Vzorové riešenia 3. série zimnej časti KMS 2010/2011

Úloha č. 1: *Katka chodí na brigádu vetrať izby do hotela. Je v ňom jedna chodba s desiatimi izbami vedľa seba, ktoré sú očíslované postupne od 1 do 10. V prvý deň Katka otvorila okno vo všetkých izbách. Druhý deň v každej druhej izbe okno zavrela, pričom začala zatvárať v izbe číslo* 2*. Tretí deň, začínajúc od izby číslo* 3*, vošla do každej tretej izby a ak tam bolo okno zavreté, tak ho otvorila. Ak bolo otvorené, tak ho zavrela. Takto pokračovala každý deň až do konca svojej 10-dňovej brigády. Koľko okien ostalo po jej odchode otvorených? Podobnú, ale 100-dňovú brigádu si zohnal Jefo v moteli, kde je jedna chodba so* 100 *izbami. Koľko okien zostalo otvorených po ňom?*

Riešenie: (opravovala Kika)
Katkina brigáda sa dá ľahko nakresliť, jej riešenie zvládli všetci, ktorí sa o to aspoň pokúsili. Preto sa v tomto riešení budeme venovať hlavne Jefovej brigáde.
Čo môže ovplyvniť to, či je okno na konci otvorené alebo zatvorené? Záleží iba na tom, či bol Jefo v izbe párny alebo nepárny počet krát. Ak bol v izbe nepárny počet krát, okno zostalo otvorené, a naopak. Preto je dôležité zistiť, koľkokrát bol Jefo v každej izbe.
Vieme, že n-tý deň vošiel do všetkých izieb, ktoré sú násobkami čísla n (napríklad 4. deň vošiel do izieb s číslami $4, 8, 12, 16\dots$ – do izieb, ktorých čísla sú násobkami štvorky). Do každej izby teda vstúpil práve v tie dni, ktoré sú jej deliteľom (napr. do izby číslo 18 vstúpil $1., 2., 3., 6., 9.$ a 18. deň). Inak povedané, do každej izby vstúpil toľkokrát, koľko má jej číslo deliteľov.
Zostáva nám zistiť, ktoré izby majú párny, a ktoré nepárny počet deliteľov.
Zoberieme si nejaké čísla čísla Y a X, kde X je deliteľom čísla Y. Potom vieme, že Y má okrem deliteľa X určite aj deliteľa (Y/X). Takto to vyzerá, že každé Y má párny počet deliteľov — ku každému X existuje aj jeho dvojička Y/X, ktorá tiež delí Y. Pri väčšine čísel to tak skutočne aj je. Výnimku tvoria druhé mocniny. Vtedy existuje taký deliteľ X, že $X = Y/X$ a $Y = X^2$. Za túto dvojičku započítame len jedného deliteľa, nie dvoch.
Takže čísla, ktoré sú druhou mocninou nejakého prirodzeného čísla, majú nepárny počet deliteľov a tieto izby budú mať na konci otvorené okno. Po Katkinej brigáde to boli izby $1, 4$ a 9, čiže dokopy 3 okná. Po Jefovej brigáde zostalo otvorených 10 okien.

Úloha č. 2: *Filip písal písomku a mal na nej otázky z algebry, geometrie a logiky. Každú otázku na písomke zodpovedal buď dobre alebo zle. Neexistuje čiastočne správna odpoveď. Vieme, že zvládol dobre zodpovedať* 50% *otázok z algebry,* 70% *otázok z geometrie a* 80% *otázok z logiky. Vieme ešte, že algebru a logiku spolu zvládol na* 62% *a geometriu spolu s logikou zvládol na* 74%*. Koľko percent všetkých otázok mal Filip dobre?*

Riešenie: (opravovali Kamila a Katka J.)
Na začiatku si označíme neznáme, ktoré nám v príklade vystupujú: a je celkový počet úloh z algebry, g z geometrie a l z logiky. My máme za úlohu vypočítať, koľko percent dostal Filip dokopy za celý test, teda pomer počtu všetkých jeho správnych odpovedí a počtu všetkých otázok dokopy, prenásobený stomi. Toto číslo si označme x.
Teraz si poďme vyjadriť počty správnych odpovedí z jednotlivých tém:

- z algebry mal správne 50% odpovedí, teda $5a/10$,
- z geometrie mal správne 70% odpovedí, čo je $7g/10$,
- z logiky mal správne 80% odpovedí, teda $8l/10$.

Ďalej môžeme zo zadania vyčítať počet percent z niektorých dvoch tém dokopy. Interpretovať sa to dá znovu tak, že toto číslo nám udáva pomer Filipových správnych odpovedí z daných dvoch tém a počtu otázok z oboch tém dokopy, prenásobený stomi. Z algebry a logiky mal dokopy 62%, z geometrie a logiky 74%. Počet správnych odpovedí za obe oblasti dokopy môžeme napísať (naľavo pomocou počtu za jednotlivé oblasti; napravo pomocou percent za tieto dve oblasti dokopy):

$$\frac{5}{10}a + \frac{8}{10}l = \frac{62}{100}(a + l) \tag{1}$$

a
$$\frac{7}{10}g + \frac{8}{10}l = \frac{74}{100}(g + l). \tag{2}$$
Po ďalších úpravách dostaneme z rovnice (1) $a = 3l/2$ a z rovnice (2) $g = 3l/2$. Keďže x je pomer počtu všetkých jeho správnych odpovedí a počtu všetkých otázok dokopy prenásobený stomi, zapíšme si to ako
$$100\frac{\frac{5}{10}a + \frac{7}{10}g + \frac{8}{10}l}{a + g + l} = x.$$
Keď dosadíme, čo sme si vyjadrili pre a a g, dostaneme
$$100\frac{\frac{5}{10} \cdot \frac{3l}{2} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3l}{2} + \frac{8l}{10}}{\frac{3l}{2} + \frac{3l}{2} + l}.$$
Teraz môžeme vykrátiť všetky l, pretože sa nachádzajú v každom člene v čitateli aj v menovateli. Potom dostaneme zložený zlomok
$$\frac{\frac{15}{20} + \frac{21}{20} + \frac{8}{10}}{\frac{8}{2}} \cdot 100 = x.$$
Po úpravách dostaneme, že $x = 65$, teda Filip zvládol odpovedať správne na 65% otázok z celej písomky.

<u>Úloha č. 3:</u> *Kika má na internáte zázračnú žehličku, ktorou sa dajú žehliť celé čísla. Ak sa ňou prežehlí párne číslo, zostane z neho polovica. Ak sa ňou prežehlí nepárne číslo, vznikne z neho číslo o 3 väčšie. Kika trikrát prežehlila číslo k a dostala číslo m. Koľko rôznych k existuje, ak je m*

a) dané nepárne číslo?

b) dané párne číslo?

<u>Riešenie:</u> (opravoval Paľo a Kubo)
V tejto úlohe je dobré uvedomiť si isté skutočnosti, ktoré platia rovnako v prípadoch a) aj b).
Ak Kika prežehlí nepárne číslo, získa o 3 väčšie párne číslo. Ak prežehlí párne, získa jeho polovicu, čo môže byť číslo párne i nepárne. Nepárne číslo môže teda vzniknúť len prežehlením párneho čísla. Ak sme získali číslo m z nepárneho čísla, toto číslo muselo byť o tri menšie, teda $m - 3$. Podobne, ak sme číslo m získali prežehlením z párneho čísla, muselo byť toto číslo $2m$.
V skratke: Párne číslo môže vzniknúť dvoma spôsobmi – buď prežehlením párneho alebo nepárneho. Nepárne číslo určite vzniklo z párneho.
Teraz už vieme všetko dôležité, čo nám treba na vyriešenie úlohy. Žehlenia boli len tri, preto nebude ťažké si všetky možnosti rozpísať do stromu alebo prehľadnej tabuľky. My použijeme tabuľku. Začneme v ľavom hornom rohu s výsledným číslom m zo zadania a postupujeme smerom doprava. Do každého ďalšieho stĺpca napíšeme, z čoho mohlo vzniknúť číslo v predchádzajúcom stĺpci. Každé párne číslo nám tabuľku rozšíri o jeden riadok (mohlo vzniknúť z dvoch rôznych čísel). Nakoniec v poslednom stĺpci vidíme všetky možné čísla, ktoré keď trikrát prežehlíme, dostaneme číslo m. Tu je tabuľka pre prípad a), kde je m nepárne číslo.

m	2. žehlenie	1. žehlenie	k
m	2m	4m	8m
		↑ ←	4m-3
	↑ ←	2m-3	4m-6

V pravom stĺpci vidíme tri riešenia úlohy a). Ešte treba overiť, či nejde o rovnaké čísla, len iným spôsobom zapísané. Po úvahách o ich zvyškoch po delení štyrmi usúdime, že ide o tri rôzne čísla a ideme riešiť časť b). Ale písať to sem už nebudeme, lebo šikovný riešiteľ to hravo zvládne sám.

<u>Úloha č. 4:</u> *Edo si myslí prirodzené číslo n väčšie ako 18 také, že $n-1$ aj $n+1$ sú prvočísla. Hago tvrdí, že Edovo číslo má aspoň 8 rôznych kladných deliteľov (jednotka a samotné číslo n sa samozrejme rátajú tiež). Má Hago pravdu? Svoju odpoveď zdôvodnite.*
<u>Riešenie:</u> (opravoval Mojo a Beren)
Na začiatok by sa hodilo nájsť zopár čísel, ktoré určite delia n. Jedným z nich je určite jednotka. Keďže jediné párne prvočíslo je 2, tak $n - 1$ ani $n + 1$ nie sú párne, a teda n je párne. Tým sme našli ďalšieho deliteľa, číslo 2. Analogicky číslo 3 je jediné prvočíslo deliteľné troma. Preto $n - 1$ ani $n + 1$ nie sú deliteľné trojkou. A keďže práve jedno z troch po sebe idúcich čísel je deliteľné 3 (rozmyslite si prečo), tak n je deliteľné číslom 3. Keďže n je deliteľné 2 aj 3, tak je deliteľné aj 6. Teraz už máme štyroch deliteľov čísla n: 1, 2, 3 a 6. Už len potrebujeme dokázať, či existujú aj iné štyri delitele. Tu je niekoľko spôsobov, ako to urobiť.

Prvý spôsob: K už nájdeným deliteľom prislúchajú aj ich „dvojičky“. K jednotke prislúcha n, k dvojke $n/2$, k trojke $n/3$ a k šestke $n/6$. Teraz ešte musíme overiť, či sa žiadne dva delitele nerovnajú. A ak sa náhodou rovnajú, musíme zistiť, či neexistujú iné, ďalšie delitele. Platí $1 < 2 < 3 < 6$, preto platí aj $n/6 < n/3 < n/2 < n$. Ak by bolo $n/3 = 6$, tak by platilo $n = 18$, čo podľa zadania neplatí. Ak by bolo $n/6 = 3$, tak by opäť platilo $n = 18$. Ak by sa rovnala iná dvojica čísel (okrem rovnosti $n/6 = 6$), n by bolo ešte menšie ako 18, čo zadanie vylučuje. A teda jediná rovnosť, ktorá nás trápi, je $n/6 = 6$. Avšak v takom prípade je jednak $n - 1 = 35$, čo nie je prvočíslo, a naviac 36 má viac ako 8 deliteľov.

Druhý spôsob: Rozoberme dva prípady:

1. Číslo n je deliteľné ešte nejakým iným prvočíslom ako 2 a 3. Toto prvočíslo si nazvime p. Potom máme 8 rôznych deliteľov čísla n: 1, 2, 3, 6, p, $2p$, $3p$ a $6p$.
2. Číslo n má len dva prvočíselné delitele: 2 a 3. Potom je však n deliteľné číslom $2 \cdot 3^3 = 54$ alebo $2^3 \cdot 3 = 24$ alebo $2^2 \cdot 3^2 = 36$. Ak by totiž naše n nebolo deliteľné ani jedným z vyššie uvedených čísel, tak by bolo rovné maximálne $3^2 \cdot 2 = 18$. Avšak podľa zadania platí $n > 18$. Ukázať, že čísla 54, 24 a 36 majú aspoň osem rôznych deliteľov nechávame na čitateľa.

Záver: Ukázali sme, že HAgO má pravdu a číslo n má aspoň osem rôznych deliteľov a celí natešení môžeme ísť stavať von snehuliaka.

Úloha č. 5: *Na tabuli je narysovaných* 5 *kružníc,* 7 *štvorcov a* 9 *trojuholníkov, pričom žiadne dva z týchto útvarov nemajú spoločný bod. Marek a Paľo sa hrajú hru, v ktorej striedavo robia ťahy. Urobiť ťah znamená zotrieť ľubovoľné dva obrazce a nahradiť ich jedným novým. Nový útvar sa na tabuľu nakreslí tak, aby so žiadnym iným útvarom na tabuli nemal spoločný bod. V jednom ťahu možno nahradiť*

- *dve kružnice kružnicou,*
- *dva trojuholníky štvorcom,*
- *kružnicu a trojuholník trojuholníkom,*
- *dva štvorce trojuholníkom,*
- *kružnicu a štvorec štvorcom,*
- *štvorec a trojuholník kružnicou.*

Paľo vyhrá, ak výsledkom bude štvorec. Marek vyhrá, ak na tabuli zostane trojuholník. Ukážte, pre ktorého hráča existuje víťazná stratégia, ak hru začína Marek. Popíšte túto stratégiu.
Poznámka: Nájsť víťaznú stratégiu znamená popísať postupnosť krokov, ktorá zaručí jednému z hráčov víťazstvo, ak druhý hráč hrá úplne ľubovoľne.

Riešenie: (opravoval JeFo a Marek)
Najskôr sa treba zamyslieť nad tým, či vôbec táto hra skončí po konečnom počte ťahov a či na konci bude na tabuli práve jeden útvar. Ľubovoľný z hráčov môže potiahnuť, ak sú na tabuli aspoň 2 útvary. Pre ľubovoľnú dvojicu útvarov totiž existuje pravidlo, na čo sa majú tieto útvary zmeniť. Preto pre hráča, ktorý je na rade, vždy existuje nejaký ťah. Zároveň sa s každým ťahom zníži počet útvarov na tabuli o jeden. Vieme preto povedať, že hra skončí po 20 ťahoch, lebo na jej začiatku je na tabuli 21 útvarov. Hra má teda dobre definované pravidlá, môžeme začať úlohu riešiť.
Pri riešení úloh, kde sa robia nejaké ťahy, sa oplatí hľadať niečo, čo sa nemení, čo ostáva rovnaké po každom ťahu (hovorí sa tomu *invariant*). Napríklad už aj to, že po každom ťahu sa počet útvarov zmenší o jeden, je invariant.
Poďme teraz preskúmať vzťah počtu štvorcov a trojuholníkov na tabuli. Konkrétne si všimnime, ako sa môže meniť ich rozdiel, teda počet štvorcov mínus počet trojuholníkov na tabuli – označíme si ho R. Môže sa zmenšiť o 3, zväčšiť o 3, alebo zostať rovnaký. Napríklad ak nahradíme 2 štvorce trojuholníkom, počet štvorcov sa zmenší o 2 a počet trojuholníkov sa zväčší o 1. R sa v tomto prípade zmenší o 3, ostatné prípady si vyskúšajte sami. Zistili sme, že R dáva stále rovnaký zvyšok po delení tromi, a to je ten náš invariant (zvyšok, ktorý sa nemení).
Na začiatku je R rovné -2. Jeho zvyšok po delení tromi je 1 (lebo $-2 = 3.(-1) + 1$), preto musí byť aj na konci zvyšok R po delení tromi rovný jednej. Na konci je ale na tabuli už len jeden útvar, preto R (rozdiel počtu štvorcov a trojuholníkov) môže byť buď -1, 0, alebo 1 (rozmyslite si, kedy je aký). Zároveň zvyšok R po delení tromi musí byť jedna. To platí iba keď $R = 1$. Preto na tabuli zostane štvorec.
Nech teda obaja hráči hrajú akokoľvek, na tabuli ostane vždy štvorec, takže vždy vyhrá Paľo. Preto Paľo nepotrebuje špeciálnu víťaznú stratégiu, môže hrať akokoľvek.

Úloha č. 6: *Nech n je prirodzené číslo také, že $3^n + 3^{n+1} + \cdots + 3^{2n}$ je druhá mocnina prirodzeného čísla. Ukážte, že n je deliteľné štyrmi.*

Riešenie: (opravovala Katka :P)
Začneme tým, že si trochu upravíme výraz zo zadania. Pridáme tam aj spomínanú druhú mocninu, ktorej sa to má rovnať a následne to sčítame pomocou vzorca na súčet geometrickej postupnosti. To, že tento vzorec platí, nebolo v riešení treba dokazovať, hoci niektorí z Vás si tú námahu dali :) Dostaneme vzťahy

$$3^n(3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^n) = a^2 \qquad (3)$$

a

$$\frac{3^n(3^{n+1}-1)}{2}=a^2. \tag{4}$$

Vo vzťahu (3) si hneď všimneme, že zátvorka $(3^0+3^1+3^2+\dots 3^n)$ nie je deliteľná troma. Preto ak sa má pravá strana má rovnať ľavej, n musí byť párne (aby výraz 3^n bol po odmocnení celé číslo). Keďže 3^n je druhou mocninou prirodzeného čísla, musí ňou byť aj $(3^{n+1}-1)/2$, aby ako súčin dávali a^2. Poďme teda zistiť, aké iné vlastnosti, okrem toho, že je párne, ešte n musí mať, aby spomínaný zlomok bol tiež druhou mocninou prirodzeného čísla, tj. aby platilo

$$(1+3+3^2+\dots+3^n)=b^2. \tag{5}$$

V súčte $(1+3+3^2+\dots+3^n)$ máme $n+1$ sčítancov. Keďže n je párne, b^2 je súčtom nepárneho počtu nepárnych čísel – bude určite nepárne. Trochu si upravíme rovnicu (5) a dostaneme

$$3(1+3+3^2+\dots+3^{n-1})=b^2-1, \tag{6}$$

čo vieme ešte upraviť na

$$3(1+3+3^2+\dots+3^{n-1})=(b+1)(b-1). \tag{7}$$

Keďže b je nepárne, čísla $(b+1)$ aj $(b-1)$ budú párne. Z toho vieme, že obe sú deliteľné dvoma. Navyše, sú to dve po sebe idúce párne čísla, preto jedno z nich je deliteľné štyrmi. Napokon, ich súčin bude deliteľný ôsmimi, takže aj ľavá strana, výraz $(1+3+3^2+\dots+3^{n-1})$ bude deliteľný ôsmimi. Teraz využijeme známu a veľmi užitočnú vlastnosť mocnín prirodzených čísel, a to tú, že ich zvyšky po delení nejakými číslami sa zvyknú opakovať. (Tu prichádza chvíľa, keď si to vyskúšate na papier, napríklad, aké zvyšky dávajú mocniny štvorky po delení piatimi.) My si všimneme, že mocniny trojky dávajú po delení ôsmimi len zvyšok 1 alebo 3, a to striedavo. Samozrejme, súčet mocnín trojky bude deliteľný ôsmimi vtedy, ak súčet zvyškov týchto mocnín bude deliteľný ôsmimi. V zátvorke $(1+3+3^2+\dots+3^{n-1})$ máme n čísel, z ktorých polovica dáva zvyšok 1 a polovica zvyšok 3. Dokopy je to deliteľné ôsmimi. Vieme si teda napísať

$$1\frac{n}{2}+3\frac{n}{2}=8k,$$

čo následne upravíme na

$$4\frac{n}{2}=8k,$$

na základe čoho dostaneme, že $n=4k$. Hotovo.

Iné riešenia: Vyskytli sa aj iné zaujímavé riešenia, ktoré tu len naznačím. Niektorí z Vás dokázali deliteľnosť štyrmi tak, že skúmali posledné cifry druhých mocnín a porovnávali ich s poslednými ciframi zlomku z rovnosti (4). Iní skúmali podobným spôsobom zvyšky po delení piatimi. Ak ste zvedaví, ako sa takýmto porovnávaním dá dopracovať k výsledku, skúste si to :)

Komentár: S úlohou ste si poradili veľmi pekne, vyskytlo sa veľa rôznych správnych riešení.

Úloha č. 7: *Nech $x,\ y,\ z$ sú reálne čísla také, že $0<x,\ y,\ z<1$, a platí $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$. Dokážte, že aspoň jedno z čísel $(1-x)y,\ (1-y)z,\ (1-z)x$ je väčšie ako alebo rovné $1/4$.*

Riešenie: (opravoval Cvrki a Ondro)
Prvá dôležitá vec, ktorú si môžeme všimnúť, je zjavný fakt, že aj čísla $(1-x)$, $(1-y)$, $(1-z)$ sú väčšie ako nula a menšie ako jedna. Tým pádom aj súčin ľubovoľnej dvojice z čísel $(1-x)$, $(1-y)$, $(1-z)$, x, y, z bude väčší ako nula a menší ako jedna. Teraz by nám mala udrieť do očí dôležitosť čísla $1/2$.
Prečo? Nuž za prvé, $x<1/2$ práve vtedy, keď $(1-x)\geq 1/2$, obdobne $x\geq 1/2$ práve vtedy, keď $(1-x)<1/2$. To isté platí aj pre čísla y a z. Po druhé, ak máme nejaké dve reálne čísla a, b z intervalu $(0,1/2)$, pre ich súčin platí $0<ab<1/4$. Teraz sa už môžeme pustiť do samotného riešenia.
Poďme najskôr využiť fakt, že $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$. Z neho vyplýva, že aspoň jedno z čísel x, y, z je väčšie alebo rovné jednej polovici. Ak by to neplatilo, tak čísla x, y, z sú menšie ako jedna polovica, z čoho ale vyplýva, že $(1-x)$, $(1-y)$, $(1-z)$ sú väčšie alebo rovné jednej polovici. Potom $xyz<(1/2)^3\leq(1-x)(1-y)(1-z)$, čiže $xyz<(1-x)(1-y)(1-z)$, čo je v spore so zadaním.

Platí teda, že aspoň jedno z čísel x, y, z je väčšie rovné jednej polovici. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $x\geq 1/2$. Potom $(1-x)<1/2$. Poďme sa pozrieť na hodnotu čísla $(1-z)$.

- Ak $(1-z)\geq 1/2$, tak $(1-z)x\geq 1/4$ a máme vyhrané.

- Ak $(1-z) < 1/2$, tak potom $z \geq 1/2$.
  - Ak $(1-y) \geq 1/2$, tak $(1-y)z \geq 1/4$ a znova sme dospeli k tomu, čo sme chceli dokázať.
  - Ak $(1-y) < 1/2$, tak potom $y \geq 1/2$.

Zostáva nám overiť poslednú možnosť, kedy $x \geq 1/2$, $y \geq 1/2$ a $z \geq 1/2$. Potom platí $(1-x) < 1/2$, $(1-y) < 1/2$ a $(1-z) < 1/2$. Dostávame $(1-x)(1-y)(1-z) < (1/2)^3 \leq xyz$, teda $(1-x)(1-y)(1-z) < xyz$, čo je v spore zo zadaním.
Tým pádom posledná situácia nemôže nastať, takže nastane jedna z predošlých možností, kde bolo vždy aspoň jedno z čísel $(1-x)y$, $(1-y)z$, $(1-z)x$ väčšie alebo rovné $1/4$.

Úloha č. 8: *Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel x a y, pre ktoré platí*

$$x^2 = 4y + 3[x, y],$$

kde $[x, y]$ značí najmenší spoločný násobok čísel x a y.
Riešenie: (opravoval Myrec)
S najmenším spoločným násobkom sa pracuje trochu neohrabane. Skúsime si to prepísať na najväčší spoločný deliteľ D, potom si zapíšeme $x = aD$, $y = bD$ a $[x, y] = abD$. Je známe, že a a b musia byť nesúdeliteľné, aby D bol najväčší spoločný deliteľ x a y. Čiže rovnica bude vyzerať takto:

$$(aD)^2 = 4bD + 3abD.$$

Pár ekvivalentných úprav (D je kladné):

$$a^2D = b(4 + 3a).$$

Teraz sa pozrime na deliteľnosť. Pravá strana rovnice je deliteľná b, tak aj ľavá musí byť deliteľná b. Preto b musí deliť D, $D = bk$. Z toho

$$a^2k = 4 + 3a.$$

Tu si všimneme, že a delí ľavú stranu a časť pravej strany. Chceme však, aby a delilo celú pravú stranu, a tým pádom a musí deliť 4. Teraz máme tri možnosti:

$a = 1$ $k = 4 + 3 = 7$, $D = 7b$ a $x = aD = 7b$, $y = bD = 7b^2$ pre ľubovoľné prirodzené b.

$a = 2$ $4k = 4 + 6 = 10$, $k = 2,5$, ale k musí byť prirodzené.

$a = 4$ $16k = 4 + 3 \times 4 = 16$, $k = 1$, $D = b$ a $x = aD = 4b$, $y = bD = b^2$, ale a a b nesmú byť súdeliteľné, takže b nesmie byť párne.

Existujú teda dva druhy riešení.

Úloha č. 9: *Nech $a_1, a_2, \ldots, a_{18}$ je osemnásť rôznych čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 82\}$. Dokážte, že existuje prirodzené číslo k také, že rovnosť $a_i - a_j = k$ je splnená pre aspoň tri rôzne dvojice (i, j).*
Riešenie: (opravovala Hanka a Hago)
(podľa Andreja Kozáka) Na poradí vybratých čísel nezáleží, takže si môžeme BUNV[1] povedať, že sú zoradené od najmenšieho po najväčšie.

$$a_1 < a_2 \cdots < a_{18}$$

Budeme dokazovať sporom. Predpokladajme, že pre každé k je rovnosť $a_i - a_j = k$ splnená maximálne pre dve dvojice (i, j). Vezmime si rozdiely medzi „susednými" číslami (tvaru $a_{i+1} - a_i$), takých je 17 a ich súčet bude rozdiel medzi prvým a posledným, teda $a_{18} - a_1$. Vezmime si aj rozdiely medzi „susednými nepárnymi" číslami (tvaru $a_{2k+1} - a_{2k-1}$), takých je 8 a ich súčet bude rozdiel $a_{17} - a_1$. Ak mi neveríte, skúste si to premyslieť. Dohromady máme teda 25 rozdielov. Nakoľko sa každé číslo medzi nimi nachádza maximálne dvakrát (náš predpoklad), tak ich súčet (označme ho S), je minimálne

$$S \geq 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + \cdots + 12 + 12 + 13 = 169.$$

Vieme, že $S = (a_{18} - a_1) + (a_{17} - a_1)$. Keďže maximálny možný rozdiel dvoch čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 82\}$ je 81, tak $S \leq 81 + 81 = 162$. Dostávame spornú nerovnosť $162 \geq S \geq 169$. Náš predpoklad teda nemôže byť pravdivý, takže platí tvrdenie zo zadania. Citujem: *„Koniec, skapal pes, jednoducho 3 rovnaké rozdiely tu vždy boli, sú a budú a nikto s tým nič nespraví."*

[1] bez ujmy na všeobecnosti

Iné riešenie:
Tiež BUNV[1] nech sú vybraté čísla usporiadné a tiež ideme sporom. Z podobných úvah ako v prvom riešení (len si nezoberieme tie druhé rozdiely) sa dá zistiť, že rozdiely medzi „susednými“ číslami sú v nejakom poradí čísla

$$1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 6,\ 6,\ 7,\ 7,\ 8,\ 8,\ 9.$$

Všimnime si, že rozdiel $a_{i+2} - a_i$ sa dá zapísať ako súčet rozdielov $(a_{i+2} - a_{i+1}) + (a_{i+1} - a_i)$. Teraz rozoberaním prípadov, ako môžu byť umiestnené tieto rozdiely „susedných“ čísel, aby sa s rozdielmi $a_{i+2} - a_i$ neobjavilo nejaké číslo tretíkrát, rýchlo zistíme, že takéto rozmiestnenie neexistuje.
Možno oproti prvému riešeniu vyzerá neohrabanejšie, ale je dosť možné, že človeka napadne zaoberať sa „susednými“ rozdielmi, ale „nepárnymi susednými“ už nie.

Poznámka: Niektorí z Vás sa ešte pokúšali dostať k riešeniu inak. Počet všetkých kladných rozdielov (záporné sú v absolútnej hodnote rovnaké) je 153. Počet všetkých možných kladných rozdielov na množine $\{1,\ 2,\ \dots,\ 82\}$ je 81, čiže ak je z nich aspoň 10 takých, že sa rovnajú $a_i - a_j$ maximálne raz, tak sa jeden musí rovnať aspoň trikrát. Takéto niečo sa však ťažko uchopuje, keď nepoznáme $a_1,\ a_2, \dots,\ a_{18}$, pretože nevieme všeobecne, ktorých 10 by to malo byť.

Úloha č. 10: *Nájdite všetky funkcie*[2] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *spĺňajúce*

$$f(x^2 + yf(z)) = xf(x) + zf(y)$$

pre ľubovoľné reálne čísla $x,\ y,\ z$.

Riešenie: (opravoval Edo, Kubo)
V zadaní máme nejakú funkcionálnu rovnicu. Čo s takou rovnicou môžeme robiť? Keďže táto rovnica musí platiť pre všetky reálne čísla $x,\ y,\ z$, tak musí platiť aj pre nami zvolené konkrétne hodnoty $x,\ y,\ z$. Takže si môžeme za $x,\ y,\ z$ ľubovoľne dosádzať. Pre jednoduchší zápis sa dohodneme, že (x, y, z) budeme brať, ako usporiadanú trojicu a teda ak chceme dosadiť za $x = a$, $y = b$, $z = c$, tak napíšeme iba $(x, y, z) = (a, b, c)$.
Ako si mnohí z Vás všimli, ak $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, tak dostávame $f(0) = 0$. Teda vieme, že pre všetky funkcie spĺňajúce zadanie platí: $f(0) = 0$.
Po tomto zistení si väčšina z Vás všimla, že funkcia $f(x) = 0$, teda funkcia konštantne rovná nule, po dosadení vyhovuje zadaniu. Preto ju môžem prehlásiť za jedno z riešení a budem hľadať iba riešenia, v ktorých existuje také x, že $f(x) \neq 0$.
Nech teraz pre nejaké $k \neq 0$ platí $f(k) \neq 0$. Potom dosadíme do pôvodnej rovnice $(x, y, z) = (0, k, z)$ tak dostávame vzťah:

$$f(k \cdot f(z)) = z \cdot f(k) \tag{8}$$

Zo vzťahu (8) sa dá už celkom jednoducho ukázať, že funkcia f musí byť prostá[3]. Predpokladajme, že pre nejaké a, b platí: $f(a) = f(b)$. Potom určite aj $k \cdot f(a) = k \cdot f(b)$, a teda $f(k \cdot f(a)) = f(k \cdot f(b))$. Dosadením vzťahu (8) za ľavú aj pravú stranu dostávame: $a \cdot f(k) = b \cdot f(k)$. Keďže $f(k) \neq 0$, tak to platí jedine ak $a = b$. Teda vieme, že všetky funkcie spĺňajúce zadanie, okrem konštantnej nuly, sú prosté.
Už sa pomaličky blížime ku koncu dôkazu. Dosaďme teraz do pôvodnej rovnice $(x, y, z) = (-x, -x, x)$. Dostávame:

$$f(x^2 - xf(x)) = -xf(-x) + xf(-x) = 0 \cdot f(-x) = 0$$

Keďže vieme, že $f(0) = 0$ a že hľadaná funkcia je prostá, tak určite musí platiť $x^2 - xf(x) = 0$. Z čoho pre $x \neq 0$ jednoduchou úpravou dostaneme $f(x) = x$. Pretože aj $f(0) = 0$, tak sme dostali, že ak naša funkcia nie je konštantná nula, tak to musí byť $f(x) = x$ pre $\forall x \in \mathbb{R}$.
Posledná vec, na ktorú nesmieme zabudnúť, je overenie, že $f(x) = x$ naozaj vyhovuje zadaniu. Po dosadení zistíme, že vyhovuje a sme šťastní, že sme našli všetky riešenia a to funkcie $f(x) = x$ a $f(x) = 0$.

Úloha č. 11: *Nech* $n \geq 2$ *a* k *sú prirodzené čísla. Rozostavíme* n *kružníc v rovine tak, že každé dve kružnice sa pretínajú v práve dvoch rôznych bodoch a žiadne tri kružnice sa nepretínajú v rovnakom bode. Každý priesečník musí byť ofarbený práve jednou z* n *rôznych farieb. Každá z* n *farieb musí byť použitá aspoň raz a na každej kružnici môžu ležať len priesečníky práve* k *rôznych farieb. Nájdite všetky dvojice* (n, k)*, pre ktoré existuje takéto rozmiestnenie a ofarbenie kružníc.*

Riešenie: (opravoval Petržlen)
Krátky komentár na začiatok: Táto úloha nevyžadovala veľký nápad. Bola poskladaná z viacerých menších častí. Napriek tomu prišlo rekordne málo riešení a teda dúfam, že si všetci tento vzorák prečítajú. Aj kvôli tomu je tento vzorák skôr návodom ako vzorovým riešením.

Ako to už v podobných úlohách býva, išlo o to:

[2] Ak sa s úlohou tohto typu stretávate prvýkrát, odporúčame vám prečítať si texty o funkcionálnych rovniciach na adresách `atrey.karlin.mff.cuni.cz/~franta/files/bakalarka.pdf` či `kms.sk/docs/funkcionalky.pdf`.
[3] Funkcia f je prostá, ak pre ňu platí, že $f(a) = f(b)$ implikuje $a = b$.

- 1. Určiť nejaké nutné podmienky pre (n, k). Konkrétnejšie ak $n > 3$ tak $n \geq k \geq 3$.
- 2. Ukázať, že to pre vhodných nekonečno veľa prípadov ide (existuje rozostavenie a ofarbenie).
- 3. Algoritmicky skonštruovať ostatné prípady dané krokom 1. z pozícií kroku 2.

Bonus: Poriadny dôkaz a čo najjednoduchšia konštrukcia.

Ako si pozorný čitateľ isto všimol, je to vlastne ohraničenie riešenia a konštrukcia matematickou indukciou pre toto ohraničenie.

(*Riešenie inšpirované Martinom Vodičkom:*) Rozostavenie n kružníc tak, aby sa každé dve pretínali v práve dvoch bodoch existuje pre každé prirodzené n. Napríklad stredy na jednej priamke, rovnaký polomer a všetky majú navzájom rôzne vzdialenosti menšie ako priemer (týchto konštrukcií je nespočítateľne veľa).
Poznámka. V tomto momente bolo vhodné (nie nutné) spozorovať, že sa úloha dá redukovať na ofarbenie hrán kompletných grafov (s dvojitými hranami). Teda vrcholy sú kružnice, tie sú spojené hranou za každý spoločný priesečník (teda dve hrany medzi každými dvoma vrcholmi). Každý vrchol má hrany práve k rôznych farieb a rôznych použitých farieb na všetkých hranách je n. Na tejto reprezentácií sa dá lepšie vyjadrovať :)
A teraz poďme dokazovať:

- $k \neq 1$. Sporom - dokážte si sami.
- $k \leq n$. Sporom - dokážte si sami.
- $k \neq 2$ ak $n \geq 4$. Každá kružnica má priesečníky práve dvoch (rôznych) farieb. Nech jedna z kružníc má farby f_1 a f_2. Potom každá z kružníc má aspoň jednu farbu z f_1 a f_2. Ak napíšeme za sebou farby, ktoré používajú jednotlivé kružnice, tak sa tam bude vyskytovať f_1 a f_2 dokopy aspoň $n+1$ krát. Potrebujeme použiť ešte aspoň $n-2$ farieb. Každá z nich bude v postupnosti aspoň dvakrát (raz za jednu kružnicu a raz za druhú) a celá postupnosť má $2n$ členov. Vznikne nám nerovnosť: $2n \geq (n+1) + 2(n-2) = 3n-3$, čo je spor s $n \geq 4$.

Pre $(n, k) = (2, 2)$, $(3, 2)$ a $(3, 3)$ si každý poľahky skonštruuje vyhovujúce riešenie.
Odteraz sa zaoberáme len prípadom $n \geq 4$. Máme nutné (triviálne) ohraničenie $n \geq k \geq 3$. Ukážeme, že naozaj vyhovuje.
Dokonca pre $(n, 3)$ vieme skonštruovať riešenie také, že:
(1): každá kružnica k_i má priesečníky farieb f_i a f_1.
Najprv ofarbíme všetky priesečníky f_1. Potom, ak je priesečník na k_i a k_{i+1} tak ho ofarbíme f_{i+1}. Nakoniec priesečníky k_1 a k_n ofarbíme napr. farbou f_3. Pozorný čitateľ si isto všimol, že pre $(3, 3)$ sme (1) nemuseli splniť. Každý si ale vie skonštruovať také rozmiestnenie, ktoré bude našej podmienke vyhovovať.

Ďalej ukážeme, že z niektorých rozmiestnení vieme skonštruovať iné vyhovujúce rozmiestnenia.
(2): Ak (n, k) vyhovuje a spĺňa (1) tak existuje rozostavanie $(n+1, k+1)$ ktoré navyše spĺňa (1).
Pridáme novú kružnicu k_{n+1}. Práve jeden z priesečníkov k_i $(i < n+1)$ a k_{n+1} ofarbím f_{n+1}. Druhý z priesečníkov ofarbím f_i ak $i \geq k$ inak f_1. To, že k_{n+1} má $k+1$ farieb, vyplýva z ofarbenia f_{n+1} a použitia farieb f_1 až f_k. Po nakreslení na papier vidíme, že nové ofarbenie vyhovuje. Ostatným kružniciam sme pridali práve jednu novú farbu f_{n+1}. Prvá časť (1) platí, lebo sme použili f_{n+1} pre k_{n+1}. Druhá časť takisto, lebo k_{n+1} má priesečník farby f_1 napr. s kružnicou k_1.
A keďže pre všetky (n, k), $n \geq 4$ a $k \geq 3$ existujú a,b také že $(n, k) = (b+a, 3+a)$ tak a-násobným aplikovaním (2) na $(b, 3)$ máme konštrukciu pre (n, k).
Úplný výsledok. Rozmiestnenie existuje pre $(2, 2)$, $(3, 2)$ a (n, k) kde $n \geq k \geq 3$ a $n \geq 3$.

Komentár na koniec. Existuje samozrejme veľa iných riešení, ale postupy sú veľmi podobné. V tejto úlohe sa dalo urobiť veľa pozorovaní a dospieť k čiastočným výsledkom. Niektorí z Vás to dokonca spísali a poslali. Síce pre celkové riešenie bolo treba mať a pospájať celkom dosť pozorovaní, ale nič komplikované sme nepoužili. Ponaučenie do budúcnosti: ak neviete kombinatoriku, treba skúšať jednotlivé prípady a z nich odvodzovať všeobecnejšie pozorovania. Keďže je to časovo náročnejšie, tak si to nenechať na poslednú chvíľu :)

Úloha č. 12: *Všetky hrany v kvádri K majú vyjadrené v metroch prvočíselnú dĺžku. Jeho povrch vyjadrený v metroch štvorcových je mocnina prvočísla. Dokážte, že dĺžka práve jednej hrany kvádra K je tvaru $2^m - 1$ metrov, kde m je prirodzené číslo.*

Riešenie: (opravoval Petržlen, Filip)
Ospravedlňujeme sa za malú chybu v zadaní. Samozrejme, kváder nemôže mať práve jednu hranu dĺžky a, lebo má aspoň štyri hrany rovnakej dĺžky.
Úloha bola na pomery gamy ľahká a teda dôkaz tu uvedieme naozaj len v krátkosti.

$$S = 2(p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1) = p^n$$

Z toho hneď nutne $p = 2$, a teda zátvorka musí mať párny súčet. Pri skúmaní parity zátvorky dospejeme rozoberaním možností k tomu, že práve dve z čísel p_1, p_2 a p_3 sú párne prvočísla. Po spätnom dosadení máme $2^n = 2(4 + 4p_3)$, z čoho $2^{n-3} - 1 = p_3$. Keďže p_3 je zo zadania celé číslo, tak máme, čo sme chceli.

Úloha č. 13: *Súčet obsahov konečného počtu štvorcov je* $4\,\mathrm{m}^2$. *Ukážte, že tieto štvorce vieme umiestniť v rovine tak, aby dohromady pokryli štvorec so stranou* $1\,\mathrm{m}$. *Štvorce sa môžu aj prekrývať.*

Riešenie: (opravoval Petržlen, Filip)

Každý štvorec so stranou a zmenšíme na 2^x tak, aby $2^x \leq a \leq 2^{x+1}$ a $x \in \mathbb{Z}$. Obsah každého štvorca sme zmenšili nanajvýš štyrikrát, a teda celkový obsah nových štvorcov je aspoň $1\mathrm{m}^2$. To sme urobili preto, lebo sme pohodlní a môžeme si to dovoliť.
Keď jeden zo štvorcov má stranu väčšiu rovnú 1, tak sme hotoví. V opačnom prípade ich budeme umiestňovať od najväčšieho. Keď umiestňujeme nový štvorec so stranou 2^{-x}, tak si rozdelíme štvorec 1×1, kam umiestňujeme na mriežku $2^x \times 2^x$ a umiestnime nový štvorec na hocijaké voľné miesto v mriežke (tak, aby práve pokryl celý štvorček mriežky). Keď už nie je voľné miesto, tak sme hotoví. Keď už nemáme kam dať nový štvorec, tak sme hotoví preto, lebo sme doteraz umiestňovali aspoň tak veľké štvorce ako nový štvorec, a teda nemôže zostať nepokrytá časť mriežky menšia ako nový štvorec. To, že takáto situácia nastane, vyplýva z toho, že celkový obsah je aspoň jedna. Ešte sa ale treba pohrať s nekonečnom, lebo náš algoritmus pokrývania by mal byť konečný. Máme $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = x$. Triviálne $x \geq 1$. Nemôže nastať $x = 1$, lebo to by sme museli každý štvorec zmenšiť práve štyrikrát, čo nevyhovuje našej konštrukcii. Takže $x > 1$. Chceme ukázať, že neexistuje n také, že $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq 1$. To by ale znamenalo, že pre každé n je $\sum_{i=1}^{n} a_i < 1$, čo je spor s $x > 1$.
Poznámka. Jednému z vás sa podarilo vymyslieť identický dôkaz ako je vzorové riešenie, takže len tak ďalej. Prakticky boli všetky riešenia podobné, lebo bolo treba trocha upraviť vstupné štvorce, nájsť algoritmus, podľa ktorého ich budeme umiestňovať a nakoniec ukázať, že je správny a skončí v konečnom čase.

Úloha č. 14: *Nech* O *je bod vnútri trojuholníka* ABC *taký, že uhly* AOB, BOC *a* COA *majú rovnakú veľkosť. Dokážte, že platí*

$$\frac{|AO|^2}{|BC|} + \frac{|BO|^2}{|CA|} + \frac{|CO|^2}{|AB|} \geq \frac{|AO| + |BO| + |CO|}{\sqrt{3}}.$$

Riešenie: (opravoval Petržlen, Filip)

(*Podľa Le Anh Dunga*) Tomuto riešiteľovi sa podarilo využiť viaceré známe nerovnosti celkom priamočiarym spôsobom. Náš vzorák je vlastne kópiou jeho riešenia. Na otázku, odkiaľ to vie, je najlepšiou odpoveďou asi to, že český korešpondenčný seminár PraSe mal minulý rok kvalitný seminár o riešení nerovností - koho to zaujíma, odporúčame naštudovať na `http://mks.mff.cuni.cz/archive/29/9.pdf`.
Uhly AOB, BOC a COA sú rovnako veľké a keďže dokopy majú 360 stupňov, tak každý z nich má 120 stupňov.
Z kosínusovej vety máme:

$$|BC| = \sqrt{|BO|^2 + |CO|^2 - 2|BO||CO|cos120} = \sqrt{|BO|^2 + |CO|^2 + |BO||CO|}$$

$$|AC| = \sqrt{|AO|^2 + |CO|^2 + |AO||CO|}$$

$$|AB| = \sqrt{|AO|^2 + |BO|^2 + |AO||BO|}$$

Ak dosadíme nasledujúce vzťahy do zadania s použitím substitúcie $|AB| = a$,$|AC| = b$,$|BC| = b$, dostaneme ekvivalentnú nerovnosť:

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{\sqrt{b^2 + c^2 + bc}} \geq \frac{a + b + c}{\sqrt{3}}$$

Nech je ľavá strana P a z Hölderovej nerovnosti máme:

$$\left(\sum_{cyc} a^2(b^2 + c^2 + bc)\right) P^2 \geq (a^2 + b^2 + c^2)^3$$

A preto našim cieľom bude ukázať:

$$3(a^2 + b^2 + c^2)^3 \geq \left(\sum_{cyc} a^2(b^2 + c^2 + bc)\right) (a + b + c)^2$$

Čo zrejme vyplýva z nasledujúcich nerovností:

- Cauchy-Schwarz: $3(a^2 + b^2 + c^2) = (1 + 1 + 1)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$

- Muirheadová nerovnosť:

$$\sum_{cyc} a^4 \geq \sum_{cyc} a^2bc \Longleftrightarrow (a^2+b^2+c^2)^2 \geq \sum_{cyc} a^2(b^2+c^2+bc)$$

V jednom kroku Cauchy-Schwarza sme použili dve trojice čísiel a^2, b^2, c^2 a 1,1,1 a preto rovnosť nutne nastáva, keď $a=b=c$ tj. $|AO|=|BO|=|CO| \Leftrightarrow |AB|=|BC|=|CA|$. Skúškou zistíme, že je to naozaj prípad rovnosti.

Výsledková listina

kategória ALFA, Bratislava

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Kováčová Barbora	1.	ŠPMNDG BA	1	9	7	8	9	8				119
2.	Kurdelová Alžbeta	1.	ŠPMNDG BA	2		9	7	5		8			98
3.	Prívozník Matej	1.	GJH BA	1	9	9	8	9	9		8		95
4.	Mojžišová Karolína	1.	Gamča BA	2		9	7	7			6		87
5.	Krakovská Hana	1.	Gamča BA	2		9	8	6			3		84
6.	Šandalová Michaela	1.	ŠPMNDG BA	1	8	9	8	7	2				79
7.	Iždinská Dominika	1.	GJH BA	1	7	9	5	9					69
7.	Lipovský Mário	1.	GJH BA	1	9	5	6	7					69
7.	Žilková Alexandra	1.	ŠPMNDG BA	1	9		7	5					69
10.	Klimkovič Anna-Mária	1.	ŠPMNDG BA	1	6	4	7		1				62
11.	Kavický Dušan	2.	GJH BA	3					2	4	2		55
12.	Pieš Adrián	1.	ŠPMNDG BA	1	6		1	3			3		53
13.	Bednár Stanislav	1.	GJH BA	1	3	1	7	0		0	0		51
14.	Olerínyová Anna	2.	GVaz BA	2									47
15.	Galanová Miriam	1.	GJH BA	1	4	9	8	0					42
16.	Gonda Tomáš	2.	Gamča BA	3									41
17.	Vršanský Martin	1.	1SG BA	1	5	5		3				-13	29
18.	Krajčovič Matej	2.	GJH BA	3									19
18.	Strakáčová Jana	2.	Gamča BA	3									19
20.	Rusinko Martin	1.	GJH BA	1									18
21.	Ivanov Marián	2.	GJH BA	2									17
22.	Kupčulák Marián	2.	Gamča BA	3									16
23.	Balašov Pavel	1.	GJH BA	1									14
24.	Hraška Peter	2.	Gamča BA	3									6

kategória ALFA, západ

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Pokrývka Filip	1.	G Bánovce	1	9	9	8	9	4				113
2.	Korbela Michal	1.	G Bánovce	1	9	9	6	9		1	4		112
3.	Lúčna Nina	2.	GPdC PN	2		9	8	9	0				87
4.	Šimková Ľudmila	1.	GPár NR	2		9	9	7		3	9	-37	86
5.	Franková Monika	1.	GKom PE	1	5		2	5					65
6.	Balážová Michaela	1.	G Bánovce	1	2		3	7	1	1			61
7.	Kováčová Milada	2.	GCM NR	3			8	7					57
8.	Pavlíková Stela	1.	GĽŠ TN	1									43

kategória ALFA, stred

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Sládek Samuel	-1.	GAB NO	-1	7	9	9	9			9		129
2.	Sučík Samuel	0.	ZŠ Čelovce	0	9	9	9	9			9		122
3.	Magyarová Zuzana	1.	GBST LC	1	7	9	8	5			3		110
4.	Hrivová Ivona	1.	GVO ZA	2		9	7	5		1	4		106
5.	Melo Jakub	1.	GsvFA ZA	1	9	7	9	9	2				102
6.	Psota Miroslav	1.	GHlin ZA	1	6	5	5	6		3			88
7.	Ječmenová Andrea	1.	GVO ZA	2		9	8	4		8	4		84
8.	Jankovichová Ľudmila	1.	GJGT BB	2			8	5	2				78
9.	Hromcová Zuzana	1.	GVO ZA	2	9	9	1	7					65
10.	Santer Martin	2.	GMH Trstená	3			9	9					55
11.	Siviček Ján	2.	GBST LC	3			8		3		3		47
12.	Perešíni Martin	1.	SPŠJM BB	1									30
13.	Hudec Lukáš	3.	GBST LC	3			1	1					27
14.	Slivka Norbert	1.	GJGT BB	2									19
15.	Doboszová Helena	1.	BG ZA	1									18

kategória ALFA, východ

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Greššák Jerguš	2.	GJAR PO	2		5	6	9	1				108
2.	Stankovič Miroslav	1.	GPoš KE	2		9		9			8		93
3.	Batmendijn Eduard	0.	ZŠsvCM SL	0					9	9	9		90
4.	Midlik Šimon	1.	GJAR PO	1	6	7	9	6					82
5.	Hofierka Jaroslav	1.	GJAR PO	1	9	6	8	7		3	4		74
6.	Pivovarník Roman	1.	GJAR PO	1	9		8	7					73
7.	Hojnoš Peter	1.	GŠkol SN	1	6	9	8	7					69
8.	Rapavý Martin	1.	GAlej KE	2			7	7					66
9.	Bátoryová Jana	1.	GAlej KE	2		8	8	5					62
10.	Dudič Ján	2.	GPoš KE	2	4	3	7	0			1		56
11.	Šromeková Karolína	1.	GDT PP	1	3		8	1					51
12.	Polovka Maroš	1.	GKuk PP	2		2	9	5					42
13.	Tokárová Natália	2.	GJAR PO	3									39
14.	Mikuš Peter	1.	GJAR PO	1									24
15.	Turlík Tomáš	2.	GJAR PO	2									15

kategória ALFA, zahraničie

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Teiml Dominik	2.	AG Praha	2	7	9	8	9			4		100
2.	Šimsa Štěpán	2.	Litoměřice ČR	2						9	9		53
2.	Töpfer Martin	3.	GNŠ Praha	3						9	9		53
4.	Kubelka Tomáš	3.	Žamberk ČR	3						9	9		52
5.	Steinhauser Dominik	3.	GJK Praha	3					7	9	9		40
6.	Le Anh Dung	1.	Tachov ČR	1									27
7.	Kratochvíl Pavel	3.	Světlá ČR	3			0	7					24
8.	Svoboda Josef	2.	Frýdlant ČR	2									0

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	$\mathbf{k}_\alpha$	$\mathbf{k}_\beta$	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
1.	Vodička Martin	2.	GAlej KE	5	4			9	9	9	9	9		45	135
2.	Koblížek Miroslav	4.	Žamberk ČR	4	2		9	9	9	5	9			41	127
3.	Batmendijn Eduard	0.	ZŠsvCM SL	0	0	9	9	9	9					36	126
4.	Horňák Marián	3.	GPár NR	7	5			8	9	9	9	1		36	124
5.	Kubelka Tomáš	3.	Žamberk ČR	3	1		9	9	9	7	4			38	122
6.	Tóth Michal	3.	GJH BA	7	2		9	6	9	9	2			35	120
7.	Kopf Michal	3.	Opava ČR	7	2		9	9	8	7	8			41	117
8.	Santer Jakub	4.	GMH Trstená	9	5			9	7	9	9			34	115
9.	Csiba Dominik	4.	ŠPMNDG BA	10	6			9	9	7	9			34	113
9.	Lux Filip	4.	Žamberk ČR	4	0	9		9	8					26	113
9.	Zavřel Lukáš	4.	GChod Praha	4	2		9	5	9	7	9			39	113
12.	Šimsa Štěpán	2.	Litoměřice ČR	2	1		9	9		8	8			34	110
13.	Balog Matej	4.	Gamča BA	7	3			9	8	9	9			35	108
13.	Šafin Jakub	2.	GPH MI	4	1		3	9	8		5	2		27	108
15.	Klembarová Barbora	3.	GKuk PP	7	2		9	9	9	0	9			36	106
16.	Jasenčáková Katarína	3.	GVO ZA	8	2		8	9	5		9			31	105
17.	Karásková Natália	4.	GJH BA	12	11			9	8	7	9	1		34	104
18.	Töpfer Martin	3.	GNŠ Praha	3	2		9	9	9		2			29	103
19.	Halajová Barbora	3.	GVO ZA	7	1		6	8	4	1	9			28	101
20.	Galovičová Soňa	3.	GJH BA	7	3			9	9	7	6			31	100
21.	Kozák Andrej	4.	Gamča BA	11	5			7	9	9	7	6		38	99
21.	Žídek Augustin	3.	Frýdlant ČR	6	1		9	9	9	0	5			32	99
23.	Hledík Michal	2.	GJH BA	4	0		9	9	9		7			34	98
23.	Kavický Dušan	2.	GJH BA	3	0	2	4	2	7		2			17	98
23.	Szabados Viktor	4.	Gamča BA	11	5			9	9	2	7			27	98
26.	Hanzely Filip	2.	GAP SB	4	0	1	9	9	8		5			32	95
26.	Rabatin Branislav	3.	GJH BA	5	0	8	2	4		0	4			18	95
28.	Guričan Pavol	4.	GJH BA	10	6			9	9	7	9			34	94
29.	Kossaczká Marta	2.	Gamča BA	5	2		9	9	9	7				34	93
29.	Marečáková Barbora	3.	GKuk PP	7	2		8	9	9	0	3			29	93
31.	Hozza Ján	4.	GJH BA	8	7			9	9					18	92
32.	Faršang Štefan	4.	SJG KN	7	2		9	9	2	7				27	91
33.	Langer Tomáš	3.	GJH BA	7	2		9	9	8					26	89
34.	Hlaváčik Matúš	2.	GAlej KE	4	0	9	8	9		8				34	88
35.	Duníková Katarína	4.	GVO ZA	6	0	9	6	2		4				21	84
36.	Hlavatá Martina	4.	Gamča BA	10	3			2	9	0	9			20	82
36.	Komanová Kristína	2.	GAS BB	4	1		3	6	4	9	9			31	82
36.	Stehlík Matúš	4.	GAlej KE	6	0									0	82
39.	Koprda Pavol	3.	GAM TT	6	1		7	6	9		6			28	80
40.	Benešová Katarína	2.	GAS BB	4	0	7	3	4	6					20	78
40.	Kováč Ondrej	4.	GCM NR	10	5			8	9		3	6		26	78
40.	Macko Vladimír	2.	GĽŠ ZV	4	0	7		6	8	5	2			28	78
43.	Pellerová Daniela	2.	Gamča BA	5	1		9	4	8	0	1	1		23	76
44.	Petrucha Jaroslav	2.	GMet BA	4	0	9	2		9	7				27	73
45.	Ficková Klára	3.	GPoš KE	5	0	9	7	5	9		3			33	71
45.	Hlásek Filip	4.	Plzeň ČR	5	3			9	9		9			27	71
47.	Belanová Michaela	3.	ŠPMNDG BA	7	2			6	9		1	4		20	70
47.	Surovčík Juraj	2.	GPOH DK	4	0	7		5	6	4	2			24	70
49.	Semanišinová Denisa	2.	GAlej KE	5	0	9	3							12	63
50.	Vlček Andrej	3.	EvSŠ LM	6	1			9	8		5			22	62
51.	Cibulka Samuel	2.	GAV LV	4	0		3	4	6					13	59
52.	Baxová Zuzana	3.	GĽŠ TN	7	2		2	5			6			13	56
52.	Gonda Tomáš	2.	Gamča BA	3	0									0	56
52.	Sládek Samuel	-1.	GAB NO	-1	0			9						9	56
55.	Le Anh Dung	1.	Tachov ČR	1	0						9			9	54

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	$\mathbf{k}_\alpha$	$\mathbf{k}_\beta$	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
56.	Nociarová Jela	2.	GBST LC	4	0				8		3			11	48
57.	Teiml Dominik	2.	AG Praha	2	0			4						4	45
58.	Smolík Milan	2.	Gamča BA	4	0									0	44
59.	Anderle Michal	4.	GBST LC	6	0									0	42
60.	Bílý Michael	4.	Klatovy ČR	4	2									0	41
60.	Steinhauser Dominik	3.	GJK Praha	3	0	7	9	9		0	1			26	41
62.	Páleník Jakub	2.	ŠPMNDG BA	4	0	7		2		0				9	40
63.	Švančara Patrik	3.	GĽŠ TN	5	0		3	8	4					15	38
64.	Smolík Martin	2.	Gamča BA	4	0									0	35
65.	Smolík Michal	2.	Gamča BA	4	0									0	30
66.	Sabatovičová Linda	4.	GJH BA	9	2									0	28
67.	Barančok Peter	4.	Gamča BA	6	1									0	27
67.	Strakáčová Jana	2.	Gamča BA	3	0									0	27
69.	Kupčulák Marián	2.	Gamča BA	3	0									0	24
70.	Kubincová Petra	4.	ŠPMNDG BA	8	1									0	22
71.	Santrová Adriana	3.	GMH Trstená	5	0									0	20
72.	Kubišová Barbora	3.	GJGT BB	4	0									0	19
73.	Mikuš Peter	1.	GJAR PO	1	0									0	15
74.	Bohiniková Alžbeta	4.	Gamča BA	8	1									0	13
75.	Tunová Anna	2.	GPár NR	4	0									0	10
76.	Matejovičová Tatiana	2.	Gamča BA	4	0									0	9
76.	Svoboda Josef	2.	Frýdlant ČR	2	0						9			9	9
78.	Macháč Juraj	4.	GJH BA	6	0									0	8
79.	Bok Jan	4.	Litoměřice ČR	4	0									0	5
79.	Kratochvíl Pavel	3.	Světlá ČR	3	0									0	5
81.	Búlik Martin	4.	GJGT BB	5	0	3								3	4
82.	Benej Martin	4.	GLS HE	4	0									0	2

Výsledková listina

kategória GAMA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**p**	$\sum$
1.	Csiba Dominik	4.	ŠPMNDG BA	9		6	7			56
2.	Kossaczká Marta	2.	Gamča BA			6				10
3.	Le Anh Dung	1.	Tachov ČR	9		6		7		68
4.	Santer Jakub	4.	GMH Trstená	9		6				50
5.	Steinhauser Dominik	3.	GJK Praha	1		7				12
6.	Svoboda Josef	2.	Frýdlant ČR	9						30
7.	Šafin Jakub	2.	GPH MI	5	2	5	0			33
8.	Tóth Michal	3.	GJH BA	2		6				26
9.	Vodička Martin	2.	GAlej KE	9	9	6	7	7		94