom strome alebo pni, čo určite leží na ich spojnici? Skúsme trebárs jej stred. Jeho polohu vypočítame tak, že obe súradnice spriemerujeme, čím dostaneme $((2a + 2c)/2, (2b + 2d)/2) = (a + c, b + d)$. Teda na spojnici každých dvoch pňov ešte leží nejaký strom alebo peň. (Záleží to od parity $a + c$ a $b + d$.)

Skúsme to využiť. Zoberme si ľubovoľné dva pne. Na ich spojnici môžu byť ešte ďalšie, no my si vyberme nejaké dva z nich, ktoré nasledujú za sebou. Na ich spojnici už nie je žiadny peň. My ale vieme, že v jej strede niečo leží a musí to teda byť strom. Tento strom leží aj na spojnici pôvodných dvoch pňov a preto z jedného nevidíme na druhý.

Super! Teraz stačí ukázať, že viac ako 2500 stromov nemôžeme vyťať. Najjednoduchšie je to nasledovnou úvahou: Park 100×100 si rozdeľme na rôzne štvorice stromov tvoriacich štvorčeky 2×2. Jednu štvoricu tvoria stromy $(2a - 1, 2b - 1)$, $(2a - 1, 2b)$, $(2a, 2b - 1)$ a $(2a, 2b)$. Čísla a, b môžme voliť od 1 po 50 vrátane. Každý strom patrí do práve jednej tejto štvorice (rozmyslite si) a štvoríc je $50 \times 50 = 2500$. Ak vytneme viac ako 2500 stromov, tak aspoň v jednej zo štvoríc sme museli vyťať aspoň dva stromy. Uvedomte si, že z každého stromu v jednej štvorici vidíme na ostatné v tejto štvorici, preto tie dva pne nevyhovujú podmienkam. Preto nemôžeme vyťať viac ako 2500 stromov.

Komentár: Na záver by sme vás radi upozornili na často opakované chyby. Viacerí sa snažili dokázať to, že viac ako 2500 stromov nemôžeme vyťať pomocou „úporného" tvrdenia, že stromy vytínate čo najúspornejšie a podobne. To je väčšinou veľmi dobrý spôsob, ako prísť na správne riešenia, no spravidla je dôkaz niečo iné. Ďalší zas použili argument, že ak vytneme tých 2500 stromov tak, ako sme to spravili v riešení, tak už nemôžeme vyťať žiadny iný. To nám nezaručuje, že by sme dostať lepšie vyrúbanie, ak by sme začali vytínať stromy inak.

Úloha č. 7: *Dokážte, že pre ľubovoľné $n > 2$ vieme nájsť n navzájom rôznych prirodzených čísel tak, že súčet ich prevrátených hodnôt je* 1.

Riešenie: (opravovali Ondro M. a Škrečok)

Táto úloha bola vcelku ľahká, mnohí ste ju zvládli na výbornú, za čo si zaslúžite našu pochvalu. Vyskytli sa tri rôzne typy riešení. Uvedieme všetky, každé je niečím poučné...

Najkratšie riešenie, ktoré sa vyskytlo, používalo veľmi elegantný princíp. Ak sa pohráme s prevrátenými hodnotami malých prirodzených čísel, ľahko pre $n = 3$ objavíme rovnosť $1/2 + 1/3 + 1/6 = 1$. Nič nám nebráni vynásobiť obe strany rovnosti jednou polovicou, vznikne nám $1/4 + 1/6 + 1/12 = 1/2\cdot$. Teraz pripočítajme k obom stranám jednu polovicu. Dostaneme $1/2 + 1/4 + 1/6 + 1/12 = 1/2 + 1/2 = 1$. Ľaľa, našli sme štyri rôzne prirodzené čísla, ktorých súčet prevrátených hodnôt je 1.

Ako teraz nájdeme čísla pre $n = 5$? Všetci ste si hádam odpovedali rovnako – vynásobíme ich dvoma a pridáme k nim dvojku. Takto sa dajú nájsť čísla pre ľubovoľné $n > 2$. Ak chceme kompletné riešenie, mali by sme to dokázať matematickou indukciou. Tú si však precvičíme v druhom riešení.

Musíme si však položiť ešte jednu otázku. Budú takto nájdené prirodzené čísla určite navzájom rôzne? Predstavte si, že máme sadu *rôznych* prirodzených čísel pre nejaké n. Potom v sade prirodzených čísel pre $n + 1$ budú ich dvojnásobky, ktoré sú zrejme *rôzne*, a pridaná dvojka. Môžeme ju tam pridať kvôli tomu, že medzi číslami pre n určite nevystupovala jednotka (a teda jej dvojnásobok nevystupuje medzi číslami pre $n+1$). Hotovo, dokázali sme, že pre ľubovoľné $n > 2$ nájdeme n navzájom rôznych prirodzených čísel tak, že súčet ich prevrátených hodnôt je 1.

Iné riešenie:
Najprv si nájdeme prevrátené hodnoty pre malé n a uhádneme tvar hľadaných prirodzených čísel. Potom dokážeme pomocou matematickej indukcie, že sme sa pri hádaní nepomýlili a ukážeme, že nájdené čísla sú naozaj rôzne.
Pre najmenšie n máme rozklad $1/2 + 1/3 + 1/6 = 1$. Dôležité je teraz nezaspať na vavrínoch a hľadať riešenie aj pre väčšie n. Skvelá myšlienka je nevymýšľať nový rozklad odznova, ale použiť ten náš „starý“.
Zoberme si jeho posledný člen $1/6$. Platí, že $1/6 = 1/9 + 1/18\cdot$ Vyzerá to sľubne, rozložme si ešte ďalší člen:

$$\frac{1}{18} = \frac{1}{3.6} = \frac{1}{3.9} + \frac{1}{3.18}.$$

Fajn, teraz je čas na sumarizáciu našich zistení:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54} = 1.$$

Skúsené oko si hneď všimne, že sa tam nejako podozrivo vyskytujú mocniny trojky v menovateli. Tak poďme hádať výsledok:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^{n-2}} + \frac{1}{2.3^{n-2}} = 1.$$

To, či sme hádali dobre, si môžete vyskúšať pre malé n. Skúsme toto tvrdenie dokázať matematickou indukciou.

1° Pre $n = 3$ tvrdenie zrejme platí, lebo $1/2 + 1/(3^1) + 1/(2.3^1) = 1$.

2° Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $n = k$ členov (zlomkov), teda že

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^{k-2}} + \frac{1}{2.3^{k-2}} = 1.$$

Ukážeme, že potom platí aj pre $n = k + 1$. Posledný člen indukčného predpokladu si môžeme rozložiť na dva zlomky:

$$\frac{1}{2.3^{k-2}} = \frac{1}{3^{k-1}} + \frac{1}{2.3^{k-1}} = \frac{2}{2.3^{k-1}} + \frac{1}{2.3^{k-1}}.$$

Zdiaľky to uz vyzerá ako naše tvrdenie pre $n + 1$ členov, stačí to už iba pekne matematicky zapísať.

Týmto je dôkaz matematickou indukciou dokončený. Rozdelili sme jednotku na n zlomkov s čitateľom jedna a prirodzeným menovateľom.
Už nám zostáva overiť poslednú podmienku, a to že všetky menovatele musia byť rôzne. Možno sa vám zdá byť táto podmienka zbytočná, ale ono tomu tak nie je a mnohí ste na to zabudli. Porozmýšľajme nad tým, či mohlo nastať, že dva zlomky majú rovnaký menovateľ. Intuitívne nie. Veď stále vyberáme *najmenší* a ten delíme na dva ešte menšie. Teda na dva zlomky s menovateľmi, ktoré sú väčšie ako všetky menovatele doteraz. Fajn, takže sme dokázali, že prirodzené čísla $2, 3, \ldots, 3^{n-2}, 2.3^{n-2}$ vyhovujú zadaniu pre každé $n > 2$.

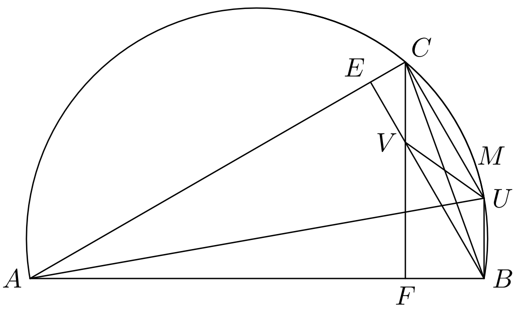
Iné riešenie:
Posledné riešenie využíva zaujímavý rozklad, ktorý platí pre všetky prirodzené čísla:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Overte si to sami. Navyše platí, že pre $n > 2$ je $n < n + 1 < n(n + 1)$ (premyslite si, prečo), a teda menovatele „nových“ dvoch zlomkov sú pre $n > 2$ rôzne navzájom a rôzne aj od pôvodného menovateľa.
Teraz nám stačí vziať starý známy vzťah $1/2 + 1/3 + 1/6 = 1$ pre $n = 3$ a rozložiť podľa vyššie uvedeného vzťahu na $1/2 + 1/3 + 1/7 + 1/42 = 1$, čím sme dostali čísla pre $n = 4$.
Tento postup sa dá opakovane vykonávať pre ľubovoľné $n > 2$ (opäť by sa patrilo poriadne to dokázať matematickou indukciou). Vždy budeme rozkladať najmenšiu prevrátenú hodnotu v sade *rôznych* čísel pre n na ešte menšie prevrátené hodnoty vďaka tomu, že $n < n + 1 < n(n + 1)$. Tým máme zaručené, že v sade čísel pre $n + 1$ budú všetky čísla *rôzne* (nové dve $n + 1$ a $n(n + 1)$ sú menšie od n pre $n > 2$). Sme hotoví aj s posledným riešením.

<u>**Úloha č. 8:**</u> *Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s vnútorným uhlom $30°$ pri vrchole A. Nech V je priesečník jeho výšok a M stred strany BC. Označme U obraz bodu V v stredovej súmernosti so stredom M. Dokážte, že $|AU| = 2|BC|$.*

<u>Riešenie:</u> (opravovala Katka a Čolka)



Riešenie úlohy pozostáva z dvoch častí. V prvej ukážeme, že štvoruholník $ABUC$ je tetivový a úsečka AU je priemerom kružnice opísanej tomuto štvoruholníku. Druhú časť venujeme dôkazu toho, že dĺžka úsečky BC je rovná polomeru tejto kružnice, na to využijeme rovnostrannosť trojuholníka SBC (S je stred kružnice). Ak ste tento príklad nevyriešili správne, skúste si to teraz znova.

Ak ste sa už potrápili a aj tak to naozaj nešlo, poďme sa na to pozrieť spolu. Označme päty výšok z bodov B a C postupne písmenami E a F. Priamky BE a CU sú rovnobežné, lebo jedna je obrazom druhej v stredovej súmernosti podľa bodu M a stredová súmernosť zachováva rovnobežnosť. (Dokážte si.) To isté platí aj pre priamky CFV a BU. Preto platí, že uhly ACU a ABU sú pravé. Keď opíšeme nad priemerom AU Tálesovu kružnicu, body B a C na nej budú ležať. Štvoruholník $ABUC$ je teda tetivový. Označme písmenom S stred kružnice prechádzajúcej bodmi A, B, C a U. Pozrime sa na trojuholník BCS. Platí, že veľkosť uhla BSC je rovná dvojnásobku veľkosti uhla BAC, čo je $60°$. Trojuholník je navyše rovnoramenný so základňou BC. Uhly pri základni ľahko dopočítame a zistíme, že trojuholník je rovnostranný. Strana BC je rovnako dlhá ako ramená, ktoré sú rovné polomeru kružnice opísanej štvoruholníku $ABUC$, kým AU je jej priemer. A sme hotoví.

<u>**Úloha č. 9:**</u> *a) Cifry prirodzeného čísla sme preusporiadali a číslo, ktoré vzniklo, sme pripočítali k pôvodnému. Dokážte, že nám nemohol výjsť výsledok $\underbrace{999\ldots99}_{999-\text{krát}}$.*

b) Cifry prirodzeného čísla sme preusporiadali a číslo, ktoré vzniklo, sme pripočítali k pôvodnému. Dostali sme tak výsledok 10^{10}. Dokážte, že pôvodné číslo bolo deliteľné desiatimi.

<u>Riešenie:</u> (opravovala Dada a Buggo)

a) Zamyslime sa, ako funguje sčitovanie dvoch čísel. Postupne sčitujeme odzadu cifry oboch čísel, niekedy nám môže zvýšiť jednotka, ktorú si prenášame do ďalšieho sčitovania…

Ako sme mohli vo výslednom čísle dostať cifru 9? Buď bol súčet sčitovaných cifier 8 a 1 nám zvýšilo alebo bol 9. Keďže výsledok sa skladá len zo samých deviatok, prvý prípad nemohol nikdy nastať. (Premyslite si, prečo.)

Vidíme teda, že keď je na nejakom mieste v pôvodnom čísle číslica x, tak na tom istom mieste v prehádzanom čísle musí byť číslica $9 - x$ (aby nám vždy vyšiel správny súčet). Keďže druhé číslo má tie isté cifry ako prvé, musí sa $9 - x$ nachádzať aj niekde v prvom čísle.

Čísla x a $9 - x$ sú vždy rôzne (pretože 9 nevieme dostať ako súčet dvoch rovnakých čísel). Keď si teda vezmeme pôvodné číslo, tak sa skladá z dvojíc cifier, ktoré majú súčet 9. Ha, to ale znamená, že sčitované čísla majú párny počet cifier. A nakoľko sme pri sčitovaní nikdy neprekročili desiatku, musí mať párny počet cifier aj výsledok, čo číslo zo zadania nemá.

b) Úlohu dokážeme sporom. Nech pôvodné číslo nie je deliteľné číslom 10 (teda sa nekončí nulou).

Po skúsenosti s prvým príkladom si môžeme položiť otázku, či majú sčitované čísla rovnakú dĺžku ako ich výsledok. Keďže 10^{10} je najmenšie jedenásť ciferné číslo je jasné, že odpoveď je *nie*. Nakoľko pôvodné číslo sa nekončí na nulu, súčet cifier na mieste jednotiek musí byť 10. Z toho ale vyplýva, že súčet cifier na miestach vyšších rádov musí byť už len 9, keďže stále prenášame zvyšok 1. Keď si cifry pôvodného čísla označíme ako $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ a cifry prehádzaného čísla ako $b_1, b_2, \ldots, b_{10}$, tak dostávame nasledovnú súčtovú tabuľku:

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_9 & a_{10} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_9 & b_{10} \\ \hline 9 & 9 & \cdots & 9 & 10 \end{array}$$

Preto súčet cifier oboch čísel musí byť

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_{10} + b_{10}) = 9 \cdot 9 + 10 = 91.$$

Keď si ale uvedomíme, že cifry prehádzaného čísla sú tie isté ako cifry pôvodného čísla, môžeme tento súčet napísať aj ako

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_{10}) = 2 \cdot (a_1 + \cdots + a_{10}).$$

Výsledok je zjavne párne číslo, čo však 91 nie je. Tým sme dostali hľadaný spor.

<u>Poznámka:</u> Skúste myšlienku z úlohy b) použiť na elegantné riešenie úlohy a).

<u>**Úloha č. 10:**</u> *Rasťo má na záhrade ešte stále vyrytú šachovnicu s* 2007×2007 *políčkami. So sestrou Slávkou si povedali, že si zmerajú sily. Presne v strede šachovnice sa nachádza obrovský kameň, ktorý najprv Rasťo posunie o jedno políčko (rovnobežne so stranami šachovnice). Slávka ho potom bude musieť posunúť o dve políčka, Rasťo o štyri políčka, Slávka o osem políčok – v* k*-tom ťahu ho vždy budú musieť posunúť o* 2^{k-1} *políčok. Ten, kto je na ťahu, prehráva, ak už nemôže posunúť kameň. Nájdite víťaznú stratégiu pre Slávku alebo pre Rasťa.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Rasťo)
Slovným spojením „ťah k“ (k je prirodzené číslo) budeme v riešení myslieť ťah o k políčok. Začneme tým, že si vypíšeme, ktoré ťahy robí Rasťo a ktoré Slávka. Rasťo robí ťahy 1, 4, 16, 64, 256, 1024, … a Slávka ťahy 2, 8, 32, 512, 2048, … Takmer všetci z vás si všimli, že všetky ťahy 512 alebo o menej políčok nie je problém spraviť. Na druhej strane ťah 2048 a väčšie sa už určie nebudú dať spraviť, lebo šachovnica je na ne veľmi malá. Ostáva nám teda už len zistiť, či si Rasťo vie zaručiť rozumnou hrou to, že bude môcť spraviť ťah 1024. Ak áno, tak vyhrá, lebo Slávka už svoj ťah 2048 nemôže spraviť.
Rasťo môže spraviť svoj ťah 1024 okrem prípadov, keď sa pred jeho ťahom kameň nachádza v štvorci rozmerov 41×41 umiestnenom v strede šachovnice (vyskúšajte si). Takže v momente, keď robí Slávka svoj ťah 512 a vie potiahnuť do tohto stredového štvorca, tak si vie zaručiť výhru. Z akých miest tam vie Slávka potiahnuť? Keď si to vyskúšate, tak zistíte, že sú to štyri štvorce veľkosti 41×41 vzdialené stredmi 512 políčok na do všetkých štyroch smerov od stredu šachovnice. Čiže ak do nich Rasťo svojim ťahom 256 nepotiahne, Slávka nebude vedieť potiahnuť do stredového štvorca a Rasťo bude vedieť spraviť ťah 1024 a vyhrá. A Rasťo naozaj môže vie z každého políčka urobiť ťah 256 tak, že neskončí. Môžeme si všimnúť, že ťah 256 je dostatočne malý a okolo spomínaných štvorcov je dosť miesta, preto nikdy nemá blokované ani dva smery naraz, nieto ešte všetky štyri.
Rasťo má preto víťaznú stratégiu. Stačí mu začať rozmýšľať vo svojom ťahu 256 a nepotiahnuť na „zakázané políčka“, z ktorých by Slávka vedela následne potiahnuť do stredového štvorca 41×41.

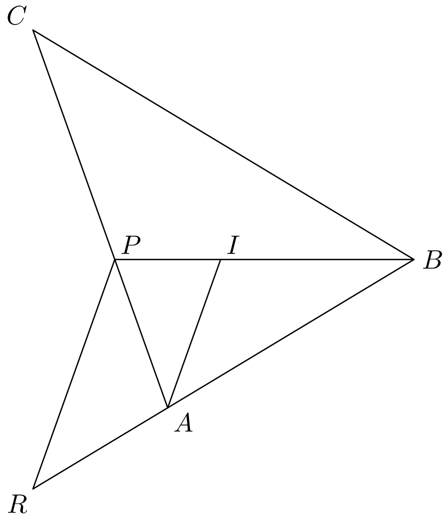
<u>**Úloha č. 11:**</u> *Vyber si vlastné dobrodružstvo! Na plný počet bodov stačí vyriešiť jednu z nasledujúcich úloh.*
a) V 99 *škatuliach sa nachádzajú nejaké jablká a nejaké pomaranče. Dokážte, že môžeme vybrať* 50 *škatúľ tak, že obsahujú aspoň polovicu všetkých jabĺk a aspoň polovicu všetkých pomarančov.*
b) V 100 *škatuliach sa nachádzajú nejaké jablká a nejaké pomaranče. Dokážte, že môžeme vybrať* 34 *škatúľ tak, že obsahujú aspoň tretinu všetkých jabĺk a aspoň tretinu všetkých pomarančov.*
c) V 100 *škatuliach sa nachádzajú nejaké jablká, nejaké pomaranče a nejaké banány. Dokážte, že môžeme vybrať* 51 *škatúľ tak, že obsahujú aspoň polovicu všetkých jabĺk, aspoň polovicu všetkých pomarančov a aspoň polovicu všetkých banánov.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Kenny)
Milí riešitelia úlohy číslo jedenásť, ostatní riešitelia KMS, škrečkovia, kačky a iné… Kedže väčšina z vás (najmä zo skupiny riešiteľov tejto úlohy) si za svoje dobrodružstvo vybrala úlohu a), jeden z vás si vybral úlohu b) s neveľkým úspechom a nikto úlohu c), rozhodli sme sa uverejniť vzorové riešenie len úlohy a). Zvyšné úlohy si skúste sami vyriešiť vrámci prípravy na ďalšie úžasné dobroduržstvá, ktoré vám vedúci KMS pripravia. Iba na okraj by sme chceli spomenúť, že riešenie b) sa príliš nelíši od riešenia a). Poďme však už ku samotnému riešeniu.
Na začiatku si zoraďme všetkých 99 krabíc podľa množstva pomarančov. Označme si takto zoradené krabice postupne $k_1, k_2, \ldots, k_{99}$. Označme tiež počet jabĺk v krabici k_i symbolom j_i a počet pomarančov p_i. Podľa nášho usporiadania teraz platí $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_{99}$. Niektorí z vás v tomto štádiu odhodili krabicu k_1 do hypervrecka, nám postačí aj obyčajný roh miestnosti. Skúsme si teraz posvietiť na (alebo aj do) krabíc k_2 až k_{99}. Našim cieľom bude rozdeliť týchto 98 krabíc na dve kopy tak, aby sme pridaním krabice, ktorá trpezlivo čaká kdesi v kúte, dostali požadovaný stav. Keď už delíme niečo na dve kopy, tak prečo nie pekne zaradom? Skúsme to.
Pozrime sa na krabice k_2 a k_3. Vyberme do prvej kopy tú z nich, ktorá má viac jabĺk, vyzerá to ako dobrá stratégia, aby prvá kopa bola naša hľadaná kopa. Vo všeobecnosti môžeme povedať, že z krabíc k_{2i} a k_{2i+1} do prvej kopy vyberieme tú s indexom $2i$ ak $j_{2i} > j_{2i+1}$, inak vyberieme tú s indexom $2i + 1$. (Pre i od jedna po 49.) Do druhej kopy dáme tie, ktoré sme nedali do prvej. Tvrdíme, že prvá kopa s k_1 obsahuje viac ako polovicu jabĺk a viac ako polovicu pomarančov.
Najprv overíme, že v prvej kope s krabicou k_1 (ďalej len prvej kope) je viac jabĺk. Totiž ak sme z každej dvojice vybrali tú krabicu, ktorá obsahovala viac jabĺk, tak v prvej kope bude viac jabĺk ako v druhej. Ak navyše pridáme krabicu k_1, môžeme počet jabĺk považovať za nadpolovičný. (Rozmyslite si prečo.)
Nakoniec nám už len ostáva ukázať, že v prvej kope máme aj viac pomarančov. Keďže sme vyberali stále jednu z krabíc k_{2i} a k_{2i+1}, vieme, že počet pomarančov v krabici vybratej v „nultom“ kole (keď sme vybrali k_1) bol väčší, nanajvýš rovný počtu pomarančov v krabici **ne**vybratej v prvom kole. (Pod nevybratím rozumieme vybratie do druhej kopy.) Podobne počet pomarančov v krabici vybratej v prvom kole bol väčší nanajvíš rovný počtu pomarančov v krabici **ne**vybratej v druhom kole a tak ďalej. Vo všeobecnosti pomaranče vybraté v i-tom kole počtom prevyšujú pomaranče nevybraté v $(i + 1)$-om kole a nakoniec k vybratým pridáme nezáporný počet pomarančov vybratých v poslednom kole. Ľahko si všimneme, že do prvej kopy sme vybrali aspoň polovicu pomarančov.

<u>Komentár:</u> Medzi vašimi riešeniami sa našlo mnoho dobrých myšlienok, v podstate sa vaše riešenia uberali tromi smermi. Buď ste úlohu riešili tak, ako je napísané vzorové riešenie, alebo ste algoritmicky prehadzovali škatule medzi dvoma kopami. Tretí typ riešenia spočíval v dôkaze sporom. V ňom ste ukazovali, že ak by sme nevedeli vybrať škatule tak, aby platila podmienka zo zadania, tak potom by dve disjunktné kopy museli mať každá viac ako polovicu všetkých jabĺk.

Úloha č. 12: *Nech ABC je trojuholník a I stred kružnice doň vpísanej. Os vnútorného uhla ABC pretne priamku AC v bode P. Dokážte, že ak $|AP| + |AB| = |BC|$, tak je trojuholník API rovnoramenný.*

Riešenie: (opravoval Mazo)



Úloha sa dá vyriešiť výpočtami s využitím goniometrických funkcií. Pozrieme sa na to však radšej geometricky, vedie to ku kratšiemu, prehľadnejšiemu a jednoduchšiemu riešeniu.
Dĺžku úsečky XY budeme značiť XY (bez absolútnej hodnoty). Tvrdenie zo zadania si trocha zosilníme, budeme dokazovať, že trojuholník API je rovnoramenný so základňou PI práve vtedy, keď platí $BC = BA + AP$.
Ľahko vieme určiť veľkosti uhlov pri osiach uhlov v trojuholníku. Z toho dostaneme, že $AP = AI$ práve vtedy, keď $\alpha = 2\gamma$. (Môžete si povpisovať uhly do obrázka.)
Podmienka zo zadania hovorí čosi o súčte dĺžok dvoch úsečiek, ktoré majú spoločný krajný bod. Najlepšie sa s takýmto súčtom pracuje, ak ležia tieto dve úsečky na priamke. Vezmime preto na polpriamke BA bod R taký, že $AP = AR$. Potom vzťah zo zadania zaručuje, že

$$BC = BA + AP = BA + AR = BR.$$

Takže trojuholník CBR je rovnoramenný a priamka BP je v ňom osou uhla. Toto môžeme aj obrátiť: ak je trojuholník CBR rovnoramenný, tak platí vzťah zo zadania. Takže nám ostáva dokázať, že trojuholník CBR je rovnoramenný práve vtedy, keď $\alpha = 2\gamma$ (pozri predošlý odsek). Túto poslednú podmienku najlepšie geometricky interpretujeme tak, že nájdeme dva uhly s veľkosťami α a 2γ, resp. $\alpha/2$ a γ; tieto uhly sú rovnaké práve vtedy, keď platí naša podmienka.
Trojuholník PAR je rovnoramenný, preto uhly APR aj ARP majú veľkosť $\alpha/2$.[1] Uhol BRP má teda veľkosť $\alpha/2$. Chceme teda dokázať, že trojuholník CBR je rovnoramenný práve vtedy, keď uhly BRP a BCP majú rovnakú veľkosť. A to hneď vyplýva z toho, že BP je osou uhla CBR.
Všimnite si, že mnoho tvrdení v geometrii má tvar ekvivalencie. Dokonca aj tie, ktoré tak nevyzerajú, sa dajú nejakým spôsobom na ekvivalenciu previesť. Príklad: máme dokázať, že z tvrdení (a) a (b) vyplýva (c). To sa dá často previesť na toto: za predpokladu (a) dokážte, že (b) a (c) sú ekvivalentné. Toto druhé tvrdenie je síce silnejšie, ale možno sa ľahšie dokazuje. Samozrejme, všetko treba skúmať v konkrétnej situácii, ktorú máme zadanú. Takéto skúmanie môže ukázať, kvôli čomu sú jednotlivé predpoklady v zadaní dôležité. Napríklad v situácii popísanej v tomto odseku si možno klásť takéto otázky: Nech platí (a) a neplatí (b), na čom zlyhá platnosť tvrdenia (c)? A naopak, nech zase platí (b) a neplatí (a), bude platiť (c)?

Iné riešenie:
Konštrukcia bodu R v predošlom riešení bola štandardná (bežne používaný trik). Na trocha inej myšlienke je založené nasledujúce riešenie (podľa *Josefa Tkadleca*).
Najprv si pripomenieme známy fakt. Majme v kružnici dve tetivy. Tieto dve tetivy majú rovnakú dĺžku práve vtedy, keď im zodpovedajúce obvodové uhly majú rovnakú veľkosť. Z tohto o. i. vyplýva, že os uhla ACB pretína oblúk AB kružnice opísanej trojuholníku ABC v jeho strede (ten z oblúkov AB, ktorý neobsahuje bod C).
V zadanej situácii nech S je stred toho oblúka AC kružnice opísanej trojuholníku ABC, ktorý neprechádza bodom B. Ďalej nech Q je obraz bodu A v osovej súmernosti podľa osi uhla ABC (bežný obrat). Podmienka $BC = PA + AB$ je ekvivalentná s tým, že $PQ = QC$. Štvoruholník $PQCS$ je tetivový, lebo úsečku PQ vidno z bodov C a S pod rovnakým uhlom veľkosti γ (uhol QSB je zo symetrie rovnaký ako ASB). V kružnici opísanej štvoruholníku $PQCS$ máme dve rovnako dlhé tetivy PQ a QC, teda aj im zodpovedajúce obvodové uhly musia byť rovnaké. Takže uhol PSC má veľkosť γ. Preto $180° = |\sphericalangle CSA| + |\sphericalangle CBA| = 3\gamma + \beta$, čiže $\alpha = 2\gamma$. A táto rovnosť uhlov je ekvivalentná s tým, že uhly API a AIP sú rovnaké.

Úloha č. 13: *Dokážte, že pre kladné reálne čísla a, b, c platí*

$$\frac{a^2+b^2}{c^2+ab} + \frac{b^2+c^2}{a^2+bc} + \frac{c^2+a^2}{b^2+ca} \geq 3.$$

Riešenie: (opravoval Mazo)
Uvedieme si niekoľko rôznych riešení, aby sa mohli zo vzorového riešenia poučiť aj tí, ktorí úlohu vyriešili.

(Riešenie podľa *Josefa Tkadleca*.) Ak zväčšíme menovatele zlomkov, ľavá strana sa zmenší. Pokiaľ o takto upravenej ľavej strane stále vieme dokázať, že je aspoň 3, máme úlohu vyriešenú. Skúsime teda tie menovatele zhora odhadnúť tak, aby sa výrazy zjednodušili. Zrejme $ab \leq (a^2+b^2)/2$, preto stačí dokázať nerovnosť

$$2\left(\frac{a^2+b^2}{2c^2+a^2+b^2} + \frac{b^2+c^2}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{c^2+a^2}{2b^2+c^2+a^2}\right) \geq 3. \tag{1}$$

[1] Všimnite si, že z toho vyplýva rovnobežnosť priamok PR a IA.

Táto nerovnosť sa dá zjavnou substitúciou $x = a^2$ atď. zjednodušiť. Pozrieme sa však na substitúciu ešte lepšiu, a to takú, ktorá zjednoduší čo najviac menovatele. Nech teda $x = 2a^2 + b^2 + c^2$ (analogicky pre y a z), potom nerovnosť (1) má po úprave tvar

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) \geq 6$$

a je jasné, že platí (každá zátvorka je aspoň 2).

(Riešenie podľa *Matúša Benku.*) Na ľavej strane zadanej nerovnosti je súčet, a súčty sa dobre zdola odhadujú pomocou AG-nerovnosti. Vyskúšame, pretože čitatele zlomkov vyzerajú byť v súčte či súčine väčšie ako menovatele.[2] Ostáva dokázať nerovnosť

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) \geq (a^2 + bc)(b^2 + ca)(c^2 + ab). \tag{2}$$

Po roznásobení dostaneme na každej strane osem členov, nejaké sa vykrátia, a zvyšok

$$a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + a^2b^4 + b^2c^4 + c^2a^4 \geq a^4bc + ab^4c + abc^4 + a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3$$

nejako dorazíme. Skúsime ostatnú nerovnosť rozdeliť na dve časti a upraviť čosi na štvorce. Sčítaním nerovností

$$\begin{aligned} a^2b^2(a^2 + b^2) + b^2c^2(b^2 + c^2) + c^2a^2(c^2 + a^2) &\geq a^2b^2(2ab) + b^2c^2(2bc) + c^2a^2(2ca), \\ a^4(b^2 + c^2) + b^4(c^2 + a^2) + c^4(a^2 + b^2) &\geq a^4(2bc) + b^4(2ca) + c^4(2ab) \end{aligned}$$

dostaneme, čo chceme (nerovnosť ekvivalentnú s (2)).

Iné riešenie:

Cauchyho nerovnosť hovorí, že

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2.$$

Preto sa táto nerovnosť tiež dá použiť na dolný odhad súčtu. Navyše máme veľkú voľnosť vo voľbe čísel x_i a y_i. V našom prípade skúsime zvoliť $n = 3$ a $x_1^2 = (a^2 + b^2)/(c^2 + ab)$ (analogicky x_2, x_3). Aby sme nedostali vo výraze x_1y_1 (na pravej strane Cauchyho nerovnosti) odmocniny, treba zvoliť dobré y_1, nám sa hodí $y_1 = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + ab)}$. Analogicky zvolíme y_2, y_3. Označme si ľavú stranu zadanej nerovnosti L. Z Cauchyho nerovnosti pri popísaných voľbách dostaneme

$$L \cdot \left[(a^2 + b^2)(c^2 + ab) + (b^2 + c^2)(a^2 + bc) + (c^2 + a^2)(b^2 + ca)\right] \geq (a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2)^2.$$

Ostáva nám dokázať, že

$$\frac{(a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2)^2}{(a^2 + b^2)(c^2 + ab) + (b^2 + c^2)(a^2 + bc) + (c^2 + a^2)(b^2 + ca)} \geq 3.$$

To už ponecháme snaživému čitateľovi, podstatný krok (odstránenie menovateľa pomocou Cauchyho nerovnosti) sme predviedli.

Úloha č. 14: *Tri rovnaké odmerky sú do troch štvrtín naplnené rôznymi kvapalinami. Zistite, či je možné konečným počtom prelievaní dosiahnuť, aby v aspoň jednej odmerke vznikla zmes, ktorá obsahuje rovnaké množstvo každej kvapaliny. Kvapaliny možno prelievať, nie však vylievať.*

Riešenie: (opravoval Ondráč)

Nanešťastie sa nikomu nepodarilo pochopiť zadanie tak, ako sme mysleli. Preto sme sa rozhodli, že dostanete druhú šancu. Spresňujúce zadanie nájdete ako príklad č. 15 v zadaniach druhej série.

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	škola	k$_\alpha$	k$_\beta$	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
1.	Hapák Samuel	4.	Gamča BA	9	8			9	9	9	9	9		45	45
1.	Hojčka Michal	3.	GKom PE	7	3			9	9	9	9	9		45	45
1.	Kubina Filip	4.	GPOH DK	8	2		9	9	9	7	9	9		45	45
1.	Starovská Mária	4.	Gamča BA	11	4			9	9	9	9	9		45	45
1.	Tureková Katarína	4.	GJGT BB	11	4			9	9	9	9	9		45	45
1.	Ujházi Vladislav	4.	GPJŠ RO	9	8			9	9	9	9	9		45	45
7.	Fulla Peter	3.	SPŠSTROJ SNV	3	0	8	3	9	9	7	9	9		44	44
7.	Karásková Natália	2.	Gamča BA	5	0	8	9	9		9	9			44	44

[2] Podobne ako v nerovnosti $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ je to väčšinou tak, že strana, ktorá obsahuje „viac zmiešané“ členy, je menšia. Presnejšie zachytávajú túto ideu Muirheadova nerovnosť a nerovnosť preusporiadania (rearrangement inequality). Viac sa o nich môžete dozvedieť na internete alebo od vedúcich.

Por.	Meno	Roč.	škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
7.	Majerčík Miroslav	5.	BiG Sučany	7	0	6	5	8	9	9	9	9		44	44
7.	Vendel Dávid	3.	GPoš KE	7	2		9	8	9	3	9	9		44	44
11.	Bačo Ladislav	2.	GPoš KE	5	0	9	9	9	9	7				43	43
11.	Hagara Michal	2.	GJH BA	4	0	9	7	9	6	9	9	0		43	43
11.	Kopf Matúš	2.	GMen OP	4	0	8		9	9	9	8			43	43
11.	Polačko Martin	3.	GAlej KE	8	2		9	9	9	7	9	1		43	43
11.	Szilágyiová Adriana	4.	GPoš KE	6	1		7	9	9	9	9			43	43
16.	Csiba Peter	3.	ŠPMNDG BA	6	1		9	9	9	6	9			42	42
16.	Eiben Eduard	3.	GPoš KE	6	2		7	9	8	9	9			42	42
18.	Bachratý Martin	2.	GVO ZA	5	0	7	9	9	9	7				41	41
18.	Konečný Jakub	2.	Gamča BA	5	0	5	8	8	1	8	9	8		41	41
18.	Peitl Tomáš	2.	ŠPMNDG BA	4	0	8	9	9	9	6				41	41
18.	Tkadlec Josef	3.	GKep ČR	3	0		7	9	9	7	9			41	41
22.	Jakubík Jozef	4.	GKom PE	9	3			9	9	6	9	6		39	39
22.	Jursa Jakub	3.	GAlej KE	8	2		6	9	9	6	9			39	39
22.	Liščinský Miroslav	3.	GAlej KE	7	1		3	9	9	9	9			39	39
22.	Rošťáková Zuzana	2.	GMMH LM	4	0	3	5	9	9	7	9			39	39
26.	Bogár Ján	2.	GĽŠ TN	4	0	4	8	8		8	9			37	37
27.	Batmendijnová Kristína	3.	GTV SL	5	0	7	3	8		9	9			36	36
27.	Benko Matúš	4.	GJAR PO	4	1		7	6	9	5	9			36	36
27.	Vdovičenko Martin	4.	GPár NR	8	2			9	9	9	9			36	36
30.	Baláž Miroslav	4.	GLS HE	10	6			9	9	8	9			35	35
30.	Kocák Tomáš	4.	GPoš KE	9	5			9	9	9	5	3		35	35
30.	Komárková Zuzana	3.	Brno ČR	4	0	6	2	9	9		9			35	35
30.	Melicherčík Martin	4.	GPár NR	10	5			9	9	8	9			35	35
30.	Porembová Alexandra	2.	BiG Sučany	4	0	3	5	9		9	9			35	35
30.	Říha Samuel	3.	Brno ČR	4	2		6	9		9	9	2		35	35
36.	Haas Emil	3.	Gamča BA	7	1		8	9		9	8			34	34
36.	Hujer Peter	3.	GPár NR	4	0	7	4	9	9	5				34	34
36.	Kočiský Tomáš	4.	Gamča BA	7	3			9	9	7	9			34	34
36.	Matejovičová Lenka	3.	GJH BA	9	4			9	9	9	7	0		34	34
36.	Novák Vladimír	4.	GPoš KE	6	1		5	8	9	8	4			34	34
41.	Majdiš Mojmír	2.	GPOH DK	4	0	6	9	9			9			33	33
41.	Petrucha Michal	3.	GMet BA	7	2		9	9		6	9			33	33
41.	Popovič Viktor	2.	GJAR PO	5	1		7	9		8	9			33	33
41.	Rizman Tomáš	3.	GVar ZA	6	1		1	9	9	5	9			33	33
41.	Spišiak Michal	3.	Gamča BA	6	4			9		6	9	9		33	33
46.	Simanová Lucia	4.	Gamča BA	8	2			9	9	7	5	2		32	32
46.	Sládek Filip	2.	GAB NO	2	0	9		9		6	8			32	32
46.	Tonhauserová Ivana	2.	GPár NR	4	0	9	7	7	9					32	32
49.	Herencsár Albert	3.	Gmaď GA	6	1		4	9	9	9				31	31
49.	Juríková Katarína	4.	GJGT BB	8	2		4	9	9	9				31	31
49.	Kuklišová Nina	3.	GMet BA	7	1		4	9	9	9	0			31	31
49.	Kuzma Tomáš	3.	GAlej KE	8	2			9	9	4	9			31	31
53.	Fekiač Jozef	3.	Gamča BA	6	1		6	9		9	6			30	30
53.	Köry Jakub	4.	GJAR PO	4	1		5	9		7	9			30	30
55.	Rigdová Emília	2.	GKuk PP	4	0	3	3	8		6	9			29	29
56.	Štyráková Kamila	2.	GPOH DK	4	0	7	3	9			9			28	28
57.	Rudolfová Barbora	2.	GMet BA	4	0	9	3	8		7				27	27
57.	Ziman Michal	2.	GBST LC	4	0	8	2		1	7	9			27	27
59.	Jagoš Ľubomír	2.	GVO ZA	5	0	6	4	8		8				26	26
60.	Formánek Michal	3.	ŠPMNDG BA	5	1		5	8	3	6	3			25	25
60.	Mitro Juraj	2.	GJAR PO	3	0	3	1	5		8	8			25	25
62.	Melo Matej	3.	GsvFA ZA	5	0	6	4	8	1	5				24	24
63.	Baranová Jana	2.	GAlej KE	3	0	5	5	7		6				23	23
64.	Kieferová Mária	3.	GsvFA ZA	4	0	7	2	8		5				22	22
64.	Štrbka Dávid	4.	Gamča BA	6	1			4	9	9				22	22

Por.	**Meno**	**Roč.**	**škola**	**k$_\alpha$**	**k$_\beta$**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
66.	Kobza Vladimír	4.	GJGT BB	7	1		3	9	9					21	21
67.	Bendová Lenka	3.	GJH BA	5	0		1	6	9	4				20	20
67.	Floriánová Michaela	2.	Gamča BA	5	0	5	3	8			4			20	20
67.	Kotry Lukáš	2.	GPár NR	4	0	9	7				4			20	20
67.	Lešková Andrea	2.	G Lipany	4	0	7	2			7	4	0		20	20
71.	Minárik Marián	4.	GPár NR	6	1			9		6	4			19	19
72.	Cocuľová Zuzana	2.	GPoš KE	5	0	1	2	8	1	6		0		18	18
72.	Hudák Adam	2.	GMRŠ KE	4	0		5	0		5	8	0		18	18
72.	Hudec Vladimír	3.	GVar ZA	6	1	7	1	8	9					18	18
75.	Hollá Barbora	3.	ŠPMNDG BA	5	0		3	8		6				17	17
76.	Paulovský Michal	4.	Gamča BA	8	2		3	4	0		9			16	16
76.	Živčáková Andrea	4.	GJGT BB	5	0		2	8		6				16	16
78.	Kotrlová Katarína	3.	GVPT MT	5	0	5	1		1	8				15	15
79.	Kobolková Petra	3.	GVPT MT	4	0	3	2	3		3				11	11
80.	Hozza Ján	1.	GJH BA	1	0						9	0		9	9
80.	Křemenová Lucie	2.	GMet BA	4	0		4		0	5	0	0		9	9
82.	Matulová Daniela	2.	GVaz BA	3	0	6	1				0			7	7
83.	Plávala Martin	1.	GMet BA	1	0		4	0		2	0	0		6	6
83.	Vrbovská Mária	4.	GJGT BB	6	0		6							6	6
83.	Zubnárová Katarína	4.	GJGT BB	5	0		2		4					6	6
86.	Slovík Lukáš	4.	GJGT BB	5	0			5						5	5
87.	Kapustová Katarína	3.	GJGT BB	4	0		3			1				4	4
87.	Vavrík Boris	1.	GJH BA	1	0						4	0		4	4
89.	Baňasová Barbora	3.	GĽŠ TN	3	0	0	3	0		0	0			3	3
90.	Alberty Roman	4.	GJGT BB	5	0		2							2	2
90.	Sásková Jana	3.	GĽŠ TN	3	0	0	2	0		0	0			2	2
92.	Pažický Martin	3.	GJH BA	3	0			0	1					1	1

kategória ALFA, Bratislava

Por.	**Meno**	**Ro.**	**škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Hajdinová Katarína	1.	GJH BA	1	9	9	9	8		7			42
2.	Le Tuan Anh	1.	Gamča BA	2		9	8	9	7	2	8		41
2.	Szabados Viktor	1.	Gamča BA	2		9	8	8	6	7	9		41
2.	Večerík Matej	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	7	8		5	8		41
2.	Šormanová Mária	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	7	8			8		41
6.	Benčík Štefan	1.	ŠPMNDG BA	1	7	8	9			6	9		39
6.	Buchman Marek	1.	ŠPMNDG BA	1	9	8	9			5	8		39
6.	Guričan Pavol	1.	Gamča BA	2		9	9	5	8	5	8		39
6.	Masár Juraj	1.	GBil BA	1	9	9	9	5			7		39
6.	Páleník Juraj	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	8	7		2	6		39
11.	Csiba Dominik	1.	ŠPMNDG BA	1	8	9	8			5	8		38
12.	Mojžišová Hana	1.	GJH BA	1	8	9	9	8		3			37
13.	Kozák Andrej	1.	Gamča BA	2		9	7	8		3	9		36
14.	Hlavatá Martina	1.	Gamča BA	2		9	9	8	2	2			30
15.	Kořínková Marta	2.	Gamča BA	3			9	8		3	6		26
16.	Kubincová Petra	1.	ŠPMNDG BA	1	7	9	9						25
16.	Macháč Juraj	1.	GJH BA	1	6	2	4	7		2	6		25
18.	Molnárová Karina	1.	GJH BA	1	7	9	5	1		2			24
18.	Phuong Mariana	1.	GJH BA	1	8	3	5	6	2	1			24
20.	Kováčová Marta	1.	GJH BA	1	6	9	2	0		3	3		23
20.	Sabadovičová Linda	1.	GJH BA	1	8	3	5			7			23
22.	Hlavatý Matej	1.	ŠPMNDG BA	1	7	3	8			2	2		22
23.	Macková Lucia	1.	GJH BA	1	6	3	8	4					21
23.	Matulová Daniela	2.	GVaz BA	3			9	5	6	1			21
25.	Stančiaková Katarína	2.	GJH BA	2		2	8		1	2	6		19
26.	Šmahovský Marek	2.	GJH BA	2			9			2			11

Por.	Meno	Ro.	škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
27.	Plávala Martin	1.	GMet BA	1						4	0		4
28.	Hozza Ján	1.	GJH BA	1									0
28.	Pažický Martin	3.	GJH BA	3							0		0
28.	Vavrík Boris	1.	GJH BA	1									0

kategória ALFA, západ

Por.	Meno	Ro.	škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Kováč Ondrej	1.	GCM NR	1	8	8	5	8	6	6	7		37
2.	Jakubík Ján	1.	SPŠe PN	1	6	9	9	8		2			34
2.	Uher Brian	2.	GPár NR	3			9	7	6	6	6		34
4.	Kohútová Petra	2.	GJF Šaľa	2		9	8	8	5		3		33
5.	Dižová Andrea	1.	GKom PE	1	6	6	9	8		3			32
6.	Bogárová Zuzana	1.	GĽŠ TN	1	9	9	5			2	3		28
7.	Magyarová Eva	1.	GPár NR	2		9	9		5	3			26
8.	Čellár Matúš	2.	GPár NR	3			9	9		7			25
9.	Kutnár Marek	2.	GPár NR	3			5	8	5	6			24
10.	Bódiová Zuzana	1.	GPár NR	2		9	9		3	2			23
10.	ri Viktor	1.	GĽJŠ KN	1	7	6	5		3	2			23
12.	Štrbová Sylvia	1.	GPár NR	2		2	9	1	3	7			22
13.	Tomašovič Juraj	2.	GPdC PN	3			7	8		2	1		18
14.	Jančovičová Adela	1.	GPár NR	2		3	4	3		2			12
15.	Baňasová Barbora	3.	GĽŠ TN	3					0	3	0		3
16.	Sásková Jana	3.	GĽŠ TN	3					0	2	0		2

kategória ALFA, stred

Por.	Meno	Ro.	škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Ječmen Matej	1.	GVar ZA	1		9	9	8	7		8		41
1.	Sládek Filip	2.	GAB NO	2		9	8	6	9		9		41
3.	Bárdy Pavol	1.	GVO ZA	1	8	9	9			2	5		33
4.	Bohiniková Alžbeta	1.	GVar ZA	1		7	9	8	5	3	3		32
5.	Anderle Michal	1.	GBST LC	1	9	9	1	0	5	2	6		31
5.	Jackulíková Simona	3.	BiG Sučany	3			9	8	6	2	6		31
7.	Santer Jakub	1.	GMH Trs	1	7	9	9	1		3			29
8.	Bachanová Emília	3.	BiG Sučany	3			8	8	4		7		27
9.	Múthová Denisa	1.	GbTR ZA	1	7	3	4	8		4			26
10.	Kubinová Mária	1.	GPOH DK	1	7	8	8			2			25
11.	Majerova Karolina	1.	GJCh BR	1	9	3	4	2		3			21
11.	Sabaka Peter	1.	GJCh BR	1	6	3	3	4		2	5		21
13.	Dubničková Jana	1.	GŠkol PB	1	2	9	3	0	0	2	3		19
14.	Gregor Viktor	2.	GŠkol PB	2		7	0	8		2	0		17
14.	Šesták Martin	2.	GŠkol PB	2		7	0	8		2	0		17
16.	Bačinská Lenka	2.	GŠkol PB	3		9	9			2			11
17.	Fodorová Jana	1.	GJGT BB	2			8			2			10
18.	Vozár Miroslav	1.	SOU Žar	1	4	4	1	0					9

kategória ALFA, východ

Por.	Meno	Ro.	škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Midlik Adam	1.	GJAR PO	1		9	9	8	9		9		44
2.	Kocák Jakub	1.	GLS HE	1	9		9	5		5	4		32
3.	Lešková Katarína	2.	G Lipany	2	8	9	9	5		3			26
4.	Baranová Jana	2.	GAlej KE	3					5	5	7		17

Por.	**Meno**	**Ro.**	**škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
5.	Görcsösová Andrea	2.	GAlej KE	3					5	3	3		11
6.	Mitro Juraj	2.	GJAR PO	3					3	1	5		9

Výsledková listina

kategória GAMA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**škola**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**p**	$\sum$
1.	Baláž Miroslav	4.	GLS HE	9			7			16
2.	Benko Matúš	4.	GJAR PO	9		7	7	X		23
3.	Fulla Peter	3.	SPŠSTROJ SNV	9	9	7				25
4.	Hagara Michal	2.	GJH BA	9	0	0	0	X		9
5.	Hapák Samuel	4.	Gamča BA	9	9	7	7	X		32
6.	Hozza Ján	1.	GJH BA	9	0	5	1	X		15
7.	Kocák Tomáš	4.	GPoš KE	5	3	7	7			22
8.	Konečný Jakub	2.	Gamča BA	9	8	0	2	X		19
9.	Kopf Matúš	2.	GMen OP	8			7			15
10.	Kubina Filip	4.	GPOH DK	9	9		1	X		19
11.	Majerčík Miroslav	5.	BiG Sučany	9	9	7	6			31
12.	Nožička Karel	1.	Praha ČR			7	7			14
13.	Tkadlec Josef	3.	GKep ČR	9		7	7			23
14.	Ujházi Vladislav	4.	GPJŠ RO	9	9	7	7			32
15.	Vavrík Boris	1.	GJH BA	4	0	0	1	X		5