Vzorové riešenia 1. série zimnej časti KMS 2009/2010

Úloha č. 1: *Prirodzené číslo budeme volať popletené, ak je párne a má nepárny počet cifier. Ak je nepárne a má párny počet cifier, budeme ho volať zmätené. Zistite, či je medzi číslami 1 až 1 000 000 (vrátane) viac tých popletených alebo zmätených.*

Riešenie: (opravoval Janči)
K úspešnému vyriešeniu tejto úlohy odporúčame riešiteľom pozorne si prečítať zadanie. Ak ho totiž správne pochopíme, ostane nám už len krôčik ku konečnému riešeniu.
Párnych a nepárnych čísel medzi číslami s pevným počtom cifier je rovnako veľa. (Polovica čísel je párnych a polovica nepárnych.) Jednociferných čísel je deväť, dvojciferných je deväťdesiat. Usilovný riešiteľ už určite prišiel na to, koľko je troj-, štvor-, päť-, šesť- a sedemciferných čísel. Pre tých, ktorí nečítali zadanie až tak pozorne len pripomenieme, že sedemciferné číslo, ktoré nás zaujíma, je len jedno, a to 1000000.
Ktorých čísel je najviac? Samozrejme šesťciferných – je ich dokonca deväť krát viac ako ostatných čísel dokopy. (Toto tvrdenie si ľahko overíme, $1 + 9 + 90 + 900 + 9000 + 90000 = 100000$.)
Všimnime si, že šesťciferné číslo môže byť len zmätené. Druhú podmienku „zmätenosti" spĺňa polovica šesťciferných čísel. To je ešte stále omnoho viac ako ostatných čísel dokopy, preto bude viac zmätených čísel. (Premyslite si to.)
Niektorí z Vás zrátali presné počty daných čísel, čo síce nebolo potrebné, ale riešeniu to určite neublížilo. Zmätených čísel je $(900000 + 9000 + 90)/2 = 454545$ a popletených je $4 + 450 + 45000 + 1 = 45455$.

Úloha č. 2: *Vačica chce vyplniť tabuľku* 4×4 *číslami* 1, 2 *a* 3 *tak, aby súčty čísel v každom riadku, stĺpci a na oboch uhlopriečkach boli všetky navzájom rôzne. Poraďte jej, ako to môže urobiť.*

Riešenie: (opravovala Katka J.)
Po niekoľkých neúspešných pokusoch tabuľku vyplniť by sme sa mohli zamyslieť nad tým, či sa to vôbec dá. Ak chceme spolu s vačicou splniť úlohu, potrebujeme desať rôznych súčtov. (Štyri riadky, štyri stĺpce a dve uhlopriečky.) Pozrime sa, či je to vôbec možné. Pre každý súčet štyri sčítance vyberáme z čísel 1, 2, 3. Najmenší možný súčet, aký môžeme dostať, je potom $1 + 1 + 1 + 1 = 4$ a najväčší $3 + 3 + 3 + 3 = 12$. Určite sa teda nedopracujeme k iným číslam, než tým, ktoré ležia medzi 4 a 12. Keďže sa jedná iba o prirodzené čísla, k dispozícii máme len deväť dosiahnuteľných súčtov.[1] A tu nastáva problém – možných súčtov je iba deväť, zatiaľ čo na vyplnenie tabuľky by sme potrebovali aspoň desať. Preto sa tabuľka vyplniť nedá.

Komentár: Tento príklad ste v podstate všetci zvládli celkom bez problémov. Občas si treba dať pozor na poriadne odôvodnenie riešenia, aby si opravovateľ mohol byť istý, že riešeniu rozumiete. Navyše, v tomto príklade nebolo ťažké vypísať si všetky možné súčty a dopracovať sa k riešeniu touto cestou. V zložitejších príkladoch však býva jednoduchšie porozmýšľať a nájsť „fintu", ktorá riešenie podstatne skráti. (Tak ako napríklad v tomto príklade nájdenie najväčšieho a najmenšieho možného súčtu.)

Úloha č. 3: *Na trhu sa dajú s kupcom vymieňať červené a modré papagáje. Za jedného modrého papagája vám kupec dá päť červených. Za jedného červeného dostanete päť modrých. Na trh ste prišli s jedným červeným papagájom. Podarí sa vám po niekoľkých výmenách s kupcom získať rovnaký počet červených a modrých papagájov?*

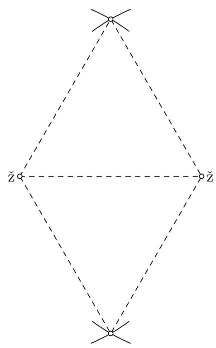
Riešenie: (opravoval Emil a Kubo)
Vhodným spôsobom, ako začať riešiť takýto typ príkladu, je vyskúšať si, ako výmeny naozaj fungujú a snažiť sa o tomto fungovaní zistiť čo najviac. Skúsme si to. Za jedného červeného papagája, s ktorým začíname, môžeme mať iba päť modrých. Ďalšia výmena je opäť jednoznačná, vymeníme modrého za päť červených. Teraz máme o jedného červeného viac ako modrých. Skúšame ďalšie výmeny a zapisujeme si počty jednotlivých papagájov po každej výmene. Dostávame napríklad takéto výsledky $1 : 0$, $0 : 5$, $5 : 4$, $4 : 9$, $3 : 14 \ldots$
Ak už máme zapísaný celý papier číslami, a ešte sme nedosiahli rovnaký počet červených a modrých papagájov, skúsime nájsť dôvod, prečo by sa nám to nemalo podariť. Všimli ste si na týchto číslach niečo zaujímavé? Jednou

[1]Všimnite si, že nie je dôležité, či ich naozaj aj všetky vieme poskladať, pretože viac ako deväť ich aj tak určite nebude.

zaujímavosťou je parita[2] čísel. Vidíme, že jedno číslo je stále párne a to druhé stále nepárne. Ešte ale musíme overiť či to nie je náhoda. Pozrime sa, ako sa menia jednotlivé počty papagájov každou výmenou. Za jedného papagája (počet zmenšíme o jeden) dostaneme päť papagájov. (Počet zväčšíme o päť.) Aký to ma vplyv na paritu? Ak od párneho čísla odčítame jeden alebo pričítame päť dostaneme nepárne číslo. Podobne, ak od nepárneho čísla odčítame jedna alebo pričítame päť dostaneme párne číslo.
Zamyslíme sa nad tým ešte raz. Na začiatku máme jedného červeného papagája a žiadneho modrého. To znamená, že máme párny počet červených a nepárny modrých. Po každom kroku sa parita počtov len vymení – po jednom kroku dostaneme znova jedno párne a jedno nepárne číslo[3]. Pozrime sa ešte raz, čo chceme výmenami dosiahnuť. Rovnosť oboch počtov. Ak však majú byť dve čísla rovnaké, musia mať aj rovnakú paritu. My sme si však ukázali, že rovnakú paritu nemôžeme dosiahnuť povolenými výmenami. A tak sa nám podarilo vyriešiť úlohu.

Úloha č. 4: *Klokan sa stavil s kengurou, že ju určite porazí v nasledujúcej hre. Začnú hrať na neofarbenej rovine. Najskôr ofarbí klokan jeden bod v rovine žltou farbou. Potom ofarbí kengura* 10 *bodov v rovine zelenou farbou. Hra pokračuje rovnako aj v ďalších ťahoch, klokan ofarbí jeden žltý a kengura* 10 *zelených bodov. Ak už je bod roviny ofarbený, nemožno ho prefarbiť. Klokan vyhrá, ak sa mu podarí vytvoriť rovnostranný trojuholník s vrcholmi žltej farby. Dokážte, že klokan vie vyhrať stávku, nech hrá kengura akokoľvek.*

Riešenie: (opravoval Ajka, Katka)



V príklade sa vyskytujú rovnostranné trojuholníky, kedže iný typ trojuholníkov tu spomenutý nie je, budeme ich volať len „trojuholník“. Všetky trojuholníky spomenuté v nasledovnom texte sú rovnostranné. Teraz už poďme k matematike.
Na začiatok si uvedomíme, že stačí uvažovať prípad, keď kengura aj klokan hrajú najlepšie ako vedia. (Prečo? Ak klokan nebude vytvárať trojuholníky, napríklad bude farbiť všetky body na jednej priamke, nemá šancu vyhrať. Ak sa kengura nebude „brániť“, klokan vyhrá hneď.) Preto sa kengura bude snažiť zabrániť klokanovi vytvoriť trojuholník a klokan bude dávať svoje body tak, aby vytvoril trojuholník alebo mohol ďalším ťahom vytvoriť trojuholník.
Ďalšia vec, ktorú by sme si mali uvedomiť, je, že každá dvojica klokanových žltých bodov určuje práve dva rovnostranné trojuholníky. (Pozrite si obrázok.)
Ako bude prebiehať hra?

1. kolo: Klokan ofarbí prvý bod. Kengura zatiaľ nepozná klokanove úmysly, takže iba náhodne umiestni niekde svojich 10 bodov.

2. kolo: Klokan ofarbí druhý bod. Týmto určí dva trojuholníky. Kengura, v nádeji že porazí klokana, zafarbí vrcholy týchto trojuholníkov. Zvyšných osem bodov opäť umiestni náhodne.

3. kolo: Klokan ofarbí tretí bod. Spolu s jeho predošlými dvoma bodmi sa vytvoria dve nové dvojice žltých bodov. (Tretí a prvý žltý bod, tretí a druhý žltý bod. Prečo nie aj prvý a druhý bod?) Klokan týmto určí štyri nové trojuholníky. Kengura, šťastná, že čoraz viac využíva svoje možnosti, zafarbí štyri body, aby zabránila klokanovi vyhrať. Zvyšných šesť bodov umiestni náhodne.

4. kolo: Klokan ofarbí štvrtý žltý bod. Vzniknú tri nové dvojice jeho bodov. (Štvrtý bod s každým z troch predošlých bodov.) Tým vznikne možnosť vytvoriť šesť nových trojuholníkov. Kengura veselo zafarbí všetkých šesť bodov, ktoré tvoria so vzniknutými dvojicami vrcholy trojuholníkov a zvyšné štyri body umiestni náhodne.

5. kolo: Prebieha podobne, ako predošlé. Klokan vytvorí svojim bodom štyri nové dvojice, teda určí osem trojuholníkov, kengura zafarbí potrebné body a dva zafarbí náhodne.

6. kolo: Klokan vytvorí možnosť pre desať vrcholov nových trojuholníkov a kengura mu všetky plány zmarí a zafarbí týchto desať bodov na zeleno.

7. kolo: Je už o niečo zaujímavejšie, pretože klokan vytvorí možnosť pre 12 vrcholov nových trojuholníkov. Pretože vytvorí šesť nových dvojíc bodov (siedmy bod s každým z predošlých bodov), z ktorých každé dva môže doplniť na dva trojuholníky. Kengura zabráni doplneniu desiatich z týchto trojuholníkov a tajne dúfa, že klokan si nevšimne, že mu zostali dve možnosti ako doplniť tretí vrchol trojuholníka.

8. kolo: Podľa dohodnutých pravidiel klokan zafarbí jeden bod tak, aby vytvoril trojuholník zo žltých bodov a pozýva kenguru na večeru za dobre odohranú hru. :)

Pozrime sa ako klokan zabezpečí, že mu náhodné body kengury nebudú brániť vytvoriť trojuholník. On pozná polohu zelených bodov. Každý ďalší bod položí tak, aby na osiach medzi novým bodom a každým predošlým neležal žiaden zelený. To docielime napríklad tým, že ten nový bod dáme dostatočne ďaleko. V rovine, ktorá je nekonečná, sa nemusíme zaoberať tým, či sa tam ten bod zmestí. (Áno, naozaj sa tam zmestí.)

[2] Parita určuje či je číslo párne alebo nepárne.
[3] Vlastnosť ktorá sa v žiadnom kroku nemení sa nazýva odborne *invariant*. Pokúste sa nájsť aj iné invarianty.

Dostatočná vzdialenosť od každého zafarbeného bodu je dvojnásobná vzdialenosť medzi najvzdialenejšími bodmi. Pretože osi medzi novým zeleným bodom a starými zelenými budú ďalej od tých starých bodov ako je najväčšia vzdialenosť k iným bodom. Preto na osi neleží nijaký bod.

Úloha č. 5: *Súčin cifier čísla* 1123 *je šesť, čísla* 5091 *je nula. Nájdite súčet súčinov cifier všetkých štvorciferných prirodzených čísel.*

Riešenie: (opravoval Igor a KatkaP)
Skúsime si vypísať, čo presne to máme zrátať. Dostávame výraz

$$9\cdot9\cdot9\cdot9+9\cdot9\cdot9\cdot8+9\cdot9\cdot9\cdot7+9\cdot9\cdot9\cdot6+\cdots+1\cdot0\cdot0\cdot1+1\cdot0\cdot0\cdot0.$$

Pozrime sa na výraz. Vidíte na ňom niečo zaujímavé? Ak sme si to doteraz nevšimli, tak si vypíšeme viac čísel. Inak skúsime niečo vybrať pred zátvorku. Dostávame

$$9\cdot9\cdot9\cdot(9+\cdots+1+0)+9\cdot9\cdot8\cdot(9+\cdots+1+0)+\cdots+1\cdot0\cdot0\cdot(9+\cdots+1+0).$$

Vidíme, že všetky zátvorky obsahujú rovnaký výraz. Dosadíme za $(9+8+7+6+5+4+3+2+1+0)$ hodnotu tohto súčtu, 45.

$$45\cdot(9\cdot9\cdot9+9\cdot9\cdot8+9\cdot9\cdot7+9\cdot9\cdot6+\cdots+1\cdot0\cdot0)$$

Pripomína vám niečo výraz v zátvorke? Áno, nápadne sa to podobá na náš pôvodný výraz, až na to, že každý súčin má len tri členy. Preto to môžeme upraviť podobne ako pôvodný výraz, čím dostávame

$$45\cdot45\cdot(9\cdot9+9\cdot8+\cdots+1\cdot0)=45\cdot45\cdot45\cdot(9+8+\cdots+1+0)=45\cdot45\cdot45\cdot45.$$

Týmto sme sa dopracovali k správnemu riešeniu.

Iné riešenie:
Skúsme riešiť najprv jednoduchšiu úlohu. Nájdeme súčet súčinov cifier jednociferných prirodzených čísel. Každé z týchto čísel má len jednu cifru, preto súčet ich súčinov je $0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$. Dvojciferné čísla môžeme z jednociferných „vyrobiť" tak, že za každé jednociferné číslo pripíšeme ďalšiu cifru od 1 do 9. Cifru 0 môžeme úplne zanedbať, lebo každé číslo, ktoré ju obsahuje, má ciferný súčin nula a preto celkový súčet nezmení. Súčet súčinov cifier dvojciferných čísel bude potom

$$\begin{aligned}(1+2+\cdots+9)\cdot1+(1+2+\cdots+9)\cdot2+\cdots+(1+2+\cdots+9)\cdot9 &= \\ 45\cdot1+45\cdot2+\cdots+45\cdot9 &= \\ 45\cdot45 &= 45^2.\end{aligned}$$

Podobným spôsobom ho nájdeme aj pre trojciferné čísla. Za každé dvojciferné číslo pripíšeme opäť postupne cifry od 1 po 9. Takto dostávame

$$\begin{aligned}45^2\cdot1+45^2\cdot2+\cdots+45^2\cdot9 &= \\ 45^2\cdot(1+2+\cdots+9) &= \\ 45\cdot45^2 &= 45^3.\end{aligned}$$

Po tomto kroku už jasne vidíme, aký bude súčet súčinov štvorciferných čísel. Bude to 45^4, čo je 4100625. Všimnime si, že toto riešenie má už len krok k matematickej indukcii. Skúste si dokázať, že súčet súčinov n-ciferných čísel je 45^n.

Úloha č. 6: *Vtákopysk sa v potoku hral s kameňmi. Rozdelil ich na tri kôpky s* 5, 49 *a* 51 *kameňmi. Potom ich začal presúvať, a to tak, že buď spojil ľubovoľné dve kôpky do jednej, alebo rozdelil kôpku s párnym počtom kameňov na dve rovnaké. Mohla mu pri takomto presúvaní vzniknúť kôpka s* 26 *kameňmi? Ak áno, popíšte ako, a ak nie, zdôvodnite, prečo sa to nedá.*

Riešenie: (opravoval Ondro, Mišo)
Prvá vec, čo si všimneme je, že všetky 3 kôpky majú nepárny počet kameňov. Takže v prvom kroku nemôžeme žiadnu kôpku rozdeliť na polovicu. Musíme preto niektoré dve kôpky spojiť. Máme presne 3 možnosti, ako to urobiť:

1. Spojíme 1. kôpku s 2. - dostaneme kôpky s 54 a 51 kameňmi,
2. spojíme 2. kôpku s 3. - dostaneme kôpky s 5 a 100 kameňmi,
3. spojíme 1. kôpku s 3. - dostaneme kôpky s 49 a 56 kameňmi.

Náhodne si vyberieme napríklad prvú možnosť. Skúsme si rozpísať niekoľko krokov pozostávajúcich zo spájania a delenia kôpok. Dostávame napríklad nasledujúce hodnoty: 27, 78, 36, 18, 9... Môžeme si všimnúť, že všetky kôpky čo nám vznikajú sú deliteľné číslom 3. Obdobne to platí pre 2. resp. 3. možnosť – všetky kôpky, ktoré vzniknú sú deliteľné číslom 5 resp. 7. Mnohí po tomto pozorovaní prehlásili úlohu za vyriešenú, pretože $26 = 13 \cdot 2$, čo znamená, že 26 nie je deliteľná ani 3, ani 5 a ani 7, preto sa ani v jednej z troch pôvodných možností nevyskytne. Toto ale nestačí k úplnému riešeniu úlohy. Treba ešte dokázať, že sa deliteľnosť 3, 5 resp. 7 zachová pri povolených operáciách.
Majme n kôpok deliteľných číslom k.
Teraz sledujme, čo sa stane s ľubovoľnými dvoma z nich pri ich spojení. V jednej z nich nech je $a \cdot k$ kameňov, v druhej nech je $b \cdot k$ kameňov. V spojenej kôpke bude $a \cdot k + b \cdot k = (a + b) \cdot k$ kameňov. Keďže a aj b sú prirodzené čísla, tak $(a + b) \cdot k$ musí byť tiež deliteľné k.
A čo sa bude diať s kôpkami pri delení? Mám kôpku s párnym počtom kameňov, nech je v nej $2 \cdot m$ kameňov. Po rozdelení mi vzniknú 2 kôpky po m kameňoch. Skúmajme deliteľnosť číslom k. Ak $2 \cdot m$ je deliteľné k a čísla 2 a k sú nesúdeliteľné (čiže k je nepárne), potom číslo k musí deliť m. Inak povedané, ak nepárne k delilo pôvodnú kôpku musí deliť aj polovičné kôpky. Pozor, podobná úvaha sa dá spraviť napríklad aj pre $k = 6$, lenže ak $n = 30$ tak táto úvaha je zavádzajúca, pretože 15 nie je deliteľné 6. Je to kvôli tomu, že 6 a 2 sú súdeliteľné.
Ukázali sme, že náš predpoklad bol správny a deliteľnosť 3, 5 a 7 sa zachováva. Kôpku s 26 kamienkami teda naozaj nie je možné dostať z pôvodných kôpok pomocou povolených operácii. Keď to vtákopysk zistil vykašlal sa na kamienkovanie, vykrútil si fúzy a odišiel si hľadať inú zábavku.

<u>**Úloha č. 7:**</u> *Austrálsky pastier Chuck sa po večeroch hráva so svojim pravidelným m-uholníkom ($m \geq 5$). Každý vrchol ofarbí jednou zo šiestich farieb tak, aby medzi jeho žiadnymi piatimi po sebe idúcimi vrcholmi neexistovali vrcholy ofarbené rovnakou farbou. Zistite hodnoty, ktoré môže nadobudnúť m.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Fofo a Bus)
Najprv skúsme ofarbiť pravidelné m-uholníky (odteraz len m-uholníky) pre niektoré malé hodnoty m. Pre päťuholník a šesťuholník sa nám to podarí, ale pre sedemuholník už nie. Dôvod je jednoduchý. Keďže máme šesť farieb na sedem vrcholov, tak aspoň jednu farbu musíme použiť dvakrát. Dva vrcholy rovnakej farby by určite patrili nejakej pätici po sebe idúcich vrcholov, čím by sme porušili pravidlo zo zadania. (Rozmyslite si to.) Podobne by ste mohli ukázať, že nevieme ofarbiť osemuholník ani deväťuholník. Pre m rovné 10, 11 a 12 by sme nejaké prípustné ofarbenie opäť mohli nájsť. (Skúste si to.)
Dôkladným rozoberaním pre malé hodnoty m sa zblížime s príkladom a môžeme dôjsť k nejakým všeobecnejším úvahám. Niektorým z vás sa podarilo objaviť nasledujúce riešenie.
Majme nejaký dobre ofarbený m-uholník. Poučení tým, že nemôžeme mať priveľa vrcholov rovnakej farby, označme k počet vrcholov ofarbených farbou A, ktorá sa na m-uholníku vyskytuje najčastejšie. Medzi m a k si môžeme všimnúť zaujímavé vzťahy. Predovšetkým musí platiť nerovnosť $m \geq 5k$. Prečo? Predstavte si, že sa postavíte na vrchol farby A a prejdete dookola m-uholníka. Po ceste stretnete k rôznych vrcholov farby A a vrátite sa naspäť. Medzi každými dvoma vrcholmi farby A musia byť aspoň štyri vrcholy inej farby. To spolu činí aspoň $4k$ vrcholov inej farby ako A, teda stretnete aspoň $5k$ vrcholov. Ďalej musí platiť $m \leq 6k$. Stačí si uvedomiť, že vrcholov každej farby je najviac k a počet farieb je šesť, preto nemôžeme mať viac ako $6k$ vrcholov. Práve sme dokázali, že musí platiť $5k \leq m \leq 6k$.
Teraz sa na predchádzajúci odstavec môžeme pozrieť z úplne iného uhla. Majme dané k. Pre aké m môže číslo k vyjadrovať počet vrcholov najčastejšie sa vyskytujúcej farby? Zjavne musí platiť $5k \leq m \leq 6k$. Dokážeme nasledovné.

<u>Tvrdenie:</u> Ku každej dvojici prirodzených čísel k a m, ktoré spĺňajú $5k \leq m \leq 6k$, vieme ofarbiť m-uholník farbami A, B, C, D, E a F tak, že farba A bude najpočetnejšia a bude sa vyskytovať práve k-krát.
Dôkaz: Ak ste sa dostatočne hrali s farbičkami, toto pre vás nebude problém. Budeme ofarbovať dookola. Najprv nanesieme niekoľko blokov tvaru $ABCDE$ a potom to doplníme niekoľkými blokmi tvaru $ABCDEF$ a to tak, „aby to vyšlo“. Presnejšie, najprv $6k-m$ pätíc vrcholov nafarbíme postupnosťou $ABCDE$ a potom $m-5k$ šestíc vrcholov nafarbíme postupnosťou $ABCDEF$. Spolu ofarbíme $5(6k - m) + 6(m - 5k) = m$ vrcholov. Z tejto konštrukcie je snáď jasné, že v žiadnej pätici nebudú dva vrcholy rovnakej farby a že žiadna farba sa nevyskytuje viac ako k-krát, pričom farba A práve k-krát.

Zistili sme, že pre každé m, ktoré leží medzi $5k$ a $6k$ vrátane, m-uholník vieme ofarbiť. Tiež vieme, že pre ostatné m ho ofarbiť nedokážeme. Jednoduchým vypisovaním prirodzených čísel z intervalov $[5k, 6k]$ zistíme, že určite *nevieme* ofarbiť m-uholníky pre m rovné 7, 8, 9, 13, 14 a 19. Zdá sa, že pre väčšie m to už pôjde. Posledným kúskom skladačky zostáva, či pre každé číslo $m \geq 20$ už existuje vhodné ofarbenie m-uholníka. Na domácu úlohu skúste dokázať, že pre každé $m \geq 20$ existuje také prirodzené k, že $5k \leq m \leq 6k$.
Záver: Číslo $m \geq 5$ môže nadobúdať hocijakú hodnotu okrem 7, 8, 9, 13, 14 a 19.

<u>**Úloha č. 8:**</u> *Predstavte si, že okrem oviec má Chuck aj štvorčekovú mriežku rozmerov $2^n \times 2^n$. Túto mriežku chce pokryť dlaždičkami. Každá dlaždička pozostáva z troch štvorčekov a má tvar písmena L. Dlaždičky môžu byť ľubovoľne otočené. Chuck má pre vás dve úlohy:*

a) Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n môže Chuck vydlaždičkovať takúto mriežku, ak jej chýba jeden rohový štvorček.

b) Nech $n = 100$ a v mriežke chýba jeden ľubovoľný štvorček. Rozhodnite, či môže Chuck vždy vydlaždičkovať takúto mriežku.

Riešenie: (opravoval Myrec a JeFo)
Tento príklad sa dal pekne vyriešiť za pomoci matematickej indukcie. Že vy neviete, čo to je tá matematická indukcia? Alebo aj viete, ale neviete, ako sa to presne používa? Tak len čítajte ďalej a dozviete sa.

Matematická indukcia je metóda, pomocou ktorej sa dajú elegantne dokázať matematické tvrdenia, v ktorých dokazujeme niečo pre všetky prirodzené čísla. (Napríklad ako v našom zadaní.) Dôkaz indukciou sa skladá z dvoch krokov:

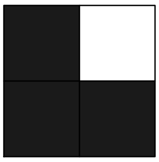
1° Ukážeme, že tvrdenie platí pre najmenšie číslo z postupnosti, teda napr. pre $n = 1$.

2° Ukážeme, že ak dané tvrdenie platí pre ľubovoľné prirodzené číslo n, potom platí aj pre $n + 1$.

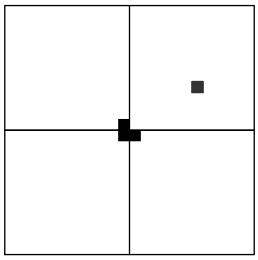
Ak poriadne spravíme oba kroky, dostaneme tak dôkaz daného tvrdenia pre všetky prirodzené čísla. Pozor, matematická indukcia *nespočíva* v tom, že pomocou $n = 2$ ukážeme $n = 3$ a z toho usúdime, že takto nejako to bude pokračovať aj ďalej.

Teraz si poďme ukázať matematickú indukciu v praxi na našom príklade. Správny riešiteľ by sa mal pustiť najprv do úlohy *a)* a potom do *b)*, no my to spojíme dokopy, pretože za päť minút zatvárajú poštu. Dokážeme, že pre každé prirodzené číslo n môžeme vydlaždičkovať mriežku $2^n \times 2^n$, ktorej chýba ľubovoľný (jeden) štvorček. Časť *b)* si žiada dokázať to len pre $n = 100$, ale matematická intuícia[4] nám radí, že to bude asi všeobecnejšie. Tak hurá na indukciu.

1° Pre $n = 1$ je máme mriežku 2×2, ktorej chýba jeden štvorček. To znamená, že má tvar dlaždičky, ktorou pokrývame a preto sa dá vydlaždičkovať.



2° Predpokladajme, že mriežku $2^n \times 2^n$ bez jedného ľubovoľného políčka vieme vydlaždičkovať útvarmi zo zadania. Chceme ukázať, že potom vieme vydlaždičkovať aj mriežku $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ bez ľubovoľného políčka. Stačí si všimnúť, že mriežka $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ sa skladá zo štyroch mriežok rozmerov $2^n \times 2^n$. Voľné políčko musí byť práve v jednej z týchto mriežok, tú ale vieme vydláždiť podľa indukčného predpokladu. Ostávajú nám ešte tri mriežky rozmerov $2^n \times 2^n$. Ak dáme jednu dlaždičku (šedú) do stredu, tak, aby každá jej kocka zasahovala do inej mriežky(viď na obrázku), potom každej z tých troch mriežok bude chýbať práve jedno rohové políčko. (Áno, k tomu vás mala naviesť časť *a)*.) Teraz už môžeme s kľudným svedomím vydlaždičkovať podľa indukčného predpokladu aj zostávajúce tri mriežky rozmerov $2^n \times 2^n$, lebo každej sme už jeden štvorček obsadili, a teda spĺňajú indukčný predpoklad.



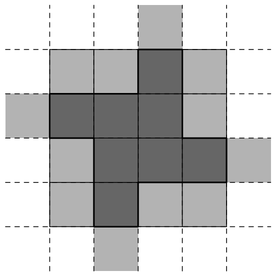
Tým sme vyriešili obe časti, *a)* aj *b)*.

Úloha č. 9: *Popri pasení oviec si Chuck privyrába v hoteli ako recepčný. Hotel má 11 podlaží a na každom podlaží je vedľa seba umiestnených 13 izieb. Môžete si predstaviť, že izby sú uložené v štvorčekovej mriežke rozmerov 11×13. Do hotela prišla jedna delegácia Aborigénov a jedna delegácia Maorov. Je im síce jedno, koľko izieb ktorá delegácia dostane, no obe majú na ubytovanie špeciálne požiadavky. Ľubovoľná izba Aborigénov má susediť s nepárnym počtom izieb Aborigénov a ľubovoľná izba Maorov má susediť s nepárnym počtom izieb Maorov. Pod susednými izbami k danej izbe rozumieme také, ktoré sú od nej hneď naľavo, napravo, hore alebo dole (ak také existujú). Rozhodnite, či Chuck môže do izieb rozdeliť členov delegácie podľa ich požiadaviek, ak každá izba v hoteli má byť zaplnená buď Aborigénmi alebo Maormi.*

Riešenie: (opravoval Tomáš a Bebe)
Zadanie tohto dlhého príkladu síce vyzerá odstrašujúco, ale ukážeme si, že samotné riešenie vôbec nie je zložité. Najskôr pre nás bude dôležité urobiť si o umiestňovaní hostí nejakú predstavu. S hotelom rozmerov 11×13 to však pôjde ťažko. Preto si nakreslíme menšie hotely a odskúšame si to na nich.

[4] Viacerí riešitelia radi používajú matematickú intuíciu namiesto matematickej indukcie. Vedzte, že za riešenia matematickou intuíciou spravidla nedávame veľa bodov.

Na začiatok vyskúšajme hotel 1×1. Ak má byť každá izba obsadená, bude aj v tejto jedinej izbe nejaká delegácia. A keďže nesusedí so žiadnou ďalšou izbou, tak susedí s párnym počtom izieb (aj nula je párne číslo), čo nám nevyhovuje.
Skúsme hotel 1×2. Je dôležité uvedomiť si, že je to to isté, ako keby sme sa pozreli na hotel 2×1. Bez ohľadu na fyzikálne zákony (a zdravie delegácií) totiž vieme hotel obrátiť a riešiť tak rovnakú úlohu. Tento hotel dokážeme rýchlo zaplniť podľa požiadaviek. Stačí do oboch izieb umiestniť zástupcov práve jednej z nich. (Premyslite si.)
Možnosti na rozubytovanie delegácií v hoteli 3×1 vieme rýchlo všetky vypísať. (Skúste si to.) Ani jedna však nevyhovuje. Avšak v hoteli 3×2 delegácie už ubytovať vieme. Pokiaľ má hotel tri poschodia a na každom dve izby, tak v oboch izbách na prvom poschodí budú Maori, na druhom Aborigéni a na treťom opäť Maori. Tým pádom bude každá izba susediť s práve jednou izbou obsadenou členmi rovnakej delegácie.
Na tomto mieste by sme už mohli dospieť k určitým domnienkam. Pokiaľ mal hotel párny počet izieb, vedeli sme hostí rozubytovať. Pokiaľ bol počet izieb nepárny, nedokázali sme to. To samozrejme neznamená, že to tak je vo všeobecnosti, ale môžeme sa to pokúsiť dokázať aj o hoteli zo zadania. Naším najlepším kamarátom pri dokazovaní bude zrejme parita.
Hotel 11×13 má oba rozmery nepárne, teda celkový počet izieb v ňom je nepárny. Navyše každá izba má byť obsadená jednou z delegácií, preto bude mať práve jedna delegácia nepárny počet izieb. (Rozmyslite si to.) Je možné, aby mala delegácia nepárny počet izieb a napriek tomu susedila každá jej izba s nepárnym počtom izieb obsadených členmi z rovnakej delegácie?
Predpokladajme, že je to možné. Pozrime sa na izby takejto delegácie. Každá má mať nepárny počet susedov. Ak pre každú izbu spočítame počet všetkých susedov z rovnakej delegácie a tieto čísla sčítame, dostaneme *nepárne číslo*. V tomto čísle je každé susedstvo medzi izbami vybranej delegácie zarátané práve dvakrát. Je to preto, lebo ak susedia izby A a B, museli sme započítať medzi susedstvá aj izbu B ako suseda A, a aj izbu A ako suseda B. Preto celkový počet susedstiev musí byť *párny*. Párne číslo má byť rovné nepárnemu, čo je spor. Keďže naše kroky boli správne, musí byť nesprávny predpoklad. (Pamätáte si ešte, čo sme predpokladali? Pozrite sa opäť na koniec predošlého odstavca.) To však ukazuje, že Chuck nemôže rozubytovať delegácie podľa ich požiadaviek.



Komentár: V tomto príklade sa často opakoval jeden prístup k riešeniu. Skoro každý prišiel na to, že je dobré všímať si „oblasti“ izieb rovnakej delegácie. V jednej oblasti sú len izby medzi ktorými sa vieme dostať bez toho, aby sme prešli cez izbu druhej delegácie. Najmenšia takáto oblasť, ktorá mohla vzniknúť je dvojica susediacich izieb rovnakej delegácie. To je pravda. Mnohí ale tvrdili, že ak chceme vytvoriť nejakú väčšiu oblasť, stačí nám zobrať nejakú oblasť, ktorú už máme a pridať k nej dve izby. To už ale pravda nie je pretože, ak to chceme tvrdiť, je potrebné odôvodniť to. Na ilustráciu si môžete pozrieť obrázok na ktorom je oblasť v ktorej sa nachádza osem izieb. Táto oblasť spĺňa všetky podmienky zo zadania. Dá sa táto oblasť vytvoriť z oblasti, ktorá má šesť izieb a spĺňa podmienky zo zadania? Skúste takú oblasť nájsť. Keďže sa takýmto pridávaním nedá dosiahnuť každá možná oblasť, tak sa dôkaz tejto úlohy nedá urobiť na základe takéhoto pridávania izieb do oblastí.

Úloha č. 10: *Doma u Chucka na stole je n rôznych na sebe položených kníh. Knihy začal nasledovne otáčať. V prvom ťahu otočil najvrchnejšiu knihu a položil ju naspäť. V druhom ťahu otočil dve vrchné knihy ako jeden blok a položil ich naspäť. Takto pokračoval aj ďalej a v n-tom ťahu otočil všetkých n kníh ako jeden blok a položil ich naspäť. V $(n+1)$-vom ťahu otočil opäť vrchnú knihu a položil ju naspäť. V $(n+2)$-hom ťahu otočil vrchné dve knihy ako jeden blok a položil ich naspäť. Takýmto spôsobom otáčal aj ďalej. Chuck odmieta skončiť skôr než sú knihy uložené presne tak, ako na začiatku, teda nielen v správnom poradí, ale aj správne orientované. Orientáciu knihy rozlišujeme podľa toho, či je kniha otočená prednou obálkou nahor alebo nadol. Všimnite si, že pri otočení nejakého bloku kníh sa orientácia každej knihy tohoto bloku zmení. Dokážte, že Chuck po konečnom počte ťahov skončí.*

Riešenie: (opravovala Katka Š.)
V riešení tohoto príkladu je skrytý jeden veľmi dôležitý princíp. Nemá nejaké bežné pomenovanie, ale je užitočný a jednoduchý. V mnohých úlohách je však trochu skrytý, rovnako ako v tejto.
Najprv sa dohodnime na pár pojmoch. Prvých n Chuckových ťahov si nazvime *kolo*. Chuck potom opakuje dookola stále tie isté kolá. My dokážeme ešte silnejšie tvrdenie ako v zadaní. Ukážeme, že Chuck vždy skončí po konečnom počte (celých) kôl. Teraz to znie neprirodzene, takto si sťažovať úlohu, no časom uvidíte, čo nás k tomu viedlo.
Uloženie kníh po niekoľkých Chuckových kolách si nazvime *stav*. Stav je určený poradím a orientáciou kníh. Chuck postupným otáčaním kníh dostane postupnosť stavov. (Po každom kole pribudne jeden člen postupnosti.) Táto postupnosť má dve veľmi dôležité vlastnosti.

(1) Prvou vlastnosťou je, že každý nasledujúci stav je jednoznačne určený predchádzajúcim stavom.

(2) Druhá veľmi dôležitá vlastnosť je, že pre každý stav vieme jednoznačne určiť stav, z ktorého vznikol, čiže predchádzajúci stav. Dostaneme ho tým, že spravíme jedno „opačné“ kolo. Namiesto otočenia jednej, dvoch, troch, $\dots$, n kníh, otočíme najprv n, potom $n-1$, $n-2$, $\dots$, dve a napokon jednu knihu. Takto sa dostaneme

do predchádzajúceho stavu, z ktorého náš stav vznikol. Uvedomme si, že takýto predchádzajúci stav, je jediný. (Dobre si to rozmyslite.)

Všetkých možných stavov je len konečne veľa. (Presnejšie $2^n n!$, ale to v tomto príklade vôbec nie je dôležité.) To znamená, že Chuckovi po každom kole nemôže vzniknúť vždy nový stav, ale po nejakom konečnom počte kôl dostane *po prvýkrát* nejaký stav, ktorý už dostal niekedy predtým. Označme si tento stav S. Teraz ukážeme, že stav S je vlastne začiatočný stav. (Chuck môže skončiť.) Dokážeme to sporom. Predpokladajme, že stav S nie je začiatočný stav. Potom z vlastnosti (2) vieme, že oba razy, keď sme dostali stav S, existuje stav S' taký, že Chuck sa do S dostal zo stavu S'. To znamená, že stav S' sa zopakoval skôr ako stav S, čo je spor s výberom S. (Pamätáte? Stav S je ten, ktorý sa po prvý raz zopakuje.) Dokázali sme teda, že Chuck sa po konečnom počte ťahov dostane do začiatočného stavu.

Komentár: Myšlienka, ktorú sme použili sa dá popísať aj všeobecne. Najprv si to povieme abstraktne a potom si na našom príklade vysvetlíme, čo to vlastne znamená. Majme konečnú množinu M a funkciu $f : M \to M$. Nech platí, že pre každé $b \in M$ vieme nájsť práve jedno $a \in M$ také, že $f(a) = b$.[5] Potom pre každé $a \in M$ platí, že postupnosť $a, f(a), f(f(a)), \ldots$ je periodická. Preto po konečnom počte aplikácií f na a dostaneme opäť prvok a. V našom príklade M je množina všetkých stavov a f je funkcia, ktorá stavu priradí stav „o jedno kolo neskôr“. Aplikáciu tohoto postupu si môžete skúsiť na nasledujúcich cvičeniach. (Pozor, treba aj trochu porozmýšľať.)

Cvičenie 1. Majme postupnosť $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Platí $a_1 = 1$ a a_{n+1} definujeme ako zvyšok $7a_n$ po delení 101. Dokážte, že táto postupnosť je periodická.

Cvičenie 2. Majme postupnosť $F_1, F_2, F_3, \ldots$. Platí $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pre $n \geq 1$. Dokážte, že existuje prirodzené m také, že F_m zapísané v desiatkovej sústave končí na 6 núl.

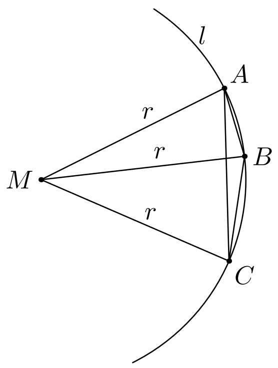
Úloha č. 11: *V knižke našiel Chuck založenú starú mapu Austrálie. Je na nej k miest. Označme r vzdialenosť dvoch miest, ktoré sú od seba vzdušnou čiarou najďalej. Dokážte, že pre ľubovoľný počet miest k existuje nanajvýš k (neusporiadaných) dvojíc miest, ktoré sú od seba vzdušnou čiarou vzdialené r.*

Riešenie: (opravoval Škrečok)

Riešiteľom, ktorí nevydržia čítať celé vzorové riešenie, odporúčame prečítať si aspoň komentár na jeho konci. Všetkým ostatným riešiteľom odporúčame počas čítania vzorového riešenia dodržiavať pitný a spánkový režim.

(Podľa Andrey Chlebíkovej a Filipa Sládeka.) Budeme dokazovať sporom, predpokladajme, že tvrdenie neplatí. Teda vieme nájsť také k, pre ktoré existuje viac ako k (neusporiadaných) dvojíc miest vzdialených od seba r. Navyše si vezmime *najmenšie* k, pre ktoré existuje aspoň $k+1$ spomínaných dvojíc.

Najprv ukážeme, že tam existuje mesto M, ktoré je vzdialené aspoň od troch iných miest presne r. Totiž ak by platil opak, bolo by každé mesto vzdialené r najviac od dvoch iných miest. Miest je spolu k, preto by existovalo maximálne $2k$ usporiadaných dvojíc miest vzdialených od seba r. To nám dáva najviac k neusporiadaných dvojíc, a to je spor s tým, že ich má byť aspoň $k+1$. Máme teda zaručenú existenciu takého význačného mesta M. (Bystrý čitateľ si istotne všimol, že sme práve použili Dirichletov princíp.)



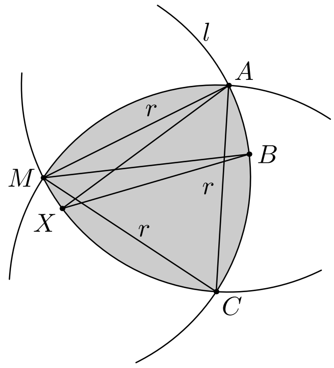
Vezmime si teraz toto mesto M. K nemu, ako sme ukázali, určite existujú (aspoň) tri mestá A, B a C, ktoré sú od neho vzdialené presne r. Situácia vyzerá ako na obrázku, tieto tri mestá ležia na kružnici l so stredom M a polomerom r. Navyše nech je mesto B „medzi mestami“ A a C. Formálne povedané, B leží na kratšom oblúku AC kružnice l. Maximálna vzdialenosť miest A a C (ako aj ľubovoľných dvoch miest na mape) je r, bod B bude vďaka svojej polohe k týmto dvom bodom ešte bližšie. Úsečky AB a BC sú totiž kratšie tetivy kružnice l ako tetiva AC. (Ktorej maximálna dĺžka je r.)

Všimnime si mesto B. Zatiaľ o ňom vieme, že je od M vzdialené presne r a od miest A či C určite menej. Otázka znie, či vôbec môže existovať nejaké iné mesto okrem M, od ktorého by bolo B vzdialené presne r. Ak by totiž neexistovalo, mohli by sme ho z mapy vyhodiť. Dostali by sme $k-1$ miest a k dvojíc miest vzdialených od seba r. (Ubrali by sme iba jednu dvojicu (M, B).) To by odporovalo minimalite k a bol by to hľadaný spor.

Ako ale toto naše pozorovanie dokázať? Označme si hľadané mesto rôzne od M a vzdialené od B presne r ako X. Ukážeme, že takéto mesto sa na mapu nedá umiestniť.

Nakreslime si kružnice s polomerom r aj okolo miest A a C. Mesto X by muselo ležať vo vnútri alebo na obvode všetkých troch kružníc, inak by bolo od jedného z ich stredov vzdialené viac, ako je dovolené. Muselo by teda ležať vo vnútri sivého útvaru určeného bodmi M, A a C. Ak teraz nakreslíme kružnicu s polomerom r aj okolo B, hľadané mesto X musí ležať v prieniku sivého útvaru a tejto kružnice. Situáciu si trochu zjednodušíme, toto mesto X stačí hľadať v prieniku *obvodu* sivého útvaru a spomínanej kružnice. My ale dokážeme, že ich jediný prienik je mesto M. (Ktoré má byť ale rôzne od X.)

[5] Pre náročných: skúste si dokázať, že v prípade konečnej množiny M je táto vlastnosť ekvivalentné tomu, že f je bijekcia. Je to tak aj pri nekonečnej množine M?



Spôsobov je mnoho (napríklad škaredá analytická geometria), ukážeme si azda najjednoduchší z nich. Uvažujme extrémny prípad, kedy sú mestá A a C vzdialené presne r. Ak by boli k sebe bližšie, sivý útvar by bol podmnožinou pôvodného väčšieho sivého útvaru. To znamená, že ak to nepôjde v tomto extrémnom prípade, už tobôž to nepôjde, ak bude vzdialenosť A a C menšia. Mestá M, A a C nám teda tvoria rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky r.
Rozmyslite si teraz, že ak nájdeme vyhovujúce mesto X vo vnútri sivého útvaru, podarí sa nám to aj na jeho obvode. Stačí sa trocha posunúť po našej kružnici so stredom v B. (Ako na tomto obrázku.) Vďaka tomu dostávame, že by muselo existovať také mesto X, ktoré by bolo vzdialené presne r nielen od mesta B, ale tiež od mesta A alebo C. (Musí ležať na jednom z im prislúchajúcich oblúkov sivého útvaru.) Bez ujmy na všeobecnosti nech je to mesto A, platí teda $|AX| = |AM| = r$ a tiež $|BX| = |BM| = r$. Keďže však body X a M ležia v tej istej polrovine určenej AB, musí platiť, že mesto X je totožné s M. (Je to veľmi jednoduché, rozmyslite si sami.) Lenže my sme chceli nájsť vyhovujúce mesto X rôzne od M, čo sa kvôli tomu nedá.
Teraz sa už len vráťme k pôvodnému tvrdeniu. Jediné mesto vzdialené od B presne r je M. Preto ho spomedzi k miest môžeme odobrať, čím prídeme len o jednu dvojicu. Prejdeme k rovnakému zadaniu pre $k-1$ miest a k dvojíc, no a to je finálny spor s tým, že sme vybrali najmenšie možné k.

Komentár: Veľmi veľa riešiteľov založilo svoju úvahu na chybnom úsudku, že tam *musí* existovať rovnostranný trojuholník miest so stranou dĺžky r, čo bohužiaľ nie je pravda. Stačí si predstaviť pravidelný päťuholník, pričom jednotlivé dvojice miest budú jeho uhlopriečky. (To je zrejme maximálna vzdialenosť medzi mestami.) Problém je, že sa z týchto piatich bodov nedajú vybrať žiadne tri, ktoré by tvorili rovnostranný trojuholník. Na záver by som chcel pochváliť tých, ktorí nezablúdili na túto málobodovú cestičku.

Úloha č. 12: *Dokážte, že ak p je prvočíslo, tak číslo $p^p - 1$ má aspoň jedného prvočíselného deliteľa q, ktorý dáva zvyšok 1 po delení p.*

Riešenie: (opravoval Petržlen a Ondráč)
(Podľa Filipa Sládka) Najprv si zoberme ľubovoľné prvočíslo q, ktoré delí p^p-1. Zrejme p a q sú potom nesúdeliteľné a z Malej Fermatovej vety vieme, že $p^{q-1} \equiv 1 \mod q$. Takže pre q platia kongruencie

$$\begin{aligned} p^p &\equiv 1 \mod q, \\ p^{q-1} &\equiv 1 \mod q. \end{aligned} \tag{1}$$

Zvyšky mocnín prirodzených čísel po delení prvočíslom sa správajú veľmi pekne. Jednu ich vlastnosť si zhrnieme v nasledujúcom pomocnom tvrdení.

Tvrdenie 1: Zoberme najmenšie $d \in \mathbb{N}$ také, že $p^d \equiv 1 \mod q$. Potom zoberieme ľubovoľné $c \in \mathbb{N}_0$ také, že platí $p^c \equiv 1 \mod q$, tak nutne d delí c. (Z toho potom ľahko vyplynie, že zvyšky čísel $1, p, p^2, p^3, \ldots$ po delení q sa opakujú s periódou d.)
Dôkaz Tvrdenia 1: Najprv si uvedomme, že keď $p^d \equiv 1 \mod q$, tak aj $p^{kd} \equiv 1 \mod q$. Tvrdenie dokážeme sporom. Nech teda existuje také $c \in \mathbb{N}_0$, pre ktoré platí $p^c \equiv 1 \mod q$, ale predsa d nedelí c. Potom musí existovať také $t \in \mathbb{N}_0$, že platí $dt < c < d(t+1)$. To znamená, že

$$1 \equiv p^c \equiv p^{c-td}p^{td} \equiv p^{c-td} \mod q.$$

Potom ale $d > c - td > 0$, čo je spor s výberom najmenšieho takého d.

Pre pevne zvolené p a každé prvočíslo q existuje najmenší exponent $d_q > 0$ s vlastnosťou $p^{d_q} \equiv 1 \mod q$. Nech q delí $p^p - 1$. Z rovníc (1) a Tvrdenia 1 dostávame vzťahy

$$\begin{aligned} d_q &\mid p, \\ d_q &\mid q-1. \end{aligned} \tag{2}$$

Z (2) vyplýva, že d_q delí najmenší spoločný deliteľ p a $q-1$, čo znamená, že $d_q = 1$ alebo $d_q = p$. Keďže zjavne $p \neq q$, vieme sa obmedziť na niekoľko prípadov.

a) Nech platí $q > p$.
Ak $d_q = 1$, tak $p^1 \equiv 1 \mod q$. Kvôli $q > p$ musí platiť $p = 1$, čo je spor.
Ak $d_q = p$, tak z (2) vyplýva $p \mid q-1$, čiže $q \equiv 1 \mod p$, čo sme chceli ukázať.

b) Nech platí $q < p$.
Ak $d_q = p$, tak $p \mid q-1$, čo nemôže byť pravda, pretože $q < p$. Spor.
Ak $d_q = 1$, tak $p^1 \equiv 1 \mod q$, čiže $q \mid p-1$.

Rozobratím prípadov, sme zistili, že akonáhle $q > p$, tak q dáva zvyšok 1 po delení p. Musíme ešte ukázať, že taký veľký prvočíselný deliteľ čísla $p^p - 1$ naozaj existuje. Dokazujme sporom. Nech každý deliteľ čísla $p^p - 1$ je menší ako p. Potom z časti b) vieme, že každý deliteľ $p^p - 1$ musí deliť aj $p - 1$. Platí

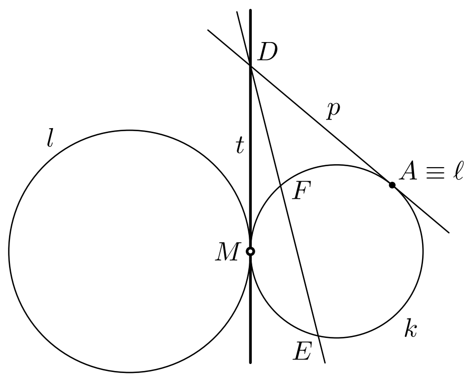
$$\begin{aligned} p^p - 1 &= (p-1)(p^{p-1} + p^{p-2} + \cdots + p^1 + 1) = \\ &= (p-1)(p^{p-1} + 1 - 1 + p^{p-2} + 1 - 1 + \cdots + p^1 + 1 - 1 + 1) = \\ &= (p-1)(p^{p-1} - 1 + p^{p-2} - 1 + \cdots + p^1 - 1 + p) = \\ &= (p-1)((p-1)M + 1), \end{aligned}$$

kde M je nejaké prirodzené číslo. Činiteľ $(p-1)M + 1$ je s $p - 1$ nesúdeliteľný a preto musí existovať prvočíselný deliteľ $p^p - 1$, ktorý je nesúdeliteľný s $p - 1$. Spor. Takže nutne existuje deliteľ $q > p$ a pre ten sme už ukázali (v rozoberaní prípadov, časť a)), že $q \equiv 1 \mod p$.

__Úloha č. 13:__ *Dané sú kružnice k a l s vonkajším dotykom v bode M. Nech A je ľubovoľný bod kružnice k, ktorý neleží na priamke spájajúcej stredy oboch kružníc. B a C sú rôzne body ležiace na kružnici l také, že priamky AB a AC sú jej dotyčnice. Priamky BM a CM znovu pretínajú k postupne v bodoch E a F. Bod D je priesečníkom priamky EF s dotyčnicou ku kružnici k v bode A. Aký útvar opíše bod D, keď meníme polohu bodu A?*

__Riešenie:__ (opravoval Petržlen a Ondráč)

Keď nakreslíme viacero obrázkov, nadobudneme pevné presvedčenie, že hľadané body D ležia na spoločnej dotyčnici kružníc k a l vedenej bodom M. (Označme ju t.) Zamyslime sa preto, ako by sa to dalo dokázať. Označme p dotyčnicu ku k vedenú bodom A. Chceme vlastne dokázať, že priamky t, EF a p sa pretínajú v jednom bode. (Potom totiž nutne priesečník EF a p leží na t.) Dobre vieme, že t je chordálou kružníc k a l. Ak nájdeme tretiu kružnicu ℓ takú, že EF je chordálou kružníc l a ℓ a p je chordálou kružníc k a ℓ, budeme hotoví. Vieme totiž, že tri chordály troch kružníc (ku každej dvojici kružníc jedna chordála) sa pretínajú v jednom bode. (Dôkaz tohto tvrdenia je veľmi jednoduchý. Stačí si uvedomiť, že chordála dvoch kružníc je množina bodov majúcich k nim rovnakú mocnosť.)

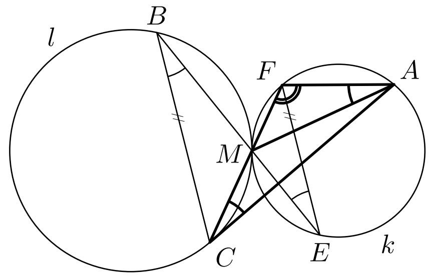


Ukážeme, že vhodnou „kružnicou“ ℓ je bod A. (Chápaný ako kružnica zdegenerovaná do jedného bodu.) I keď to nie je klasická kružnica, všetky veci s mocnosťou fungujú. Mocnosť bodu X ku tejto „kružnici“ bude jednoducho číslo $|XA|^2$. Sami sa presvedčte, že „chordálou“ takejto zdegenerovanej kružnice a inej klasickej kružnice je tiež priamka.

Zrejme p *je* chordálou kružnice k a „kružnice“ A. (Stačí si spomenúť, že mocnosť sa počíta ako druhá mocnina vzdialenosti od dotykového bodu.)

Zostáva teda overiť, že EF je chordálou kružnice l a „kružnice“ A. Na to treba ukázať, že E aj F má ku kružnici l rovnakú mocnosť ako ku „kružnici“ A. T. j. stačí odvodiť rovnosti

$$|EM| \cdot |EB| = |EA|^2 \qquad \text{a} \qquad |FM| \cdot |FC| = |AF|^2. \tag{3}$$



Začnime konečne úlohu riešiť. Uhly FAM a FEM sú obvodové k tetive FM kružnice k, sú preto rovnako veľké. Kružnice l a k sú rovnoľahlé so stredom rovnoľahlosti M. V tejto rovnoľahlosti sa trojuholník CBM zobrazí na trojuholník FEM, uhly FEM a CBM sú teda rovnako veľké. Uhol CBM je obvodový a uhol FCA je úsekový k tetive MC kružnice l, a tak aj tieto dva uhly sú rovnako veľké. Spojením predchádzajúcich troch úvah dostávame, že uhly FAM a FCA sú rovnako veľké. Trojuholníky FAM a FCA majú okrem týchto dvoch rovnako veľkých uhlov ešte spoločný uhol pri vrchole D, sú teda podobné. Preto platí

$$\frac{|AF|}{|FC|} = \frac{|FM|}{|AF|},$$

odkiaľ prenásobením dostaneme druhú rovnosť z (3). Zrejme prvú rovnosť z (3) dostaneme zopakovaním podobného postupu pre trojuholníky EAM a EBA.

Tým sme dokázali, že D leží na priamke t pre ľubovoľnú dovolenú polohu bodu A. Určite $D \neq M$, lebo cez M prechádza p len pre $A = M$ a taká poloha bodu A je v zadaní zakázaná. Každým iným bodom D' priamky t vieme viesť dotyčnicu p ku kružnici k (rôznu od t), ktorá sa jej dotkne v bode A neležiacom na spojnici stredov kružníc. K tomuto bodu prislúcha nejaký bod D na priamke p a už sme dokázali, že musí ležať na t. Nutne teda $D' = D$ a preto D' do hľadanej množiny bodov patrí.

Záver: Hľadanou množinou bodov je spoločná vnútorná dotyčnica kružníc k a l bez bodu M.

<u>**Úloha č. 14:**</u> *Na matfyze v Sydney majú každí dvaja študenti, ktorí sa navzájom nepoznajú, aspoň jedného spoločného známeho (poznanie sa je symetrické). Ani jeden študent pritom nepozná všetkých ostatných. Očíslujme študentov od 1 po n a nech a_i označuje počet známych i-teho študenta. Vieme, že platí*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = n^2 - n.$$

Nech $k \geq 3$ je najmenší počet študentov, ktorých možno usadiť okolo okrúhleho stola tak, aby každý poznal oboch svojich susedov. Nájdite všetky možné hodnoty k.

<u>Riešenie:</u> (opravoval Petržlen a Ondráč)
Táto úloha sa dá preformulovať do reči teórie grafov nasledovne. Majme neorientovaný graf G s n vrcholmi očíslovanými $1, 2, \ldots, n$, v ktorom pre každé dva vrcholy, ktoré nie sú spojené hranou, existuje iný vrchol, s ktorými sú oba spojené[6]. Graf, ktorý spĺňa túto podmienku, nazvime *dobrý*. Ak označíme a_i počet hrán vychádzajúcich z vrcholu i (stupeň vrcholu i), tak má platiť

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = n^2 - n. \tag{4}$$

Navyše $a_i < n-1$ pre každé i. Označme $k \geq 3$ dĺžku najmenšieho cyklu v grafe G.[7] Máme zistiť aké hodnoty môže nadobúdať k. Poďme sa pustiť do riešenia.
Najprv skúsme rozlúsknuť, čo nám hovoria tie čudesné podmienky na náš graf. Ak by ste boli trpezliví a kreslili si nejaké *dobré* grafy, zistili by ste, že rovnica (4) občas platí, občas nie, no nikdy by ľavá strana nebola menšia ako $n^2 - n$. Pokúsime sa to dokázať.
Ľavá strana (4) sčítava hodnotu a_i^2 cez všetky vrcholy. Hodnotu a_i^2 si vieme reprezentovať ako počet všetkých usporiadaných dvojíc vrcholov, ktoré susedia s vrcholom i. Z istých dôvodov radšej povedzme, že a_i^2 je počet usporiadaných trojíc vrcholov (u, i, v), kde u a v susedia s i. (Môže platiť $u = v$.) Takúto trojicu nazvime *sled dĺžky* 3 so stredom v bode i. Ľavá strana (4) je preto rovná počtu všetkých sledov dĺžky 3 v grafe G. Chceme ukázať, že tento počet nie je menší ako $n^2 - n$, čo je zhodou okolností počet usporiadaných dvojíc rôznych vrcholov v grafe G. Ako to spravíme?
Skúsime každej usporiadanej dvojici vrcholov grafu G priradiť nejaký sled dĺžky 3 tak, aby toto priradenie bolo prosté. Majme dvojicu vrcholov (i, j), $i \neq j$. Ak v grafe G existuje hrana ij, tak dvojici (i, j) priradíme sled (i, j, i). Ak v grafe G takáto hrana nie je, musí existovať vrchol (ak je ich viac, vyberme si ľubovoľný) k taký, že ik a kj sú hrany v G. Potom dvojici (i, j) priraďme sled (i, k, j). Na úlohu si dokážte, že toto priradenie je prosté. Takto sme zdôvodnili, že pre každý *dobrý* graf G platí

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq n^2 - n. \tag{5}$$

Nás zaujíma prípad, keď v nerovnosti (5) nastáva rovnosť. To je práve vtedy, keď priradenie konštruované v predošlom odstavci je bijekcia. To nastane vtedy, keď sú splnené nasledovné dve podmienky:

(a) Ak vrcholy $i, j, i \neq j$ sú spojené hranou, tak neexistuje vrchol k taký, že ik aj kj sú hrany v G.

(b) Ak vrcholy $i, j, i \neq j$ nie sú spojené hranou, tak existuje práve jeden vrchol k taký, že ik aj kj sú hrany v G.

Za týchto predpokladov nemôže existovať v grafe G cyklus dĺžky 3 (spor s (a)), ani cyklus dĺžky 4. (Spor s (a) alebo s (b).) *Dobrý* graf spĺňajúci (4) môže byť buď les[8], alebo má cykly dĺžky aspoň 5. Nie je ťažké dokázať, že *dobrý* les je hviezda.[9] To je ale neprípustné, pretože jeden vrchol by susedil so všetkými ostatnými, čo máme zakázané. Preto zostáva možnosť, že v G budú cykly, no najmenší z nich bude mať dĺžku aspoň 5.
Predpokladajme teraz, že dĺžka najmenšieho cyklu by bola aspoň 6. Označme jeho vrcholy zaradom $v_1, v_2, \ldots, v_m$, $m \geq 6$. Potom v_1v_4 nie je hrana v G a preto existuje w také, že v_1w a wv_4 sú hrany v G. Potom však v_1, v_2, v_3, v_4, w tvoria cyklus dĺžky 5, čo je spor s predpokladom.
Zistili sme, že k nemôže byť iné číslo ako 5. Prípad $k = 5$ naozaj môže nastať, napríklad pre graf, ktorý je cyklus na piatich vrcholoch.

---

[6] Takto sa zo študentov stali vrcholy a reláciu *byť známy* sme previedli na *byť spojený hranou*

[7] Cyklus v grafe G je konečná postupnosť rôznych vrcholov $v_1, v_2, \ldots, v_m$ taká, že v_1v_2, $v_2v_3, \ldots, v_{m-1}v_m$ a aj v_mv_1 sú hrany v G. Dĺžka tohoto cyklu je m. Rozmyslite si, že je to ekvivalentné so sadaním študentov okolo okrúhleho stola.

[8] Les je graf, v ktorom sa nevyskytujú žiadne cykly.

[9] Hviezda je graf, v ktorom sú všetky vrcholy spojené hranou s jedným centrálnym vrcholom.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
1.	Bachratý Martin	4.	GVO ZA	11	8			9	9	9	9	9		45	45
1.	Balog Matej	3.	Gamča BA	5	0	9	9	9	9	5	9			45	45
1.	Chlebíková Andrea	3.	Brighton UK	6	2		9	7	9	9	9	9		45	45
1.	Horňák Marián	2.	GPár NR	4	1		9	9	9	9	9			45	45
1.	Kozák Andrej	3.	Gamča BA	8	2		9	9	9	9	9	0		45	45
1.	Phuong Mariana	3.	GJH BA	6	1		9	9	9	9	9			45	45
1.	Vodička Martin	1.	GAlej KE	2	0	9	9	9	9	9	9			45	45
8.	Kossaczký Pavol	4.	Gamča BA	6	1		9	8	9	9	9			44	44
9.	Tóth Róbert	4.	GAlej KE	5	0	9	7	9	9	9	2	1		43	43
10.	Le Tuan Anh	3.	Gamča BA	8	2		9	9	9	3	9	6		42	42
10.	Majdiš Mojmír	4.	GPOH DK	7	1		9	6	9	9	9			42	42
12.	Csiba Dominik	3.	ŠPMNDG BA	7	2		9	9	9	5	9	1		41	41
12.	Hagara Michal	4.	GJH BA	10	8			9	9	9	9	5		41	41
12.	Kossaczká Marta	1.	Gamča BA	2	0	9	9	6	8	9				41	41
12.	Midlik Adam	4.	GJAR PO	8	3			8	9	9	9	6		41	41
16.	Kopf Michal	2.	Opava ČR	4	0	9	9	4	9	9				40	40
16.	Santer Jakub	3.	GMH Trstená	6	1		7	7	9	9	8	5		40	40
18.	Kocák Jakub	3.	GLS HE	5	0	9	7	5	9	6	8	0		39	39
18.	Koprda Pavol	2.	GAM TT	4	0	6	9	6	9		9			39	39
18.	Szabados Viktor	3.	Gamča BA	8	2		9	7	9	5	9			39	39
21.	Galovičová Soňa	2.	GVO ZA	5	0	9	9	6	9	5				38	38
21.	Guričan Pavol	3.	GJH BA	7	2		9	8	9	5	7			38	38
21.	Hozza Ján	3.	GJH BA	6	4			9	8	9	9	3		38	38
24.	Jasenčáková Katarína	2.	GVO ZA	5	0	9	9	7	9		3			37	37
24.	Kováč Ondrej	3.	GCM NR	7	2		8	7	9	4	9			37	37
24.	Žídek Augustin	2.	Frýdlant ČR	4	0	9	7	8	9	4	4			37	37
27.	Bačo Ladislav	4.	GPoš KE	11	8			9	9	9	9			36	36
27.	Konečný Jakub	4.	Gamča BA	11	7			9	8	7	9	3		36	36
27.	Kukan Marek	4.	Gamča BA	7	3			9	9	9	9			36	36
30.	Faršang Štefan	3.	SJG KN	5	1		9	8	9	9		0		35	35
30.	Halajová Barbora	2.	GVO ZA	5	0	9	9	7	9	1				35	35
30.	Klembarová Barbora	2.	GKuk PP	4	0	9	6	3	9	1	8	0		35	35
33.	Karásková Natália	3.	GJH BA	9	7			9	9	1	9	6		34	34
33.	Langer Tomáš	2.	GJH BA	4	0	9	8	6	9	2				34	34
35.	Jakubík Ján	3.	SPŠE PN	5	0	9	6	6	9	3				33	33
35.	Stehlík Matúš	3.	GAlej KE	5	0	9	9	6	9					33	33
37.	Kmeťová Katarína	2.	GKuk PP	4	0	9	3	7	9	4				32	32
37.	Varga Mátyás	3.	SJG KN	4	0	9	9	4	9			1		32	32
39.	Baxová Zuzana	2.	GĽŠ TN	4	0	9	9	7	6					31	31
39.	Faguľová Kristína	2.	GPoš KE	5	0	9	6	6	9			1		31	31
39.	Kosec Peter	2.	GĽŠ TN	4	0	9	8	5	9			0		31	31
42.	Marečáková Barbora	2.	GKuk PP	4	0	8	9	4	9			0		30	30
42.	Tóth Michal	2.	GJH BA	4	0		9	6	9	5		1		30	30
42.	Vavrík Boris	3.	GJH BA	5	0	8	1	4	7	3	8	0		30	30
45.	Večerík Matej	3.	ŠPMNDG BA	7	2		4	6	9		9	1		29	29
46.	Kubincová Petra	3.	ŠPMNDG BA	7	1		9	9	9	1				28	28
47.	Baranová Jana	4.	GAlej KE	8	2		9	9	9					27	27
47.	Múthová Denisa	3.	GTR ZA	7	1		9	6	9	2	1			27	27
47.	Peitl Tomáš	4.	ŠPMNDG BA	10	4			9	9	9				27	27
50.	Dupej Peter	2.	GJAR PO	4	0	9	3	5	9			0		26	26
50.	Hajdinová Katarína	3.	GJH BA	6	1		9	8	9					26	26

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k**$_\alpha$	**k**$_\beta$	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
50.	Švančara Patrik	2.	GĽŠ TN	4	0	9		6	7	4				26	26
53.	Belanová Michaela	2.	ŠPMNDG BA	4	0		9	5		3	8	0		25	25
53.	Bogár Ján	4.	GĽŠ TN	9	2			5	8	3	9	0		25	25
53.	Floriánová Michaela	4.	GJH BA	8	0	2	9	5	1	1	8	0		25	25
53.	Hlavatá Martina	3.	Gamča BA	7	1		9	7	9			0		25	25
53.	Lami Vincent	4.	SJG KN	5	2		7	5	9	4		0		25	25
53.	Mariš Andrej	2.	PiarG NR	2	0	9	2	4	9	1				25	25
53.	Vlček Andrej	2.	EvSŠ LM	4	0	9	7		9			0		25	25
60.	Macháč Juraj	3.	GJH BA	5	0	9	1	5	9			0		24	24
60.	Sabatovičová Linda	3.	GJH BA	7	1		9	6	9					24	24
62.	Mužík David	2.	GChD Praha	4	1		1	6	9	1	6	1		23	23
62.	Žákovská Uršuľa	2.	Gamča BA	4	0	9		5	9					23	23
64.	Daniláková Monika	2.	GJAR PO	4	0	9	7	4	1	1				22	22
64.	Harmanová Dominika	3.	GJH BA	3	0	3		7	7	2	3			22	22
64.	Nováková Daniela	2.	GPár NR	4	0	9	9	4						22	22
64.	Santrová Adriana	2.	GMH Trstená	4	0		9	4	9					22	22
68.	Anderle Michal	3.	GBST LC	5	0	9		6	6					21	21
68.	Pellerová Daniela	1.	Gamča BA	2	0	9	5	5		2				21	21
70.	Sládek Filip	4.	GAB NO	8	8						9	9		18	18
70.	Šafin Jakub	1.	GPH MI	1	0	4	6	3	2	3	1	1		18	18
72.	Dižová Andrea	3.	GKom PE	7	2			5	9			2		16	16
72.	Rabatin Branislav	1.	GJH BA	1	0	9	2	2	3					16	16
74.	Masár Juraj	3.	GJH BA	6	1		6	5	4					15	15
75.	Mészárošová Lucia	3.	GGol NR	3	0	7	3	3		1	0	0		14	14
75.	Šimková Mária	4.	GJF Šaľa	4	0	9	1	4						14	14
77.	Bogárová Zuzana	3.	GĽŠ TN	6	1			3	9			0		12	12
78.	Ďurikovičová Lucia	3.	GsvU BA	4	0	0	6	2	1	2				11	11
79.	Melošová Veronika	1.	GJCh BR	1	0	4	2	2	1	0	0	0		9	9
80.	Kormaník Ján Michael	1.	ŠPMNDG BA	1	0	2	2		2					6	6
80.	Neradný Matej	2.	GJGT BB	3	0	0	0	2	4		0			6	6
80.	Porembová Alexandra	3.	GJH BA	6	1			6						6	6
83.	Rigdová Emília	4.	GKuk PP	7	1			5						5	5
84.	Kubišová Barbora	2.	GJGT BB	3	0	0	0	2	1		0			3	3

Výsledková listina

kategória ALFA, Bratislava

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k**$_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Hledík Michal	1.	GJH BA	1	9	9	9	9	9	7	4		45
1.	Winczerová Barbora	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	9	9	9	9			45
3.	Petrucha Jaroslav	1.	GMet BA	1	9	9	9	8			9		44
4.	Heželyová Ivana	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	9	7	9				43
4.	Smolík Michal	1.	Gamča BA	2		9	9	9	9	7	5		43
6.	Kossaczká Marta	1.	Gamča BA	2		9	9		9	9	6		42
7.	Krajčovič Matej	1.	GJH BA	1	9	9	6	6	8	9	2		41
7.	Smolík Martin	1.	Gamča BA	2		9	9	7	9	7			41
7.	Smolík Milan	1.	Gamča BA	2		9	9	8	9	6	5		41
10.	Vlachynská Petra	2.	GBil BA	3			9	9	9	6	5		38
11.	Pellerová Daniela	1.	Gamča BA	2		9	9		9	5	5		37
12.	Páleník Jakub	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	6			7	4		35
13.	Rabatin Branislav	1.	GJH BA	1		9	9	4	9	2	2		33
14.	Šteis Lukáš	1.	ŠPMNDG BA	1	9	6	4	8		4			31
14.	Žitňanský Tomáš	1.	GJH BA	1	9	5	9	7	1				31

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	k_α	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
16.	Bliznakovová Kristína	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	5	4	2	2	3		30
16.	Kormaník Ján Michael	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	5	5	2	2			30
16.	Řehořka Patrik	1.	GJH BA	1	8	9	6	2	0	5	2		30
19.	Stríbrnský Branislav	1.	GJH BA	1	9	9		8		1			27
20.	Krajčovič Michal	1.	GJH BA	1	1	8	8	5		4			26
20.	Spustová Karolína	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9		6			2		26
22.	Pavlovič Tomáš	1.	GJH BA	1	9	4	3	6		1			23
23.	Majdán Tomáš	1.	GJH BA	1	7	7	1	2		1			18
24.	Múčková Nikola	1.	GJH BA	1	9	0	7			1			17
25.	Bock Michal	1.	Gamča BA	2				6	9				15
25.	Šimek Lukáš	1.	GJH BA	1	0	9	1	5					15
27.	Kakaš Richard	1.	GJH BA	1	9		1		2		2		14
27.	Zorgovská Klaudia	1.	GCSL BA	1		6	1	4		1	2		14
27.	Šmid Peter	1.	GJH BA	1	6	8							14
30.	Holíková Zuzana	1.	GCSL BA	1	1	7	1	1		1	2		12
30.	Matlovič Tomáš	1.	GJH BA	1	0	9	1	2					12
30.	Zelenák Fero	1.	GJH BA	1	9	0	1	2					12
33.	Harmanová Dominika	3.	GJH BA	3					3		7		10
34.	Nakhlé A.	1.	GJH BA	1	4	0	0	5					9

kategória ALFA, západ

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	k_α	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Szabó Tomáš	2.	GAV LV	2		9		9	9		6		33
2.	Cibulka Samuel	1.	GAV LV	1	9	9	9	4					31
2.	Mariš Andrej	2.	PiarG NR	2			9	7	9	2	4		31
4.	Kováčová Milada	1.	GCM NR	1	9	9		4					22
5.	Pločeková Andrea	3.	GPdC PN	3			8		1	7	4		20
6.	Mészárošová Lucia	3.	GGol NR	3					7	3	3		13

kategória ALFA, stred

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	k_α	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Komanová Kristína	1.	GAS BB	1	9	9	9	8	9	7	5		44
1.	Santer Martin	1.	GMH Trstená	1	9	9	9	8	9				44
3.	Nociarová Jela	1.	GBST LC	1	9	9		8	9		5		40
4.	Benešová Katarína	1.	GAS BB	1	9	9	9	9		3	2		39
4.	Macko Vladimír	1.	GĽŠ ZV	1	7	9	9	9	2		5		39
4.	Surovčík Juraj	1.	GPOH DK	1		9	9	7	9	5	3		39
7.	Šubjak Ján	1.	GPOH DK	1		9	8	9	9		3		38
8.	Turčanová Terézia	1.	GĽŠ ZV	1	9	9	6	9			2		35
9.	Branická Eva	3.	CirGKP ZA	3	9	9	6	6	8	1	3		24
10.	Melošová Veronika	1.	GJCh BR	1	2	9	1	5	4	2	2		22
11.	Plavák Dušan	3.	GMH Trstená	3				9		6			15
12.	Búlik Martin	3.	GJGT BB	3					2				2
12.	Kubišová Barbora	2.	GJGT BB	3					0	0	2		2
12.	Neradný Matej	2.	GJGT BB	3					0	0	2		2

kategória ALFA, východ

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Batmendijn Eduard	-1.	ZŠsvCM SL	-1	9	9	9	9		9			45
1.	Vodička Martin	1.	GAlej KE	2		9	9	9	9	9	9		45
3.	Hlaváčik Matúš	1.	GAlej KE	2		9	9	9		8	6		41
3.	Tokárová Natália	1.	GJAR PO	1	9	9	6	8	9	2	3		41
5.	Machalová Katarína	1.	ZŠŠmer PO	1	7	9	9	9		6	6		40
6.	Šafin Jakub	1.	GPH MI	1	9	9	9	2	4	6	3		37
7.	Semanišinová Denisa	1.	GAlej KE	2		9	9	7	9		2		36
8.	Hanzely Filip	1.	GAP SB	1	9	9	4	9			4		35

Výsledková listina

kategória GAMA

Por.	Meno	Roč.	Škola	10	11	12	13	14	p	$\sum$
1.	Bachratý Martin	4.	GVO ZA	9	9	7				25
2.	Hagara Michal	4.	GJH BA	9	5	3				17
3.	Hozza Ján	3.	GJH BA	9	3	0	2	1		15
4.	Sládek Filip	4.	GAB NO	9	9	7	7	7		39
5.	Vavrík Boris	3.	GJH BA	8	0	0	0	1		9
6.	Šafin Jakub	1.	GPH MI	1	1	0	0	0		2