Vzorové riešenia 2. série zimnej časti KMS 2013/2014

Úloha č. 1: *Drzohubých je na divokom západe kopa a nie všetci sa poznajú. Preto na identifikáciu používajú tajný symbol. Montymu sa z rôznych zdrojov podarilo získať útržkové údaje o tomto symbole. Dozvedel sa, že symbolom je trojuholník ABC, ktorý má vrcholy označené v tomto poradí proti smeru hodinových ručičiek. Ďalej zistil, že veľkosť uhla pri vrchole B je $20°$, a že strana BC meria 5 centimetrov. Ako posledné zistil, že kružnica opísaná tomuto trojuholníku má polomer 3 centimetre. Pomôžte Montymu a skonštruujte tento trojuholník. Zároveň túto konštrukciu aj popíšte. Nezabudnite nájsť všetky riešenia a zdôvodniť, že iné neexistujú.*

Riešenie: (opravovala Foxie a KatkaJ)
Správnych riešení tejto úlohy je viacero, my si ukážeme jedno. Postup konštrukcie trojuholníka Drzohubých je možný napríklad v presne opačnom poradí, než udáva zadanie. Najprv si narysujeme opísanú kružnicu k s polomerom 3 cm. Potom na túto kružnicu nanesieme ľubovoľnú tetivu dĺžky 5 cm, a to tak, že si na kružnici zvolíme jeden jej koncový bod a druhý nájdeme pomocou kružidla vo vzdialenosti 5 cm od prvého. Koncové body tetivy si nazveme B a C. (Všetky vrcholy trojuholníka ABC musia ležať na opísanej kružnici.) Z vrcholu B narysujeme polpriamku p, zvierajúcu s úsečkou BC uhol $20°$. Prienik p a k označíme ako A. Skontrolujeme, či má trojuholník správne označené vrcholy proti smeru hodinových ručičiek.
Prejdime si túto konštrukciu z hľadiska počtu riešení. Dve možnosti vzniknú pri nanášaní tetivy BC, pretože vrcholy môžeme označiť dvoma spôsobmi. Počet riešení sa znásobí dvoma aj pri rysovaní polpriamky p, pretože uhol $20°$ vieme nájsť pri bode B dvoma spôsobmi. Nakoniec však vylúčime polovicu riešení, pretože nemajú vrcholy označené proti smeru hodinových ručičiek. Výsledný počet je teda 2.

Úloha č. 2: *S tajným symbolom vo vrecku sa Monty vybral priamo k táborisku Krivozubého Tonyho a niekoľkých ďalších Drzohubých. Ukázal im papier so symbolom a ihneď ho vzali medzi seba. Sedeli okolo švajčiarskej čokolády, ktorú nedávno ulúpili a rozmýšľali, ako si ju rozdeliť. Čokoláda mala tvar štvorca a tvorilo ju 6×6 menších tabličiek. Chceli ju rozdeliť na deväť kúskov tak, aby delili len pozdĺž tabličiek a aby im nič neostalo. Navyše má mať každý z týchto kúskov tvar obdĺžnika (aj štvorec je obdĺžnik). Banditi sa snažili rozdeliť čokoládu podľa týchto pravidiel tak, aby bol každý kúsok iného tvaru.*[1] *Monty sa na chvíľku zamyslel, a potom prehlásil, že to nie je možné. Vedeli by ste aj vy dokázať, že sa vždy nájdu aspoň dva rovnaké kúsky?*

Riešenie: (opravoval Kajak a mojo)
Zo zadania vieme, že jednotlivé kúsky majú byť rôzne a v žiadnom rozmere určite nie väčšie ako celá čokoláda, čiže 6×6 kociek. Môžeme si ich jednotlivo vypísať (je ich iba 21 rôznych):

$$\begin{array}{cccccc}
1\times 1, & 2\times 1, & 3\times 1, & 4\times 1, & 5\times 1, & 6\times 1,\\
 & 2\times 2, & 3\times 2, & 4\times 2, & 5\times 2, & 6\times 2,\\
 & & 3\times 3, & 4\times 3, & 5\times 3, & 6\times 3,\\
 & & & 4\times 4, & 5\times 4, & 6\times 4,\\
 & & & & 5\times 5, & 6\times 5,\\
 & & & & & 6\times 6.
\end{array}$$

Na to, aby sa dala čokoláda rozdeliť na deväť rôznych obdĺžnikov, budeme potrebovať aby súčet počtu ich kociek bol počtom kociek celej čokolády, teda 36. Je veľmi pracné zisťovať všetky kombinácie súčtov deviatich rôznych kociek a preto je fajn zistiť, aký najmenší a najväčší súčet môžeme dostať, lebo keď ich budeme poznať, budeme vedieť, ktorý je bližší k 36 a koľko kociek máme ešte pridať, či ubrať.
Keď si zrátame najmenší súčet $1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$ dostaneme 39 (súčet deviatich najmenších rôznych obdĺžnikov podľa počtu kociek). Sú to určite najmenšie obdĺžniky, pretože obdĺžniky so stranou 1 sme požili všetky, nepoužité obdĺžniky so stranou 2 sú už iba 2×5 a 2×6 s obsahmi 10 a 12, podobne 3×3 má obsah 9 a je väčší ako všetky použité. Jediné obdĺžniky so stranou 5 alebo 6, ktorých obsah nie je väčší

[1] kúsky, ktoré sa líšia iba otočením, považujeme za rovnaké

ako $2 \cdot 4 = 8$, sú 5×1 a 6×1, ktoré sme už použili. Teda na súčet kociek 36 by sme potrebovali ubrať ešte 3 kocky, čo sa ale už nedá, ak majú byť obdĺžniky rôzne. Takže Monty mal pravdu a skutočne sa to nedá.

Úloha č. 3: *Monty si svojou šikovnosťou rýchlo získal priazeň Drzohubých aj samotného Tonyho. O niekoľko dní sa banditi rozhodli prepadnúť jeden z troch dostavníkov, ktoré putovali z Longcreeku do Smallvillu. Časť bandy sa vydala na výzvedy a vrátili sa s týmito informáciami. V prvom dostavníku bolo p vriec dolárov, v druhom bolo $p^2 + 2$ vriec dolárov a v treťom bolo $p^3 + 2$ vriec dolárov. Navyše zvedi zistili, že v prvom aj druhom dostavníku je prvočíselný počet vriec. Banditi nechcú okradnúť dostavník s prvočíselným počtom vriec, problémy s následným delením lupu by im za to určite nestáli. Pomôžte Montymu dokázať, že počet vriec v treťom dostavníku je tiež určite prvočíslo a zabráňte tak prepadu.*

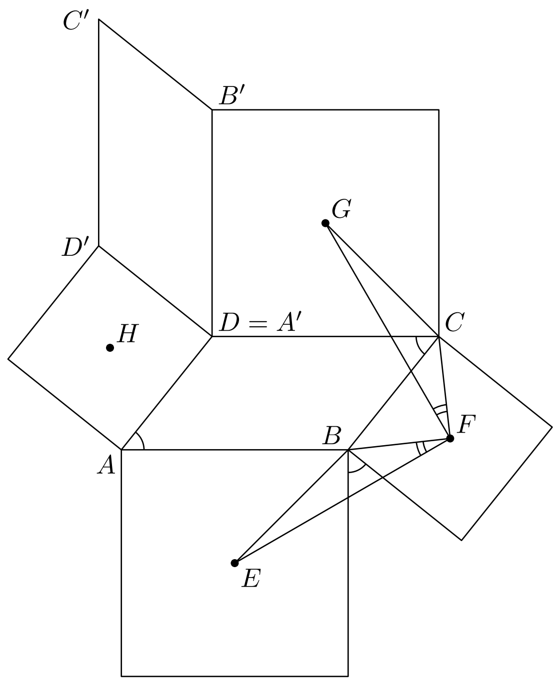
Riešenie: (opravovala Barča a Linda)
Našou úlohou je ukázať, že ak p aj $p^2 + 2$ sú prvočísla, tak aj $p^3 + 2$ je prvočíslo.
Jeden z možných a šikovných spôsobov je vyjadriť si prvočíslo p postupne ako $3k + 1$, $3k + 2$ a $3k$.
Ak $p = 3k + 1$, potom $p^2 + 2 = (3k + 1)^2 + 2 = 9k^2 + 6k + 3 = 3(3k^2 + 2k + 1)$. Potom $3 \mid p^2 + 2$, ale keďže $p^2 + 2$ je prvočíslo, dostávame, že $p^2 + 2 = 3$, čo znamená, že $p = 1$, a to nie je prvočíslo. V tvare $3k + 1$ hľadané p teda byť nemôže.
Obdobne, ak $p = 3k+2$, potom $p^2+2 = (3k+2)^2+2 = 9k^2+12k+6 = 3(3k^2+2k+2)$, odkiaľ vidíme, že $3 \mid p^2+2$. Z toho nám ako v prvom prípade vychádza, že $p = 1$, čo zas znamená, že neexistuje prvočíslo tvaru $p = 3k + 2$ také, aby aj $p^2 + 2$ bolo prvočíslo.
Ostáva nám už len vyšetriť prípad $p = 3k$, čo znamená, že $p = 3$. V tom prípade je aj $p^2 + 2 = 3^2 + 2 = 11$ prvočíslo. V prvých dvoch dostavníkoch je teda prvočíselný počet vriec a v treťom je ich $p^3 + 2 = 3^3 + 2 = 29$, čiže tiež prvočíselný počet, ako sme chceli dokázať.
Ukázali sme, že ak je prvočíselný počet vriec v prvých dvoch dostavníkoch, je určite aj v treťom.

Úloha č. 4: *Po nevydarenej lúpeži sa Krivozubý Tony nejakú dobu rozčuľoval, no časom z neho hnev vyprchal. Rozhodol sa, že si zlepší náladu tým, že potrápi Waltyho hlavu. Dal mu nasledovnú úlohu. Na svojom tele má n jaziev. Toto číslo n je dvojciferné a navyše číslo $n^3 - n$ je deliteľné číslom 100. Montyho úloha je zistiť, koľko jaziev môže mať Tony. Zistite aj vy, ktoré čísla n vyhovujú zadaniu. Nezabudnite prísť na všetky riešenia.*

Riešenie: (opravovala Betka a Murko)
Keď si náš výraz trochu upravíme na $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)$, vidíme, že je to vlastne súčin troch po sebe idúcich čísel. Našou úlohou je teda nájsť také tri po sebe idúce čísla, ktorých súčin je deliteľný číslom $100 = 2^2 \cdot 5^2$.
Pokiaľ máme tri po sebe idúce čísla, tak maximálne jedno z nich je deliteľné piatimi. Potom ak ich súčin má byť deliteľný 5^2, tak práve jedno z týchto troch čísel musí byť deliteľné číslom 25. Kedže n je dvojciferné, tak trojice čísel vyberáme z rozsahu 9 až 100. V tomto rozsahu máme iba štyri čísla deliteľné číslom 25, a to: 25, 50, 75 a 100. Za podmienky, aby sa medzi číslami $n - 1$, n, $n + 1$ nachádzalo jedno z tých štyroch čísel, vieme vyrobiť 10 rôznych súčinov tvaru $(n-1)n(n+1)$. (Pre každé zo štyroch čísel vyrobíme tri súčiny, ale pre 100 vyhovuje len jeden z nich, keďže n má byť dvojciferné.) Zostáva nám už len zistiť, ktoré z týchto súčinov sú deliteľné číslom 100.
To spĺňajú len tieto: $23 \cdot 24 \cdot 25$, $24 \cdot 25 \cdot 26$, $48 \cdot 49 \cdot 50$, $50 \cdot 51 \cdot 52$, $74 \cdot 75 \cdot 76$, $75 \cdot 76 \cdot 77$ a $98 \cdot 99 \cdot 100$. Potom n môže byť 24, 25, 49, 51, 75, 76 alebo 99.

Úloha č. 5: *Jedného večera Drzohubí vybrali vrece plné najvzácnejších lupov. Chvíľu sa v ňom prehrabovali, a potom vytiahli vzácnosť, ktorú už dávno ulúpili Divokozápadskej matematickej spoločnosti. Bol to všeobecný rovnobežník. Navyše bol nad každou zo štyroch strán rovnobežníka vztýčený štvorec (smerom von z rovnobežníka). Banditi si už dávno všimli, že stredy týchto štvorcov tvorili opäť štvorec, nech bol rovnobežník všeobecný ako len chcel. Zaujímalo by ich však, prečo to tak je. Pomôžte Montymu zapôsobiť na Drzohubých a dokážte, že stredy štyroch štvorcov vždy tvoria štvorec.*

Riešenie: (opravovala Kaťa a Marek)
Vrcholy rovnobežníka si proti smeru hodinových ručičiek označme A, B, C, D a stredy štvorcov nad stranami AB, BC, CD, DA postupne E, F, G, H. Ďalej si označme $\alpha = |\sphericalangle DAB|$. Nejaký z vnútorných uhlov rovnobežníka bude určite menší alebo rovný $90°$. Môžeme si teda k nášmu označeniu pridať podmienku, že $\alpha \le 90°$.
Chceme dokázať, že $EFGH$ je štvorec, t. j. že má rovnako dlhé strany a všetky uhly pravé.
Stred štvorca rozpoľuje jeho uhlopriečky a tie sú rovnako dlhé (premyslite si prečo). Takže úsečky BF a FC sú polovicou uhlopriečky štvorca a preto $|BF| = |CF|$.
Štvoruholník $ABCD$ je rovnobežník, takže $|AB| = |CD|$, čo znamená, že štvorce so stredmi v bodoch E a G sú zhodné. Teda aj ich uhlopriečky majú rovnakú veľkosť. Úsečky BE a CG sú polovicami týchto uhlopriečok, preto $|BE| = |CG|$.
Pozrime sa teraz na veľkosti uhlov EBF a GCF. Pri počítaní uhlov využívame, že v rovnobežníku sa protiľahlé uhly rovnajú a súčet priľahlých uhlov je $180°$ a vo štvorci zviera ľubovoľná strana s ľubovoľnou uhlopriečkou uhol



Obr. 1

45° (premyslite si prečo).

$$|\sphericalangle EBF| = 360^\circ - |\sphericalangle EBA| - |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle CBF| = 360^\circ - 45^\circ - (180^\circ - \alpha) - 45^\circ = 90^\circ + \alpha,$$
$$|\sphericalangle GCF| = |\sphericalangle GCD| + |\sphericalangle DCB| + |\sphericalangle BCF| = 45^\circ + \alpha + 45^\circ = 90^\circ + \alpha.$$

Teda $|\sphericalangle EBF| = |\sphericalangle GCF|$, čo nám spoločne s poznatkami $|BF| = |CF|$ a $|BE| = |CG|$ dáva, že trojuholníky EBF a GCF sú zhodné podľa vety *sus*. Takže $|EF| = |FG|$. Analogicky ukážeme, že $|FG| = |GH|$, $|GH| = |HE|$ a $|HE| = |EF|$. Z toho $|EF| = |FG| = |GH| = |HE|$.
Ostáva ešte ukázať, že vnútorné uhly štvoruholníka $EFGH$ sú pravé. Zistili sme, že trojuholníky EBF a GCF sú zhodné. To však znamená, že $|\sphericalangle BFE| = |\sphericalangle CFG|$. Pozrime sa na veľkosť uhla GFE.

$$|\sphericalangle GFE| = |\sphericalangle CFB| - |\sphericalangle CFG| + |\sphericalangle BFE| = |\sphericalangle CFB| - |\sphericalangle CFG| + |\sphericalangle CFG| = |\sphericalangle CFB| = 90^\circ.$$

Platnosť poslednej rovnosti si premyslite. Analogicky ukážeme, že aj ostatné vnútorné uhly štvoruholníka $EFGH$ sú pravé. Alebo si uvedomíme, že z toho, čo o tomto štvoruholníku vieme, dokážeme dorátať ostatné uhly. Ukázali sme, že $EFGH$ má všetky strany rovnako dlhé a všetky uhly pravé, teda $EFGH$ je štvorec.

Iné riešenie:
(Podľa *Niny Hronkovičovej*.) Označme si body ako na obrázku Obr. 1.
Pri rotácii okolo bodu H o 90° sa rovnobežník $ABCD$ zobrazí na rovnobežník $A'B'C'D'$ (premyslite si). Potom však aj bod E sa zobrazí na bod G. Odtiaľ vyplýva $|EH| = |GH|$ a $|\sphericalangle EHG| = 90^\circ$. Analogicky to platí pre zvyšné strany štvoruholníka $EFGH$, takže je to štvorec.

Úloha č. 6: *Netrvalo dlho a Montymu začali všetci v bande dôverovať. A tak mu povedali ich veľký plán. Chystali sa vylúpiť obrovskú galériu v New Orleans. Táto galéria má tvar konvexného n-uholníka. V galérii sú veľmi vzácne obrazy, pričom každý má veľkosť jediného bodu. Obrazy do galérie umiestňovali nasledovne. Zobrali si jeden z vrcholov n-uholníka a postupne vztýčili kolmice na všetky priamky určené stranami n-uholníka nesusednými s vybraným vrcholom. Ak niektorá z piat týchto kolmíc padla priamo na stranu n-uhoníka, tak na to miesto dali obraz (mohol to byť aj krajný bod strany). Túto procedúru postupne aplikovali na všetky vrcholy galérie. Môže sa teoreticky stať, že v tejto galérii nie sú žiadne obrazy (t.j., že všetky päty kolmíc budú mimo strán n-uholníka)?*

Riešenie: (opravovala Veronika a Hago)
Pozrime sa na jednu stranu nášho n-uholníka, označme si ju HV. Zostrojme dve kolmice na stranu HV tak, aby jedna prechádzala bodom H a druhá bodom V. Vnútorný pás (aj s hraničnými priamkami) medzi týmito kolmicami nazvime *Pásavec*. Šírka Pásavca je dĺžka strany HV, ak teda nejaká strana n-uholníka ide z jednej strany Pásavca na druhú, tak nemôže byť kratšia ako strana HV, pričom rovnaká môže byť iba, ak oba jej koncové vrcholy ležia na hraničných priamkach Pásavca.
Ako vyzerá situácia, keď na HV nie je ani jeden obraz?
Päty kolmíc na priamku HV z ostatných vrcholov n-uholníka sa nachádzajú mimo úsečky HV. Čo vlastne znamená, že ostatné vrcholy n-uholníka sa nachádzajú mimo Pásavca (toto si poriadne premyslite).

Aby sme teda mohli hovoriť o n-uholníku, Pásavca musí pretínať iná strana okrem HV (n-uholník je totiž uzavretý útvar), označme si ju MP.
Teraz môžu nastať dva prípady:

1. Strany HV a MP majú práve jeden spoločný vrchol.
   Bez ujmy na všeobecnosti nech $V = P$. Vrchol M sa musí nachádzať mimo Pásavca, čiže strana MP ide z jednej strany Pásavca na druhú a vrchol M určite nie je na hraničnej priamke. Tým pádom je strana MP dlhšia ako strana HV.
2. Strany HV a MP nemajú spoločný vrchol.
   Oba vrcholy M aj P sa musia nachádzať mimo Pásavca, takže aj v tomto prípade je strana MP nutne dlhšia než strana HV.

V oboch prípadoch teda musí byť strana MP dlhšia ako strana HV.
Keby sme si na začiatku za HV zvolili najdlhšiu stranu nášho n-uholníka, tak by MP nemohla byť dlhšia ako HV, čiže by nenastala situácia, že na HV nie je ani jeden obraz. Na najdlhšej strane teda určite bude nejaký obraz.
Nemôže sa stať, že by v galérii neboli žiadne obrazy.

Úloha č. 7: *Ďalšie ráno sa Monty potichu vyplížil zo spiaceho táboriska a vybral sa na dlhú cestu do New Orleans. Mal v pláne tam nastražiť pascu na Drzohubých a dostať ich za mreže. Rozhodol sa, že sa cestou zastaví v indiánskej osade kmeňa Geometrov a poprosí tam o pomoc svojho kamaráta Sinetua. Spoločne určite vymyslia ako banditov dolapiť. Len čo dorazil do osady, stretol miestneho geometra Rysueta, ktorý sa opäť pasoval s geometrickým problémom. Na zemi mal nakreslenú kružnicu k so stredom O. Dnu v kruhu vymedzenom kružnicou k ležal bod A a mimo tohto kruhu ležal bod B. Navyše platilo, že body A, B a O neležia na jednej priamke. Rysueto chcel nájsť všetky priesečníky priamky určenej bodmi A a B a kružnice k. Stále mal však zapatrošené svoje pravítko, a tak mal k dispozícii iba kružidlo. Do neho vie nabrať vzdialenosť medzi ľubovoľnými dvoma narysovanými bodmi a nakresliť kružnicu s nabraným polomerom a ľubovoľným stredom. Pomôžte Rysuetovi nájsť všetky priesečníky priamky AB a kružnice k len za pomoci kružidla a vášho umu. Nezabudnite, že bez pravítka neviete rysovať rovné čiary.*

Riešenie: (opravovala Plutvička a Kubko)
Keďže vieme kresliť len kružnice, hľadané priesečníky (označme ich X, Y) potrebujeme nájsť ako priesečníky dvoch kružníc. Chceme teda preťať kružnicu k nejakou kružnicou k' tak, aby body A, B, X, Y ležali na jednej priamke.
Čo by sa stalo, keby sme kružnicu k preklopili okolo osi AB, teda osovo súmerne zobrazili cez priamku AB? Vznikla by kružnica k' so stredom O'. Vieme, že pri osovej súmernosti sa body osi zobrazia sami na seba (voláme ich samodružné). Takýmito bodmi sú aj hľadané priesečníky X, Y, keďže ležia na priamke AB. Pre lepšiu predstavu: osové zobrazenie kružnice k si môžeme predstaviť tak, že zafixujeme body X, Y a preklopíme kružnicu k cez os AB.
Predpokladajme, že kružnice k a k' sa pretnú v dvoch bodoch (to si dokážeme neskôr). Sú tieto body hľadanými bodmi X, Y? Sú, pretože zároveň ležia na priamke AB: keďže platí $|XO| = r = |XO'|$, $|YO| = r = |YO'|$, body X, Y patria do množiny bodov rovnako vzdialených od stredov O a O' a tou je práve priamka AB. Preto (za predpokladu, že máme bod O') stačí urobiť kružnicu k' s polomerom r a máme hľadané priesečníky.
Ešte potrebujeme nájsť bod O'. Z osovej súmernosti vyplýva $|AO| = |AO'|$, $|BO| = |BO'|$. Zostrojme teda kružnice k_1 a k_2, kde k_1 je kružnica so stredom v bode A a polomerom $r_1 = |AO|$ a k_2 je kružnica so stredom v bode B a polomerom $r_2 = |BO|$. Obe kružnice zjavne prechádzajú cez bod O. Tvrdíme, že tieto kružnice sa pretnú v dvoch bodoch, O a O'. Vo všeobecnosti sú teraz tri možnosti:

1. Bod O je jediným priesečníkom k_1 a k_2. Toto by nastalo len vtedy, keby body A, B, O ležali na jednej priamke, čo však zo zadania nemôžu.
2. Kružnice k_1 a k_2 majú spoločných nekonečne veľa bodov, t. j. sú totožné. Na to by museli mať rovnaký stred (a polomer), čo je vylúčené, keďže $A \neq B$.
3. Kružnice k_1 a k_2 majú dva priesečníky, body O a O'.

Takže hurá, našli sme bod O'. Už len stačí dokázať, že kružnice $k(O, r)$ a $k'(O', r)$ sa skutočne pretnú v dvoch bodoch ako sme predpokladali vyššie. Aby sa pretli v dvoch bodoch, musí platiť $|OO'| < 2r$, vzdialenosť ich stredov musí byť menšia ako súčet ich polomerov. Body O, O' ležia na kružnici $k_1(A, |AO|)$, takže ich vzdialenosť je najviac $2|AO|$. Bod A leží vnútri kružnice k, preto $|AO| < r$. Z toho máme $|OO'| \leq 2|AO| < 2r$, čo sme chceli.
Zhrnieme ešte postup konštrukcie:

1. $k_1; k_1(A, |AO|)$
2. $k_2; k_2(B, |BO|)$
3. $O'; O' = k_1 \cap k_2, O' \neq O$
4. $k'; k'(O', r)$
5. $X, Y; \{X, Y\} = k \cap k'$

<u>**Úloha č. 8:**</u> *Rysueto poďakoval Montymu za jeho pomoc a pokračoval vo svojom rysovaní. Monty sa vybral pohľadať Sinetua. Našiel ho ako s ďalšími indiánmi sedí pri okrúhlom stole. Sedelo ich tam dokopy* 1894. *Sinetu mal v hrsti n mincí. Zvyšní indiáni mali hrste prázdne. Potom sa začali hrať nasledovnú hru. V každom ťahu si vybrali jedného indiána, ktorý mal v hrsti aspoň dve mince. On potom jednu zo svojich mincí posunul indiánovi po svojej ľavici a jednu indiánovi po svojej pravici a zvyšné mince si nechal. Tým jeden ťah skončil. Takto pokračovali až kým sa medzi nimi nenachádzal žiaden, ktorý by mal aspoň dve mince. Vtedy hra skončila a šli si zabafkať na fajke mieru. Dokážte, že ak n je rovné* 1894, *tak ich hra nikdy neskončí. Taktiež dokážte, že ak n je menšie ako* 1894, *tak hra určite niekedy skončí.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Palo a Lietadlo)
Najprv ukážeme, že pre $n = 1894$ hra nikdy neskončí. Indiáni sedia okolo kruhového stola. Na striedačku si ich ofarbíme — čierny, biely, čierny, biely… Keďže máme 1894 indiánov tak 947 bude bielych a 947 bude čiernych. Na začiatku hry sú všetky mince u jedného indiána. Tento indián je bez ujmy na všeobecnosti ofarbený na čierno a teda všetky mince sú u čiernych indiánov.
V jednom ťahu zoberieme dve mince od jedného indiána a každému susedovi dáme jednu. Susední indiáni sú ale inej farby. To znamená, že v každom ťahu presunieme 2 mince od bielych indiánov čiernym, alebo 2 mince od čiernych bielym. Teda parita celkového počtu mincí u čiernych resp. bielych indiánov sa v žiadnom ťahu nemení. Na začiatku máme stav 1894 u čiernych a 0 u bielych, a na konci potrebujeme stav 947 u čiernych aj bielych. To by sa ale musela zmeniť tá parita, takže koncový stav sa nedá dosiahnuť a preto hra nikdy neskončí.
Teraz pre $n < 1894$ ukážeme, že hra určite skončí. To neznamená, že vieme hrať hru za indiánov tak, aby sme skončili. Znamená to to, že nech sa indiáni rozhodnú v každom ťahu akokoľvek, hra skončí.
Sinetu pošle na začiatku jednu mincu doľava a jednu doprava. Tým vytvorí dve vetvy. My sa pokúsime ukázať, že keby boli vetvy nezávislé od seba, tak hra by skončila — t. j. ak máme izolovanú vetvu, tak hra postupne dospeje do stavu, že žiaden indián nemôže spraviť ťah. Potom ukážeme, že tieto dve vetvy sa určite nespoja. Keď sa nám toto podarí ukázať, tak to znamená, že hra určite skončí.
Tak poďme na to. Chceme ukázať, že v jednej vetve hra určite skončí. Vetvu si môžeme predstaviť ako rad indiánov — na kraji je Sinetu a za ním konečný počet indiánov. Hra sa hrá rovnako len s tým, že keď robí ťah Sinetu, tak jednu mincu odhodí a jednu pošle susedovi.
Očíslujme si indiánov postupne takto (začneme Sinetuom): $1, 2, 4, 8\ldots$ a definujme si S ako súčet hodnôt mincí, pričom hodnota mince je rovná číslu indiána, u ktorého sa práve nachádza. Všimnime si, že hodnota S každým ťahom rastie (premyslite si). Tým, že S stále rastie zaručíme, že hra sa nikdy nevráti do stavu, v ktorom už bola. A keďže máme konečný počet mincí a indiánov, hra má aj konečný počet stavov, v ktorých sa môže nachádzať. Táto hra teda určite skončí. Tým sme ukázali, že v jednej izolovanej vetve hra vždy skončí.
Ešte potrebujeme ukázať, že tieto vetvy sa nespoja, t. j. že ak sa napr. ľavá vetva dostala k nejakému indiánovi, tak pravá vetva sa nemohla dostať ďalej ako k ľavému susedovi tohto indiána.
Bez ujmy na všeobecnosti priraďme minciam hodnoty od 1 po n a zaveďme takéto pravidlo: indián, ktorý je na ťahu, pošle vždy svoju najhodnotnejšiu mincu doľava a svoju najmenej hodnotnú mincu doprava.
Definujme vzdialenosť ako dĺžku cesty od jedného indiána k druhému, pričom ak sú z rôznych vetiev, tak tá cesta ide cez Sinetua. Vzdialenosť mincí x a y označme $\mathrm{d}(x, y)$.
Ukážeme, že pre ľubovoľné dve mince s hodnotami x a y platí $\mathrm{d}(x, y) \le |x - y| + 1$. Pôjdeme na to indukciou vzhľadom na počet ťahov. Zároveň dokážeme, že mince sú počas celej hry usporiadané zľava doprava od najvyššej hodnoty po najnižšiu.

1° Po 0 ťahoch (t. j. na začiatku hry) sú vzdialenosti všetkých mincí 0, takže nerovnosť zjavne platí. Zároveň sú mince usporiadané.

2° Teraz predpokladajme, že po k ťahoch to platí a poďme ukázať, že to bude platiť aj po $(k + 1)$-vom ťahu. Vyberme si nejakého indiána, ktorý má aspoň dve mince. Jeho najhodnotnejšiu mincu označme x a najmenej hodnotnú y.
Z indukčného predpokladu pre každú mincu z platí $\mathrm{d}(y, z) \le |y - z| + 1$. Keď teraz posunieme mincu x doľava, pre mince z napravo od x bude platiť $\mathrm{d}(x, z) = \mathrm{d}(y, z) + 1$. Vďaka tomu, že mince sú usporiadané podľa hodnoty, bude tiež platiť $|y - z| < |x - z|$, resp. $|y - z| + 1 \le |x - z|$. Keď to dáme dokopy, dostaneme
$$\mathrm{d}(x, z) = \mathrm{d}(y, z) + 1 \le |y - z| + 1 + 1 \le |x - z| + 1,$$
čo sme chceli ukázať.
Pre mince z naľavo od x sa muselo $\mathrm{d}(x, z)$ zmenšiť (mincu x sme posunuli bližšie k z), takže nerovnosť isto platí. Nakoniec pre mince z u toho istého indiána ako x triviálne platí $\mathrm{d}(x, z) = 0 \le |x - z| + 1$.
Podobne to bude s posunutím mince y doprava (premyslite si to).
Ešte treba overiť, či sa zachová poradie mincí. Stačí si uvedomiť, že pre indiána naľavo bude minca x jeho najmenej hodnotná (z indukčného predpokladu nemôže mať menej hodnotnú mincu), a pre indiána napravo bude minca y jeho najhodnotnejšia.

Ukázali sme teda, že platí $\mathrm{d}(x, y) \le |x - y| + 1$. Hodnota $|x - y|$ je maximálna pre $x = n$ a $y = 1$ a teda $\mathrm{d}(x, y) \le n$. To znamená, že vzdialenosť dvoch mincí je maximálne n a teda ľavá a pravá vetva sa nestretnú.

<u>**Úloha č. 9:**</u> *Monty presvedčil indiánov, aby sa hru hrali iba s 1893 mincami, a tak sa už po chvíli mohol porozprávať so Sinetuom. Podelil sa s ním o svoje zážitky a vyložil mu, čo má v pláne. Sinetu ihneď súhlasil, že mu pomôže a odbehol sa zbaliť. Monty išiel zatiaľ pozrieť miestneho šamana. Ten si Montyho a jeho bystrú hlavu už dávno obľúbil, a tak mu rovno zadal jeho najnovšiu úlohu. Monty má dokázať, že pre každé prirodzené číslo n, väčšie ako jedna, existuje n rôznych prirodzených čísel spĺňajúcich nasledovnú podmienku: pre ľubovoľné dve čísla a, b z tejto n-tice platí, že $a - b$ delí $a + b$. Nebuďte mrchožrúti a dokážte to aj vy.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Berenito a Mišo)
Z toho, že rozdiel dvoch čísel delí ich súčet, ľahko zistíme, že väčšie číslo je najviac trojnásobkom menšieho. (Vyplýva to z toho, že n nikdy nemá deliteľov medzi $n/2$ a n. Premyslite si to.) V riešení to síce nevyužijeme, ale získame predstavu, že tie čísla sú relatívne blízko seba (najväčšie je najviac trojnásobkom najmenšieho). Navyše, veľa kombinácií deliteľností nám napovedá, že tie čísla budú asi dosť veľké.
Sú dva spôsoby ako riešiť úlohy tohto typu. Buď nájdeme všeobecné riešenie pre n prvkov, alebo budeme pridávať po jednom čísle. My si ukážeme druhú možnosť.
Najprv ukážeme, že to ide pre malé n. Množiny $\{1, 2\}$ a $\{2, 3, 4\}$ isto vyhovujú, takže $n = 2$ a $n = 3$ máme vybavené. Teraz predpokladajme, že pre n prvkov to vieme. Keďže najväčšie je najviac trojnásobkom najmenšieho, určite musíme čísla zväčšiť. Aby sme si nepokazili deliteľnosti, budeme ich zväčšovať o súčin ich všetkých (najmenší spoločný násobok by tiež postačil). Máme teda n-prvkovú množinu $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, ktorá spĺňa podmienku (teda $a_i - a_j$ delí $a_i + a_j$). Súčin jej prvkov si označme N. Ďalšia množina bude tvorená týmito prvkami zväčšenými o N (t. j. $a_i + N$) a samotným N. Overme si, či vyhovuje.

- Platí to pre každé dva prvky $a_i + N$, $a_j + N$?
  Ich rozdiel $(a_i + N) - (a_j + N) = a_i - a_j$ podľa predpokladu delí $a_i + a_j$ a zatiaľ predpokladajme, že aj N. Súčet $(a_i + N) + (a_j + N) = a_i + a_j + 2N$ ním bude teda tiež deliteľný.
- Platí to pre N s ľubovoľným ďalším prvkom?
  Rozdiel $(a_i + N) - N = a_i$ delí a_i aj N, takže delí aj súčet $(a_i + N) + N$.

Ešte ostáva overiť, či $a_i - a_j$ delí N. Vo všeobecnosti to neplatí. Naše dvoj– a trojprvkové množiny to však zatiaľ spĺňajú, skúsme teda zistiť, či sa táto vlastnosť prenáša.
Budeme musieť do predpokladov zahrnúť, že táto vlastnosť platí. Máme teda $(n + 1)$-prvkovú množinu s prvkami $a_i + N$ a N, ktorá vyhovuje. Súčin všetkých jej prvkov si označme M. Ďalšia množina bude obsahovať prvky $a_i + N + M$, $N + M$ a M. Predchádzajúce úvahy platia aj tu, ostáva už iba overiť, či $(a_i + N + M) - (a_j + N + M)$ delí M. Tento rozdiel však ostáva stále rovný $a_i - a_j$, čo z predpokladu delí N, čo je deliteľom M, takže to platí.
Ak teraz nájdeme také množiny, kde jedna vychádza z druhej a rozdiel ľubovoľných dvoch prvkov delí súčin všetkých, tak sme hotoví. $\{1, 2\}$ a $\{2, 3, 4\}$ vyhovujú, takže máme dokázanú aj túto časť.

<u>**Úloha č. 10:**</u> *Monty sa rozlúčil so Šamanom a spolu so Sinetuom sa vydal na dlhú púť do New Orleans. Na cestu si so sebou chceli vziať všetky funkcie f, ktoré sú z reálnych čísel do reálnych a pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí nasledovný vzťah:*

$$f(yf(x + y) + f(x)) = 4x + 2yf(x + y).$$

Pomôžte im a nájdite všetky takéto funkcie.

<u>Riešenie:</u> (opravovala Vodka a Viktor)
My vieme, že naša rovnica platí, pre všetky x, y. Funkcionálky sa často riešia tak, že si za ne dosadíme nejaké konkrétnejšie čísla a z toho skúsime niečo zistiť. Tak skúsme napríklad $y = 0$. Dostaneme $f(f(x)) = 4x$. Z toho okamžite vidno, že naša funkcia je prostá. Prečo? Nuž keby $f(x_1) = f(x_2)$ tak aj $4x_1 = f(f(x_1)) = f(f(x_2)) = 4x_2$, a teda $x_1 = x_2$. Síce ešte nevieme na čo nám to bude, no zisťovať vlastnosti funkcie sa (skoro) vždy oplatí. Tak dosadzujme ďalej. Po dosadení aj $x = 0$ máme $f(f(0)) = 0$. Po dosadení $x = f(0)$ máme $4f(0) = f(f(f(0))) = f(0)$. Z toho $f(0) = 0$.
Ešte môžeme do pôvodnej rovnice dosadiť $x = 0$. Potom s využitím $f(0) = 0$ máme $f(yf(y)) = 2yf(y)$. Nuly sme už dosadili kde sa len dalo, tak skúsme teraz dosadiť $y = 1$ do posledného vzťahu: $2f(1) = f(f(1)) = 4$, odkiaľ $f(1) = 2$. A keďže $f(f(1)) = 4$, máme $f(2) = 4$.
Už máme funkčnú hodnotu v troch bodoch, čas už robiť niečo všeobecnejšie. Dosaďme x ľubovoľné a $y = 1 - x$:

$$f((1 - x) \cdot 2 + f(x)) = 4x + 2(1 - x) \cdot 2 = 4 = f(2).$$

A teraz príde tá chvíľa, keď využijeme, že f je prostá, lebo potom $(1 - x) \cdot 2 + f(x) = 2$, z čoho dostávame, že $f(x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Toto všetko boli samozrejme len nutné podmienky, preto treba ešte urobiť skúšku správnosti. A tá sedí, lebo $2(2y(x + y) + 2x) = 4x + 2 \cdot 2y(x + y)$.
Vyhovuje jediná funkcia a to $f(x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	4	5	6	7	8	9	10	p	s	$\sum$
1.	Bialas Filip	1.	GOp Praha	2	9	9		9		9	9		45	90
2.	Oravkin Eduard	2.	1SG BA	4	9	9	9	9	4		9		45	87
3.	Súkeník Peter	2.	GVar ZA	3	7	9	9	7	9				41	82
3.	Švarc Radovan	3.	Česká Třebová	6		1	9	9	9		9		37	82
5.	Mišlanová Kristína	2.	GAlej KE	4	9	9	9	9					36	81
5.	Semanišinová Žaneta	2.	GAlej KE	4	9	9	9	9					36	81
7.	Micheľová Henrieta	2.	GAlej KE	4	9	9	9	9					36	78
8.	Liu Zhen Ning Dávid	3.	GJH BA	9			9	9	9		9		36	76
8.	Sučíková Katarína	2.	BMA, Essex	3	9	9	9	7	0				34	76
10.	Kulla Filip	2.	BiG Sučany	4	9	9	9	9	2				38	74
11.	Frankovská Zuzana	2.	Gamča BA	3	9	9	9	4	0				31	73
11.	Molčan Samuel	2.	GJAR PO	3	7	8	9	9	2				35	73
11.	Tódová Lucia	2.	GPár NR	4	7	8	4	9		3			31	73
14.	Darmovzal Ondřej	3.	Brno ČR	3	9	9	9	9					36	72
14.	Horváth Samuel	4.	GPár NR	9			9	9	3	9	9		39	72
16.	Ralbovský Peter	2.	ŠPMNDG BA	4	8	9	9	7	3				36	70
17.	Bodík Juro	2.	Gamča BA	4	9	5	4	9	1				28	68
18.	Onduš Daniel	2.	GAlej KE	3	9	9	9	9	0				36	67
19.	Tesař Emanuel	2.	GBST LC	4	9	8	9	7	0		2		35	66
20.	Hanzely Slavomír	2.	GJAR PO	4	9	6	2	6	4				27	65
20.	Krakovská Ema	3.	Gamča BA	5		9	9	9	3				30	65
20.	Puza Marko	4.	GPoš KE	9			9	9	3	9	3		33	65
20.	Sklenka Marek	2.	BiG Sučany	2	9	5		9	2				25	65
24.	Halabrin Juraj	2.	GJH BA	4	7	9	9	1	0	2	0		28	64
24.	Chabanová Barbora	2.	GJGT BB	4	9	8	9	4	0				30	64
24.	Kopf Daniel	2.	G Slez ČR	4	9	9	9	6			1		34	64
24.	Sládeček Michal	2.	GVar ZA	3	7	9	2	4					22	64
28.	Staňo Roman	3.	GPoš KE	3	9	9		8			3		29	63
29.	Choma Matej	2.	Gamča BA	4	9	5	3	9	2				28	62
29.	Krajčiová Katarína	3.	GAlej KE	7		9	2	9					20	62
31.	Králik Matej	3.	GJH BA	7		5	9	8	3		2		27	61
31.	Petráš Peter Pavel Arthur	2.	ŠPMNDG BA	4	8	9	9						26	61
31.	Žídek Matěj	2.	Frýdlant ČR	4	9	8		9		7			33	61
34.	Nepšinská Silvia	3.	GJH BA	6		9	9	7	4		1		30	60
34.	Psota Miroslav	4.	GHlin ZA	10			9	9	3		4		25	60
36.	Mojžišová Karolína	4.	Gamča BA	7		9	5	9					23	59
36.	Trenčanská Tereza	2.	Gamča BA	3	8	8	2	8					26	59
38.	Bačinská Irena	4.	ŠPMNDG BA	7		8	9	9	4	1			31	58
38.	Bui Truc Lam Michal	3.	Gamča BA	9			9	9		8			26	58
38.	Dujava Matej	3.	SPŠE Prešov	3	9	8	4	6	0				27	58
38.	Lipovský Mário	4.	GJH BA	8			9	9	3	6	1		28	58
42.	Bohdal Ondrej	3.	GJH BA	7		9		9			1		19	57
42.	Hronkovičová Nina	3.	GKom PE	5		9	9		3				21	57
42.	Kurimský Ján	2.	GsvMo	4	9	9	1	9					28	57
42.	Pieš Adrián	4.	ŠPMNDG BA	6		2	9	9	3				23	57
42.	Pišťák Daniel	2.	GChD Praha	2	7	8	9	9					33	57
47.	Szalay Erik	4.	ŠPMNDG BA	6		4	9	9	3				25	56
47.	Šimková Ľudmila	4.	GPár NR	11				9	3	9	2		23	56
49.	Steinhauser Václav	0.	G Dacice	0	9	0	9	7	3				28	55
50.	Kluvanec Roman	3.	GPár NR	5		7	2	9	3				21	54
50.	Kojda Jakub	2.	ŠPMNDG BA	4	3	9	4	5	2				23	54

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	4	5	6	7	8	9	10	p	s	$\sum$
50.	Svoboda Jakub	4.	G Hav CR	6		8		9	5		2		24	54
53.	Konček Marián	3.	G1.máj MA	5		8	3	9					20	52
53.	Santrová Michaela	3.	GMH Trstená	7		9	3	9	2				23	52
55.	Hollý Dominik	3.	ŠPMNDG BA	4	8	9							17	51
56.	Batmendijn Eduard	3.	CGsvM SL	10			9	9		9			27	50
56.	Kral Adam	2.	GVar ZA	2	9	9	3	4	0				25	50
56.	Steinhauserová Anna	4.	G Dacice	5		0	9	9	3				21	50
59.	Murin Martin	3.	GJH BA	6		7	4	9			0		20	48
60.	Krasula Dominik	1.	Krnov ČR	1	3	2	2		1	6			14	47
60.	Kudelčíková Martina	2.	GVO ZA	4	*	5	9	4					18	47
62.	Dráček František	3.	GŠkol PB	6		8	1	4	0		1		14	46
63.	Kopfová Lenka	-1.	G Slez ČR	-1	9	5							14	45
64.	Kobák Michal	4.	Gamča BA	7		9	9	9					27	43
64.	Tomašec Samuel	4.	GVar ZA	8			8	8	0		1		17	43
66.	Murin Marek	2.	GJH BA	4	2	4	2	4	0				12	42
66.	Ženčuchová Andrea	3.	GJAR PO	4	9	5	2		3	0			19	42
68.	Kováčová Mária	3.	GsvCM NR	4	7	9			2				18	40
68.	Stankovič Miroslav	4.	GPoš KE	13			9	5	3	9			26	40
70.	Krajmerová Barbora	2.	G Šurany	3	8	1	9	4			0		22	37
71.	Magyarová Zuzana	4.	GBST LC	9			2	9	3	3			17	36
72.	Polovka Maroš	4.	GKuk PP	5		9	3	9					21	33
73.	Koščo Marek	4.	GVar ZA	6		5	4	5			1		15	31
74.	Hrivová Ivona	4.	GVO ZA	10			4	5	0		2		11	30
74.	Pavlus Matúš	2.	GBST LC	4									0	30
74.	Pecko Marcel	2.	GBST LC	4	9	1			0				10	30
77.	Kašša Ladislav	2.	G Šamorín	4	0	1	2	9	0				12	28
77.	Krakovská Hana	4.	Gamča BA	8			4						4	28
77.	Štefkovič Ján	4.	G Bánovce	5		9	3		0				12	28
80.	Abaffyová Adela	4.	G Tvrdošín	4						9	9		18	27
80.	Kováčová Barbora	4.	ŠPMNDG BA	7									0	27
80.	Prešinská Kristína	3.	GPár NR	6									0	27
83.	Kňaze Adam	3.	GJCh BR	6		9	3		0				12	26
84.	Madro Oskar	2.	ŠPMNDG BA	2									0	25
85.	Dargaj Jakub	4.	GPoš KE	7									0	24
86.	Burian Benjamín	4.	ŠPMNDG BA	4									0	23
87.	Suchý Daniel	3.	Gamča BA	3									0	22
88.	Vančo Šimon	2.	GsvM PO	2	9	4							13	21
89.	Balážová Michaela	4.	G Bánovce	5									0	20
90.	Matejovičová Tatiana	4.	GJH BA	10									0	19
91.	Fabšíková Nina	2.	1SG BA	4									0	18
91.	Kuchár Martin	4.	G Šamorín	4	9								9	18
93.	Gašpárek Miroslav	4.	SG ZA	4									0	15
94.	Camara Anna	3.	GMet BA	3									0	13
95.	Iždinská Dominika	4.	GJH BA	6									0	6
96.	Svitková Patricia	4.	GLN BA	6		5							5	5

kategória ALFA

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	1	2	3	4	5	6	7	p	s	$\sum$
1.	Steinhauser Václav	0.	G Dacice	0	6	9	9	9	0	9	7		43	88
2.	Kopfová Lenka	-1.	G Slez ČR	-1	8	9	9	9	5				40	85
3.	Pokrývka Milan	1.	G Bánovce	1	4	9	9	9	9				40	84
4.	Horňáková Kristína	1.	GPár NR	1	9	9	9	9	9				45	83
5.	Onduš Daniel	2.	GAlej KE	3			9	9	9	9	9		45	82
6.	Kubala Milan	2.	GJGT BB	2		9	9	7	9		4		38	77
7.	Genči Jakub	1.	GPoš KE	1	6	9	5	9	2				31	74

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**s**	$\sum$
8.	Staňo Roman	3.	GPoš KE	3			9	9	9		8		35	69
9.	Sučíková Katarína	2.	BMA, Essex	3				9	9	9	7		34	67
10.	Frankovská Zuzana	2.	Gamča BA	3				9	9	9	4		31	66
11.	Sklenka Marek	2.	BiG Sučany	2		9		9	5		9		32	64
11.	Súkeník Peter	2.	GVar ZA	3				7	9	9	7		32	64
13.	Bialas Filip	1.	GOp Praha	2				9	9		9		27	63
13.	Molčan Samuel	2.	GJAR PO	3				7	8	9	9		33	63
15.	Darmovzal Ondřej	3.	Brno ČR	3				9	9	9	9		36	60
16.	Pišťák Daniel	2.	GChD Praha	2			9	7	8	9	9		42	58
17.	Sládeček Michal	2.	GVar ZA	3				7	9	2	4		22	55
18.	Krasula Dominik	1.	Krnov ČR	1	5	9	9	3	2	2			28	53
18.	Ľuptáková Sára	1.	GsvFA ZA	1	5	9		9	9				32	53
18.	Zeman Matúš	2.	1SG BA	2			9		9				18	53
21.	Dujava Matej	3.	SPŠE Prešov	3				9	8	4	6		27	52
22.	Halamová Lucia	1.	BiG Sučany	1	6	6	3	3	2				20	51
22.	Pavčík Richard	2.	GJGT BB	2		8	4	9			0		21	51
22.	Trenčanská Tereza	2.	Gamča BA	3				8	8	2	8		26	51
25.	Daniš Dávid	1.	GCSL BA	1		9	3	7	0	1			20	47
26.	Krajmerová Barbora	2.	G Šurany	3			3	8	1	9	4		25	46
27.	Kral Adam	2.	GVar ZA	2				9	9	3	4		25	44
28.	Kollárová Sára	1.	GJGT BB	1	7		3	8		1			19	43
28.	Šajanek Adrián	1.	GCSL BA	1		5	2	7	0				14	43
30.	Škrlec Adam	2.	GJH BA	3				7	7	3	4		21	40
30.	Vančo Šimon	2.	GsvM PO	2		9	3	9	4				25	40
32.	Jankovich Juraj	1.	GJGT BB	1	6	3	1	2			0		12	35
33.	Szabo Michal	2.	GAM TT	3			9	9	0		0		18	34
34.	Escherová Eva	2.	G Bánovce	2		9		3			4		16	32
34.	Koľ Daniel	1.	GPoš KE	1	6	9							15	32
36.	Hreuzek Ján	1.	GCSL BA	1		9	3						12	31
37.	Lihotský Samuel	2.	1SG BA	2									0	30
38.	Terem Tomáš	2.	GJGT BB	2		9	9	8					26	26
39.	Včelková Veronika	3.	GPOH DK	3									0	24
40.	Martinka Matej	2.	SŠsvFA	2									0	23
41.	Madro Oskar	2.	ŠPMNDG BA	2									0	22
41.	Majtán Martin	1.	GPdC PN	1									0	22
41.	Roch Oliver	3.	G Bytca	3			2	7	0	1			10	22
44.	Camara Anna	3.	GMet BA	3									0	16
44.	Suchý Daniel	3.	Gamča BA	3									0	16
46.	Bátrna Jozef	3.	G Bytca	3			3	2					5	15
47.	Petrová Simona	2.	ŠPMNDG BA	2		8	3	1	1				13	13
47.	Sůra Tomáš	2.	1SG BA	2		9	3	1					13	13
49.	Podstavek Daniel	1.	1SG BA	1		6							6	11
50.	Pásková Tina	2.	GCSL BA	2				7					7	7
51.	Michálek Tomáš	3.	G Bytca	3					0				0	6
52.	Kocan Kristián	2.	SPŠE Prešov	2									0	4
52.	Šimová Mária	1.	EGMT	1		3		0	1				4	4
54.	Mičko Juraj	1.	GPoš KE	1									0	0