Vzorové riešenia 2. série zimnej časti KMS 2014/2015

**Úloha č. 1:** *Stanka našla na povale* 27 *rôznych nepárnych prirodzených čísel. Navyše boli všetky menšie než sto. Dokážte, že medzi nimi vieme určite nájsť také dve rôzne čísla, ktorých súčet je* 102*. Ako by to bolo, keby Stanka našla iba* 26 *rôznych nepárnych čísel menších než sto?*

Riešenie: (opravovali Veronika a Lindtka)

Najskôr sa pozrime koľko máme nepárnych čísel menších ako 100. Týchto čísel je 50 (sú to tieto: 1, 3, 5, ..., 97, 99). Pozrime sa koľkými spôsobmi vieme dostať súčet 102.

Súčet 102 vieme dostať súčtom týchto dvojíc čísel $3 + 99$, $5 + 97$, ..., $47 + 55$, $49 + 53$. Týchto spôsobov je 24 a teda máme 24 dvojíc čísel (dvojicu tvoria čísla, ktorých súčet tvorí 102). Môžeme si všimnúť, že čísla 1 a 51 nemáme v žiadnej dvojici. Ak by sme chceli nájsť dvojičku pre 1, museli by sme použiť číslo 101, ktoré je väčšie ako 100. Ak by sme chceli nájsť dvojičku pre 51, tak by sme museli použiť znovu číslo 51, čo však nemôžeme. Čísla 1 a 51 nemôžu tvoriť so žiadnym číslom dvojicu.

Aké čísla môžu byť medzi 27 vybranými? Skúsme čísla vyberať tak, aby medzi nimi nebola žiadna dvojica, ktorá nám dáva súčet 102. Ako prvé vyberieme čísla 1 a 51, lebo o tých vieme, že nemajú dvojičku. Teraz nám zostáva vybrať 25 čísel z 24 dvojíc. Vyberme prvé číslo z nejakej dvojice. Druhé číslo už nemôžeme vybrať z tej istej dvojice. A teda druhé číslo vyberáme už len z 23 dvojíc. Takýmto spôsobom postupne vyberáme čísla. Predposledné číslo vyberáme z poslednej voľnej dvojice. Poslednému číslu sa už však neujde žiadna voľná dvojica Toto číslo už nutne musíme vybrať z už obsadených dvojíc (dvojice, z ktorých jedno číslo sme už vybrali). Toto 27. číslo bude chýbajúca dvojička k už jednému z vybraných 26 čísel. Od začiatku sme sa snažili vyberať čísla tak, aby medzi nimi nebola žiadna dvojica. Nepodarilo sa nám to, takže môžeme s istotou povedať, že Stanka vie nájsť medzi vybranými 27 číslami dve také, ktoré majú súčet 102.

Ak by Stanka vyberala len 26 čísel, tak existuje možnosť že vyberie 24 čísel z 24 dvojíc (z každej dvojice práve jedno) a ešte vyberie čísla 1 a 51. Takže nenájde medzi svojimi vybranými číslami dve čísla so súčtom 102. Teda je možné, že Stanka vybrala takých 26 čísel, že žiadna dvojica nedáva súčet 102. Nevieme aké čísla Stanka vybrala a preto nevieme s istotou povedať či vybrala dvojicu čísel so súčtom 102.

**Úloha č. 2:** *Vieme vyplniť štvorčeky v mriežke* $7 \times 7$ *číslami* 1 *a* $-1$ *tak, aby bol súčin čísel v každom riadku* 1 *a v každom stĺpci* $-1$*? Vieme to isté spraviť v štvorci* $8 \times 8$*?*

Riešenie: (opravovali Plutvička, Mareček, Aňa)

Poďme sa najskôr pozrieť kedy dostaneme kladný a kedy záporný súčin. Keď vynásobíme nepárny počet $(-1)$-tiek, dostaneme $-1$, súčin párneho počtu $(-1)$-tiek dáva výsledok 1. Zjavne pôjde iba o to, ako rozmiestnime $(-1)$-tky (násobenie jednotkou nič nemení). Preto musí byť počet $(-1)$-tiek v každom riadku párny a v každom stĺpci nepárny.

Teraz si rozmyslime koľko $(-1)$-tiek by sme potrebovali v prípade mriežky $7 \times 7$. V každom stĺpci ich máme nepárny počet a stĺpcov máme 7. Sčítavame teda nepárny počet nepárnych čísel, čo je vždy nepárne číslo. Súčet $(-1)$-tiek po stĺpcoch preto bude nepárne číslo, ale súčet $(-1)$-tiek po riadkoch musí byť párne číslo (rozmyslite si prečo). Počet $(-1)$-tiek v tabuľke $7 \times 7$ má byť naraz párne aj nepárne číslo, čo je spor, preto ju nevieme za daných podmienok vyplniť.

Zmení sa niečo v prípade mriežky $8 \times 8$? Tu máme párny počet riadkov aj stĺpcov, takže nevieme dostať spor ako v prípade mriežky $7 \times 7$. Po chvíľke skúšania prídeme na to, že táto mriežka sa dá vyplniť. Možností ako to môžeme urobiť je viacero, napríklad zoberieme mriežku, kde prvý riadok sú samé $-1$ a všetko ostatné 1.

Iné riešenie:

Veľmi pekným spôsobom ako sa dá prísť na to, že pre $7 \times 7$ mriežku to nejde, je pozrieť sa na súčin všetkých čísel v mriežke. Súčin v každom riadku je 1, v celej mriežke teda $1^7 = 1$. Avšak súčin v každom stĺpci je $-1$, spolu $(-1)^7 = -1$, čo sa nerovná 1, takže máme opäť spor. Argumenty pre mriežku $8 \times 8$ sú rovnaké ako v prvom riešení.

**Úloha č. 3:** *Jefo našiel v skrini starožitný lichobežník* $ABCD$ *so základňami* $AB$ *a* $CD$*. Priesečník jeho uhlopriečok bol označený* $X$*. Zachovalo sa o ňom niekoľko informácií. Dĺžka strany* $AB$ *je šesť centimetrov, obsah trojuholníka*

*$CDX$ je jeden centimeter štvorcový a vzdialenosť bodu $X$ od priamky $AB$ je tri centimetre. Pomôžte Jefovi zahrať sa na historika a zistite obsah tohto lichobežníka.*

Riešenie: (opravovali Ivka a Kajo)

Všimnime si trojuholníky $ABX$ a $CDX$. Uhly $AXB$ a $CXD$ sú vrcholové, teda majú rovnakú veľkosť a dvojice uhlov $XCD$ a $XAB$, resp. $XDC$ a $XBA$ sú striedavé a teda tiež sú navzájom rovnaké. Z toho vyplýva, že tieto dva trojuholníky sú podobné.

V trojuholníku $ABX$ je pomer výšky ku strane $3 : 6 = 1 : 2$, teda tento istý pomer musí platiť aj v trojuholníku $CXD$. Využijeme ešte fakt, že obsah trojuholníka $CXD$ je 1. Teda platí:

$$\frac{|CD| \cdot v_{CD}}{2} = 1$$
$$|CD| \cdot v_{CD} = 2.$$

Označme si $|CD| = 2a$, potom $v_{CD} = a$.

$$2a \cdot a = 2$$
$$a^2 = 1$$
$$a = 1$$

Teda $v_{CD} = a = 1$ a $|CD| = 2a = 2$. Zo zadania vieme, že $v_{AB} = 3$, a keďže $v_{CD} = 1$ môžme vyrátať veľkosť výšky celého lichobežníka: $v_{ABCD} = 1 + 3 = 4$. Teraz nám už nič nebráni vypočítať obsah lichobežníka $ABCD$:

$$\frac{v_{ABCD} \cdot (|AB| + |CD|)}{2} = \frac{4 \cdot (6+2)}{2} = \frac{32}{2} = 16.$$

**Úloha č. 4:** *Vodkovi sa zunovalo hrať sa s hračkami, a tak sa začal hrať s číslami. Rozhodol sa nájsť všetky také dvojice kladných celých čísel $(a, b)$, že číslo $a^b + b$ delí číslo $a^{2b} + 2b$. Vedeli by ste ich nájsť aj vy?*

Riešenie: (opravovali Hanka a Hago)

Väčšina z vás našla správne riešenie, no s dokazovaním toho, že je jediné ste mali problémy. Pozrime sa teda, ako to mohlo vyzerať.

Vieme, že ak $a^b+b$ delí $a^{2b}+2b$, tak $a^b+b$ musí deliť aj $a^{2b}+2b+k\cdot(a^b+b)$ pre každé celé číslo $k$. Takže $a^b+b$ má deliť $(a^{2b}+2b-a^b\cdot(a^b+b)) = -a^b b+2b$. Podobne musí platiť aj, že $a^b+b$ delí $(-a^b b+2b+b\cdot(a^b+b)) = b\,(b+2)$. Dospeli sme k tomu, že $a^b+b$ má deliť $b\,(b+2)$. Oba tieto výrazy sú určite kladné, takže musí platiť, že $a^b+b \leq b\,(b+2)$.

Teraz skúsime dosadzovať za $b$ postupne čísla od 1.

- Ak $b = 1$, tak zo zadania dostávame, že $a^1 + 1$ má deliť $1 \cdot (1+2) = 3$. Číslo 3 delia len čísla 1 a 3. Keďže $a$ je kladné, tak zjavne $a + 1 > 1$, teda musí platiť, že $a + 1 = 3$, odkiaľ $a = 2$. Dvojica $b = 1$ a $a = 2$ je teda vyhovujúca.
- Pozrime sa na možnosť, keď $b = 2$. Potom $a^2 + 2$ má deliť $2 \cdot (2 + 2) = 8$. Určite teda musí platiť $a^2 + 2 \leq 8$, čo platí len pre $a < 3$.
  - Keď $a = 1$, tak $(1^2 + 2) = 3$ má deliť číslo 8, čo zjavne nie je pravda.
  - Keď $a = 2$, tak $(2^2 + 2) = 6$ má deliť číslo 8, čo tiež nie je pravda.

  Ani jenda z možností nevyhovuje zadaniu.
- Pozrime sa, čo sa stane, keď $b = 3$. V tomto prípade má $a^3+3$ deliť $3\cdot(3+2) = 15$. Podobne ako v minulom prípade vieme, že $a^3 + 3 \leq 15$, čo platí len pre $a < 3$. Po dosadení $a = 1$ a $a = 2$ nám to opäť nevyjde.
- Rovnako to overíme pre $b = 4$ a zistíme, že aj pre to môžeme za $a$ dosadiť len 1 alebo 2 a ani pre jedno to nevyjde.
  Už tušíme, že iné riešenia zrejme existovať nebudú, ale samozrejme to chceme dokázať.
- Pozrime sa teraz podrobnejšie na $b = 5$. V tomto prípade dospejeme k tomu, že má platiť $a^5 + 5 \leq 35$. Toto však platí len pre $a = 1$. Po dosadení to však nevychádza.

V tomto momente už stačí len dokázať, že aj pre ľubovoľné $b$ väčšie ako 5 bude jediná možnosť na dosadenie za $a$ číslo 1, a že pre $a = 1$ nevieme nájsť riešenie nech je $b$ ľubovoľné. Tak poďme na to.

Ak $b = 5$ a $a = 2$, tak $b\,(b+2) < a^b + b$, lebo $35 < 37$. Ak by sme zvyšovali $a$, tak pravá strana bude len narastať a ľavá sa nezmení.

Vieme teda, že pre $a > 1$ a $b = 5$ platí $b\,(b + 2) < a^b + b$. Upravme teraz nerovnicu a odčítajme $b$ z každej strany, dostaneme $b\,(b+1) < a^b$. Pozrime sa teraz na to, ako sa zmenia obe strany tejto nerovnice, keď zväčšíme hodnotu $b$ na $b + 1$.

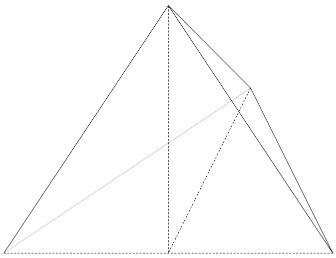
Ľavá strana sa z $b\,(b+1)$ zmení na

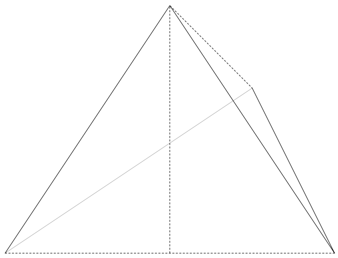
$$(b+1)\,(b+2) = \frac{b+2}{b} \cdot b\,(b+1) = \left(1 + \frac{2}{b}\right) \cdot b\,(b+1).$$

Pravá strana nerovnice sa z $a^b$ zmení na $a^{b+1} = a \cdot a^b$.
Vidíme teda, že hodnota pravej strany sa $a$-krát zväčšila oporoti pôvodnému stavu, teda pre $a \geq 2$ minimálne 2-krát. Zatiaľ čo ľavá strana sa zväčšila len $(1 + 2/b)$-krát, čo je pre $b \geq 5$ určite menej ako 2. Vidíme teda, že väčšia strana nerovnice sa násobí väčším číslom ako menšia strana, takže nerovnosť sa so zvyšujúcim sa $b$ nezmení. Takže pre $b \geq 5$ a $a \geq 2$ neplatí $a^b + b \leq b\,(b+2)$, čo znamená, že taká dvojica čísel nemôže vyhovovať zadaniu.
Teraz ešte dokážeme, že pre $a = 1$ neexistuje riešenie nech je $b$ ľubovoľné a budeme hotoví.
Po dosadení $a = 1$ dostaneme, že $1 + b$ má deliť $b\,(b+2)$. Potom ale $1 + b$ musí deliť aj $b\,(b+2) - b \cdot (1+b) = b$, z čoho je na prvý pohľad vidno, že deliteľ je väčší ako delenec, a teda riešenie nemôže existovať.
Jediná dvojica kladných čísel $(a, b)$ vyhovujúca zadaniu je $a = 2$ a $b = 1$.

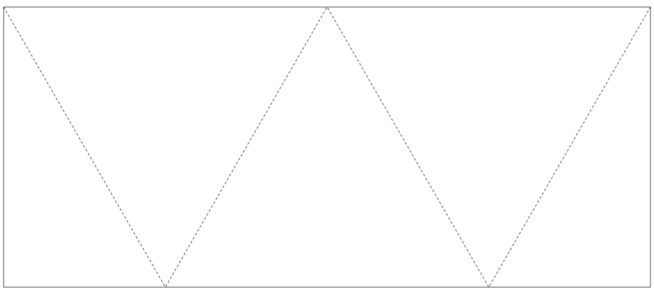
**<u>Úloha č. 5:</u>** *Mišo má z papiera zlepený model pravidelného štvorstena. Rozhodnite, či môžeme model rozrezať pozdĺž troch úsečiek tak, aby ho potom bolo možné rozvinúť do roviny a vznikol pritom obdĺžnik. Existujú pre pravidelný štvorsten dva uvažované spôsoby rozrezania, pri ktorých vzniknú nezhodné obdĺžniky?*

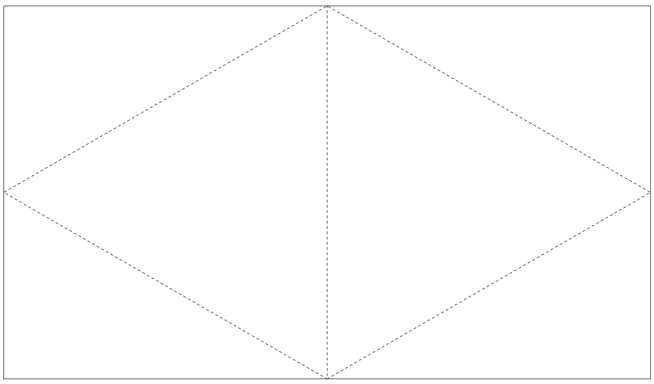
<u>Riešenie:</u> (opravovala Betka)
Väčšina z vás riešila tento príklad len systémom pozriem vidím, prípadne ste si svoje nápady vystrihli a niektorí ich aj poslali pripnuté k riešeniu.
Vieme, že potrebujeme vytvoriť našimi tromi rezmi 4 vrcholy pri ktorých je pravý uhol. Prvé čo príde na um je urobiť rez cez výšku nejakej steny, pretože takto si vytvoríme dva pravé uhly. Aby sme však tie vrcholy vedeli „rozbaliť“ do roviny, musíme rozrezať aj príslušnú hranu, na ktorú sme spravili výšku. Zostáva nám už len jeden rez, a ten musíme umiestniť tak, aby sme vytvorili zvyšné dva vrcholy. Keď sa trochu pohráme, všimneme si, že buď môžme rozrezať znovu výšku steny, alebo ešte hranu. Na obrázku sú naznačené obidve možnosti.





Overíme si aj experimentálne, že tie štvorsteny naozaj vieme postrihať takýmto spôsobom. Vystrihnite si obdĺžniky z obrázka (strihajte iba po hrubej čiare) a zohnite ich po čiarkovanej.





Samotné obdĺžniky stačí priložiť na seba, a vidno, že sú rôzne. Jeden obdĺžnik má totiž rozmery $v \times 2\,s$ a druhý $s \times 2\,v$, kde $s$ je strana štvorstena a $v$ je výška jeho steny. A keďže ide o rovnostranný trojuholník, tak vieme že $v$ a $s$ majú rôzne dĺžky.
Takže naozaj vieme rozrezať štvorsten tromi rezmi tak, aby vznikli dva nezhodné obdĺžniky.

**Úloha č. 6:** *Linda si z roztopaše napísala výraz*

$$15 : 14 : 13 : 12 : 11 : 10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2.$$

*Teraz by doňho chcela doplniť zátvorky*[1] *tak, aby dostala čo najmenšie prirodzené číslo.*[2] *Ako to má spraviť a aké číslo dostane?*

Riešenie: (opravovali Ľubo a JeFo)
Je dobré si uvedomiť, že výraz zo zadania si vieme zapísať ako zlomok s jednou zlomkovou čiarou a pomocou zátvoriek môžeme manipulovať s tým, čo bude v čitateli a čo v menovateli takéhoto zlomku.
Zoberieme si napríklad čísla 12, 6 a 2.

$$12 : 6 : 2 = \frac{12}{6 \cdot 2} = 1$$
$$12 : (6 : 2) = \frac{12}{\frac{6}{2}} = \frac{12 \cdot 2}{6} = 4$$

Čísla zo zadania $(15, \ldots, 2)$ chceme rozdeliť na dve skupiny (tie čo budú v čitateli a tie čo budú v menovateli). Súčin čísel v čitateli musí byť väčší ako súčin čísel v menovateli. Zároveň menovateľ musí deliť čitateľa bezo zvyšku. Aby to platilo, rozklad čitateľa na prvočísla musí obsahovať všetky prvočísla aspoň v rovnakej mocnine ako menovateľ. Zároveň chceme aby podiel čitateľa a menovateľa bol čo najmenší. Preto by sme boli radi, aby mocnina každého prvočísla v rozklade čitateľa bola najviac o jedno väčšia ako v rozklade menovateľa.
Vieme to dosiahnuť a aký môže byť najmenší podiel?
Napíšme si jednotlivé prvočíselné rozklady. Dostaneme:

$$(3 \cdot 5) : (2 \cdot 7) : (13) : (2 \cdot 2 \cdot 3) : (11) : (2 \cdot 5) : (3 \cdot 3) : (2 \cdot 2 \cdot 2) : (7) : (2 \cdot 3) : (5) : (2 \cdot 2) : (3) : (2)$$

Zistíme si, koľko krát sa nám v tomto zápise nachádza každé prvočíslo. Dvojka sa nachádza 11-krát, trojka 6-krát, päťka 3-krát, sedmička 2-krát, 11 a 13 sa nachádzajú len raz. Keďže dvojok je jedenásť, mohlo by sa nám ich vykrátiť desať. Trojky by sa mohli vykrátiť všetky, keďže ich je párny počet. To isté platí aj pre sedmičky. Z pätiek sa mohli dve vykrátiť a jedna nám ostane a 11 a 13 máme len raz, takže tie nám tiež ostanú. Čiže najmenšie možné číslo ktoré môžeme dostať by mohlo byť:

$$2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 = 1430$$

Ešte musíme zistiť, či takéto číslo vieme dosiahnuť. Všimnime si, že 15 musíme mať v čitateli a 14 v menovateli (rozmyslite si prečo). Ostatné čísla dopĺňame tak, aby nám po vykrátení ostali iba 2, 5, 11 a 13. Vieme to spraviť viacerými spôsobmi, jeden z nich je napríklad tento:

$$\frac{15 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4}{14 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}$$

Otázkou ostáva, či vieme výraz uzátvorkovať tak, aby sa dal upraviť na požadovaný zlomok. Premyslite si, ako sa zo zlomku dá vytvoriť uzátvorkovanie. Opäť máme viacero možností, jednou z nich je napríklad:

$$15 : (14 : 13 : 12 : 11 : 10) : 9 : (8 : 7 : 6) : (5 : 4) : 3 : 2$$

**Úloha č. 7:** *Dominika omylom vymkol vrátnik cez noc v škole, a tak si na tabuľu napísal výraz*

$$2014^2 + 2015^2 + 2016^2 + \cdots + n^2,$$

*kde $n$ je prirodzené číslo väčšie než* 2014. *Ukážte, že existuje také $n$, pre ktoré dokážeme výmenou niektorých znamienok $+$ za znamienko $-$ zmeniť hodnotu výrazu na tabuli na* 2014.

Riešenie: (opravovali Mojo a Palo)
Najprv si všimnime, že pre ľubovolné číslo $k$ platí

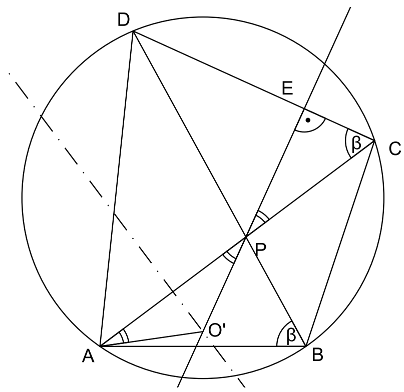
$$-k^2 + (k+1)^2 + (k+2)^2 - (k+3)^2 = -k^2 + (k^2 + 2k + 1) + (k^2 + 4k + 4) - (k^2 + 6k + 9) = -4.$$

[1] Zátvorky sa nedajú dopĺňať medzi cifry jedného čísla, vždy musia byť pred alebo za číslom.
[2] Pri časti bez zátvoriek delíme vždy zľava, napríklad $12 : 6 : 2 = 1$.

Rovnako, ak vymeníme znamienka, vieme dostať číslo $-4$. To znamená, že ak nájdeme $n$, pre ktoré dáva výraz zo zadania zvyšok $m$ po delení 4, tak postupným pripočítavaním (alebo odpočítavaním) štvorky viem dosiahnuť ľubovoľné číslo, ktoré dáva zvyšok $m$ po delení 2014 (rozmyslite si ako). Zároveň 2014 dáva zvyšok 2 po delení 4. Stačí teda nájsť také vhodné poradie plusov a mínusov, aby číslo $2014^2 \pm 2015^2 \pm ... \pm l^2$ dávalo zvyšok 2 po delení 4 a potom doplniť dostatok štvoríc s poradím znamienok mínus, plus, plus, mínus (alebo plus, mínus, mínus, plus, ak je začiatok menší ako 2014), aby sme sa dostali k 2014.
Stačí si všimnúť, že číslo $2014^2 + 2015^2 + 2016^2 + 2017^2$ tento zvyšok dáva a teda želané $n$ existuje.

**Úloha č. 8:** *Veronika sa vo voľných chvíľach zahráva s geometriou. Tá na ňu uvrhla nasledujúci problém a zakliala ju až do doby, kým ho niekto nevyrieši.*
*Diagonály $AC$ a $BD$ tetivového štvoruholníka[3] $ABCD$ sa pretínajú v bode $P$. Bod $O$ je stred opísanej kružnice $ABP$ a $H$ je priesečník výšok trojuholníka $CDP$. Odkľajte Veroniku a dokážte, že body $H$, $P$ a $O$ ležia na jednej priamke.*

Riešenie: (opravovali Hiphop a Ľudka)
Úloha sa dala riešiť rôznymi spôsobmi. Ukážeme si dva z nich. Ak chceme ukázať, že priesečník výšok trojuholníka $CDP$, stred opísanej kružnice trojuholníka $ABP$ a bod $P$ ležia na priamke, stačí ukázať, že výška na stranu $CD$ v trojuholníku $CDP$ prechádza stredom opísanej kružnice trojuholníka $ABP$ (rozmyslite si prečo). Nech $E$ je päta výšky na stranu $CD$ v trojuholníku $CDP$. Priesečník osi strany $AP$ s výškou $EP$ označme $O'$. Chceme ukázať, že $O'$ je stred opísanej kružnice trojuholníka $ABP$ (teda, že je to bod $O$). Uhol $ABD$ označme $\beta$.




Rozoberme najprv prípad, keď uhly $PDC$ a $PCD$ nie sú tupé. Z obvodových uhlov dostaneme

$$|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ACD| = \beta.$$

Trojuholník $PEC$ je pravouhlý. Teda

$$|\sphericalangle APO'| = |\sphericalangle CPE| = 90^\circ - |\sphericalangle PCE| = 90^\circ - \beta.$$

Bod $O'$ leží na osi strany $AP$. Preto trojuholník $APO'$ je rovnoramenný. Teda

$$|\sphericalangle PAO'| = |\sphericalangle APO'| = 90^\circ - \beta \qquad \text{a} \qquad |\sphericalangle AO'P| = 180^\circ - |\sphericalangle PAO'| - |\sphericalangle APO'| = 2\beta.$$

Tetive $AP$ opísanej kružnice trojuholníku $ABP$ prislúcha obvodový uhol $\beta$ a stredový uhol $2\beta$. Keďže uhol $AO'P$ má veľkosť $2\beta$ a bod $O'$ leží na osi tetivy $AP$, bod $O'$ musí byť totožný so stredom opísanej kružnice trojuholníka $ABP$.
Stačí nám už len vyriešiť prípad, kedy jeden z uhlov $PCD$ a $PDC$ je tupý. Rozoberme prípad, keď uhol $PCD$ je tupý (pre uhol $PDC$ to vyjde analogicky). Bod $E$ leží mimo strany $CD$ (na priamke $BC$ za bodom P). Budeme postupovať podobne, ako v prvej časti riešenia. Rozmyslite si jednotlivé kroky:

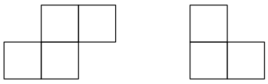
$$|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ACD| = \beta,$$
$$|\sphericalangle APO'| = |\sphericalangle CPE| = 90^\circ - (180^\circ - |\sphericalangle PCE|) = \beta - 90^\circ,$$
$$|\sphericalangle PAO'| = |\sphericalangle APO'| = \beta - 90^\circ,$$
$$|\sphericalangle AO'P| = 180^\circ - |\sphericalangle PAO'| - |\sphericalangle APO'| = 360^\circ - 2\beta.$$

Tetive $AB$ prislúcha stredový uhol, ktorý je doplnok do $360^\circ$ k uhlu $AO'P$, teda uhol $2\beta$. Bod $O'$ je teda stred opísanej kružnice trojuholníka $ABP$.

Iné riešenie:
Ukážeme si aj náznak iného riešenia založeného na mocnosti bodu ku kružnici. Využijeme tvrdenie, že všetky body v rovine, ktoré majú rovnakú mocnosť k nejakým dvom kružniciam $k, l$ tvoria priamku kolmú na stredy kružníc $k, l$. Špeciálny prípad takejto priamky je napr. chordála kružníc $k, l$. Pozrime sa na náš príklad. Chceli by sme dokázať, že priamka $OP$ je kolmá na priamku $CD$. Zjavne by stačilo, že rozdiel mocností bodu $C$ k nejakým dvom kružniciam so stredmi v bodoch $O, P$ je rovnaký ako rozdiel mocností bodu $D$ k týmto dvom kružniciam. Ako kružnicu so stredom v $O$ si zvoľme kružnicu opísanú trojuholníku $ABP$, a za kružnicu so stredom v bode $P$ si zvoľme bod $P$ (kružnicu s polomerom 0). Dokončiť to už zaiste zvládnete sami.

**Úloha č. 9:** *Hopko si z Ameriky objednal šachovnicu s rozmermi $7 \times 7$ a začal ju dláždiť, hneď ako ju dostal. K dispozícii mal dva typy dlaždičiek: S-ko zložené zo štyroch dlaždičiek a L-ko zložené z troch dlaždičiek.*

[3] Tetivový štvoruholník je taký, ktorému sa dá opísať kružnica.

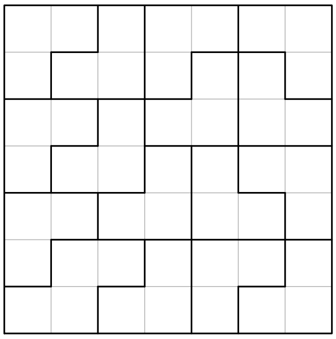


*Dokážte, že ak chce Hopko takýmito dlaždičkami kompletne vydláždiť celú šachovnicu (bez prekryvov a bez kúskov vyčnievajúcich zo šachovnice), tak musí použiť práve jednu $S$-kovú dlaždičku.*

Riešenie: (opravovala Stanka)

Najprv nájdeme dláždenie s práve jednou $S$-kovou dlaždičkou (ďalej len $S$-kom) a s niekoľkými $L$-kovými dlaždičkami (ďalej len $L$-kami). Potom si ukážeme, že s menej ani s viac ako s jedným $S$-kom (a niekoľkých $L$-iek) sa vydláždiť Hopkova šachovnica nedá. Tým ukážeme, že pre kompletné dláždenie Hopko musí použiť práve jedno $S$-ko.

Jedno z dláždení s práve jedným $S$-kom je takéto:



Len s $L$-kami sa Hopkovi dláždenie nepodarí: potreboval by počet štvorčekov deliteľný troma, čo však 49 nie je.

Ako dokážeme, že s viac ako jedným $S$-kom sa Hopkovi dláždenie nepodarí? Jedna možnosť je rozoberať možnosti ukladania. Týchto, i keď sa dajú zredukovať rôznymi úvahami, je neúrekom. Je ťažké nevynechať nejakú.

Schodnejšia možnosť je farbenie šachovnice (napríklad čiernou a bielou) s cieľom dospieť ku sporu. Aké je výhodné farbenie? Každý druhý riadok (či stĺpec)? Na striedačku ako v ozajstnej šachovnici? Ofarbené políčka v párnom stĺpci a zároveň párnom riadku? Ofarbené políčka v párnom stĺpci a zároveň nepárnom riadku (či naopak)? Ofarbené políčka v nepárnom riadku a zároveň nepárnom stĺpci?

Okrem poslednej možnosti sa v spomenutých ofarbeniach nedopracujeme ku sporu pre malé hodnoty počtov $S$-iek. Napríklad pre šachovnicové ofarbenie by sme počítali nasledovne: Nech je 25 bielych políčok a 24 čiernych. Na čiernych políčkach sídlia dva zo štvorčekov $S$-ka, teda $2n$ čiernych je pokrytých $S$-kami, kde $n$ je počet $S$-iek. Ostáva teda $24 - 2n$ pokrytí čiernych políčok $L$-kami. Na bielych políčkach sídlia dva zo štvorčekov $S$-ka, teda $2n$ bielych je pokrytých $S$-kami. Ostáva $25 - 2n$ pokrytí čiernych políčok $L$-kami. Toto však nie je problém: napríklad pre $n = 4$ toto dáva 16 $L$-kových pokrytí čiernej a 17 $L$-kových pokrytí bielej, čo nie je problém spraviť (skúste si), takže tadiaľto cesta ku sporu založenému na počtoch nevedie.

Obdobnou úvahou v prípade, keď ofarbíme čiernou políčka v nepárnom riadku a zároveň nepárnom stĺpci, dostaneme, že

1. čiernych políčok pokrytých L-kami je $16 - n$ a
2. bielych políčok pokrytých L-kami je $33 - 3n$ (overte si).

Z (1.) vyplýva, že bielych políčok pokrytých L-kami je aspoň $32 - 2n$ (rozmyslite si, prečo). Dostávame $33 - 3n \geq 32 - 2n$. Z toho vieme, že $S$-ko môže byť použité najviac jedno. To, že sa to skutočne dá s jedným, sme už ukázali, a tak isto to, že s nula $S$-kami to nejde.

S úlohou sa dalo popasovať i farbením štyrmi farbami (na striedačku ob dva štvorčeky) a rôznymi úvahami o počte rôznofarebných políčok.

**Úloha č. 10:** *Hago má na papieri nakreslené tri kružnice, ktoré majú rôzne veľkosti, žiadne dve sa nepretínajú ani nedotýkajú a žiadna z nich neleží v inej. Tieto kružnice však nemajú nakreslené svoje stredy. Hago by ich veľmi rád našiel, no má k dispozícii iba ceruzku*[4] *a euklidovské pravítko.*[5] *Vedeli by ste len pomocou týchto dvoch nástrojov nájsť stredy všetkých troch kružníc? Na papieri mu navyše ostali dve rovnobežky z predošlého príkladu.*

Riešenie: (opravovali Jožo a Mišo)

Najprv si treba uvedomiť, že máme iba euklidovské pravítko. S ním vieme iba rysovať priamky cez dva *dané* body a overovať, či sú nejaké 3 body na jednej priamke. Nevieme robiť kolmice, rovnobežky, rozpoľovať úsečky a ani kresliť dotyčnice (pokiaľ najskôr nenájdeme body cez ktoré priamku viesť).

Stále však môžeme urobiť veľa, hlavne ak použijeme veci, ktoré už v rovine máme. Ukážeme si to na dvoch riešeniach.

[4]Ceruzkou môžme zaznačiť priesečníky, prípadne si vyznačiť náhodný bod na nejakom útvare — priamke, kružnici,. . .

[5]Euklidovské pravítko dokáže rysovať priamky spájajúce dva rôzne body a overovať kolineárnosť bodov, viac na `http://en.wikipedia.org/wiki/Straightedge`.

Prvým a priamejším riešením je ukázať, že ak máme rovnobežky, vieme cez hociktorý bod narysovať priamku s nimi rovnobežnú. Potom už len každú kružnicu pretneme dvomi rovnobežkami, čím vznikne rovnoramenný lichobežník (ak nie, spravíme tretiu rovnobežku). Predĺžením jeho ramien získame prvý bod a za druhý bod zoberieme priesečník uhlopriečok. Keď ich spojíme, získame priamku prechádzajúcu stredom kružnice, ktorá je naviac kolmá na rovnobežky.

Keďže kružnice máme tri, získali sme rovnobežky, ktoré nie sú rovnobežné s pôvodnými, sú na ne totiž kolmé. Zopakujeme s nimi celý postup a získame tak ďalšie priamky cez stredy kružníc, ktoré sú rôzne od tých prvých. Stredy sme tak určili.

A ako spravíme tie rovnobežky? Majme daný bod $R$ a priamky $p, q$. Chceme narysovať priamku s nimi rovnobežnú, ktorá prechádza bodom $R$. Z $R$ spravíme dve priamky. Prvá pretne $p, q$ v bodoch $P_1$ a $Q_1$. Druhá v bodoch $P_2$ a $Q_2$. Body $P_1Q_1Q_2P_2$ tvoria lichobežník. Priesečník jeho uhlopriečok si označme $U$.

Bod $U$ je stredom rovnoľahlosti úsečiek $P_1P_2$ s $Q_1Q_2$. Z toho vyplýva, že $U$ a stredy týchto úsečiek ležia na jednej priamke. Bod $R$ je druhým stredom rovnoľahlosti týchto úsečiek a teda tiež leží s ich stredmi na jednej priamke. Preto priamka $RU$ pretína $P_1P_2$ a $Q_1Q_2$ v ich stredoch $S_P$ a $S_Q$.

Označme priesečník priamok $Q_1S_P$ s $S_QP_2$ ako $W$. Chceme ukázať, že $RW$ je rovnobežné s $p$. Všimnime si, že $W$ je stred rovnoľahlosti úsečiek $S_PP_1$ s $Q_1S_Q$. Zároveň $U$ je ich druhým stredom rovnoľahlosti. Preto koeficient rovnoľahlosti majú $R$ a $W$ rovnaký a $W$ bude v rovnakej výške nad $p$ ako $R$. Preto $RW$ je rovnobežné s $p$.

Rovnobežky teda máme, a na základe postupu popísaného skôr už ľahko nájdeme stredy našich kružníc.

Iné riešenie:

Druhým spôsobom riešenia je využiť vlastnosti pólov a polár (veľmi dobrý článok môžte nájsť na `http://www.math.ust.hk/excalibur/v11_n4.pdf`). Z ich vlastností vidíme, že poláru k pólu nájdeme ľahko. Stačí z toho bodu spraviť dve priamky, ktoré kružnicu pretnú v bodoch $A, B$ a $C, D$. Potom priamka prechádzajúca priesečníkmi $AC$ s $BD$ a $AD$ s $BC$ je hľadaná polára.

Na druhej strane vieme nájsť k poláre jej pól. Stačí zobrať dva body poláry mimo kružnice, spraviť k nim poláry a ich prienik je hľadaný pól.

K vyriešeniu úlohy nám to ešte nestačí. Musíme použiť aj rovnobežky. Keď nájdeme póly k obom rovnobežkám a preložíme ich priamkou, získame priamku prechádzajúcu stredom kružnice a kolmú na rovnobežky. Pri troch kružniciach dostaneme zase ďalšie rovnobežky, ktoré sú navyše kolmé na tie prvé. Celý postup s nimi zopakujeme a získame nové priamky prechádzajúce stredmi kružníc. Tým stredy určíme.

*Poznámka:* Prípad keď sú stredy kružníc na priamke kolmej na dané rovnobežky ostáva nedoriešený. Pôvodne sme ho nebrali do úvahy, takže bodovanie neovplyvnil. Náročnosťou ďaleko presahuje túto úlohu. Ak vás však táto téma zaujala, niečo málo si môžete pozrieť v knihe *The Enjoyment of Mathematics: Selections from Mathematics for the Amateur* na strane 177 (táto časť je dostupná aj na internete). V skutočnosti by na nájdenie stredov stačili iba tri kružnice, alebo dve kružnice s aspoň jedným bodom na priamke spájajúcej ich stredy.

## Výsledková listina

**kategória BETA**

| Por. | Meno | Roč. | Škola | $\kappa$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | p | s | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Batmendijn Eduard | 4. | CGsvM SL | 14 | | | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | | 45 | 90 |
| 1. | Švarc Radovan | 4. | Česká Třebová | 10 | | | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | | 45 | 90 |
| 3. | Konečný Matěj | 4. | GJir ČB | 6 | | 9 | 9 | 9 | 8 | 3 | | | 38 | 83 |
| 4. | Hanzely Slavomír | 3. | GJAR PO | 7 | | 6 | 5 | 9 | 8 | 9 | | | 37 | 76 |
| 5. | Murin Marek | 3. | GJH BA | 7 | | 9 | 9 | 9 | 8 | 4 | 3 | | 39 | 73 |
| 6. | Hronkovičová Nina | 4. | GKom PE | 8 | | | 7 | 9 | 9 | 7 | 3 | | 35 | 72 |
| 6. | Pišťák Daniel | 3. | GChD Praha | 5 | | 6 | 9 | | 8 | 7 | 9 | | 39 | 72 |
| 6. | Svobodová Zuzana | 3. | Frýdlant ČR | 3 | | 9 | 9 | 5 | 8 | 8 | | | 39 | 72 |
| 9. | Súkeník Peter | 3. | GVar ZA | 7 | | 9 | 9 | 9 | 8 | | | | 35 | 70 |
| 9. | Truc Lam Bui | 4. | Gamča BA | 12 | | | 8 | 9 | 8 | 9 | | | 34 | 70 |
| 11. | Kopf Daniel | 3. | G Slez ČR | 7 | | 9 | 9 | 9 | 4 | 9 | | | 40 | 68 |
| 12. | Halabrin Juraj | 3. | GJH BA | 6 | | 9 | 9 | 1 | 8 | 6 | | | 33 | 67 |
| 13. | Králik Matej | 4. | GJH BA | 11 | | | 9 | 9 | 9 | 3 | 2 | | 32 | 66 |
| 14. | Marko Alan | 1. | GMRŠ NZ | 1 | | | 9 | 9 | | | 8 | | 26 | 59 |
| 15. | Nepšinská Silvia | 4. | GJH BA | 10 | | | 9 | 9 | 8 | 5 | | | 31 | 56 |
| 16. | Tóthová Andrea | 3. | GJH BA | 4 | | 9 | 9 | 6 | 0 | | 3 | | 27 | 55 |
| 17. | Choma Matej | 3. | Gamča BA | 6 | | 9 | 9 | 9 | | 2 | | | 29 | 54 |

| **Por.** | **Meno** | **Roč.** | **Škola** | $\kappa$ | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **p** | **s** | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17. | Kluvanec Roman | 4. | GPár NR | 7 | | | 9 | | 8 | 4 | | | 21 | 54 |
| 17. | Onduš Daniel | 3. | GAlej KE | 6 | | 3 | 9 | 9 | 0 | 7 | | | 28 | 54 |
| 17. | Prešinská Kristína | 4. | GPár NR | 10 | | | 9 | 9 | 8 | 9 | 1 | | 36 | 54 |
| 21. | Ralbovský Peter | 3. | ŠPMNDG BA | 6 | | | 9 | 9 | | 9 | 9 | | 36 | 51 |
| 22. | Kurimský Ján | 3. | GsvMo | 5 | | 9 | 9 | 9 | 8 | 9 | | | 44 | 50 |
| 22. | Žídek Matěj | 3. | Frýdlant ČR | 6 | | 9 | 9 | | 9 | | | | 27 | 50 |
| 24. | Kulla Filip | 3. | BiG Sučany | 7 | | 4 | 9 | | 0 | 3 | | | 16 | 49 |
| 24. | Molčan Samuel | 3. | GJAR PO | 6 | | 4 | 9 | 9 | 8 | | | | 30 | 49 |
| 26. | Bialas Filip | 2. | GOp Praha | 6 | | | | 9 | 8 | | | | 17 | 47 |
| 27. | Korman Andrej | 2. | G Hlohovec | 3 | 6 | | | 9 | | 2 | | | 17 | 46 |
| 27. | Krakovská Ema | 4. | Gamča BA | 8 | | | 9 | 1 | 8 | | | | 18 | 46 |
| 29. | Dráček František | 4. | GŠkol PB | 9 | | | 9 | 9 | 9 | | | | 27 | 45 |
| 30. | Bodík Juro | 3. | Gamča BA | 8 | | 9 | 9 | 9 | | | | | 18 | 44 |
| 31. | Marčeková Katarína | 3. | GJH BA | 6 | | 9 | 9 | | 8 | | | | 26 | 41 |
| 31. | Veselá Simona | 4. | GJH BA | 5 | | | | 9 | | | | | 9 | 41 |
| 33. | Darmovzal Ondřej | 4. | Brno ČR | 6 | | | 9 | | 9 | | | | 18 | 39 |
| 34. | Frankovská Zuzana | 3. | GJH BA | 6 | | | | | | | | | 0 | 37 |
| 35. | Mišlanová Kristína | 3. | GAlej KE | 7 | | | | | | | | | 0 | 36 |
| 36. | Semanišinová Žaneta | 3. | GAlej KE | 7 | | | | | | | | | 0 | 35 |
| 37. | Oravkin Eduard | 3. | 1SG BA | 7 | | | | | | | | | 0 | 34 |
| 38. | Král Adam | 3. | GVar ZA | 5 | | | 9 | | 0 | 7 | | | 16 | 33 |
| 39. | Hollý Dominik | 4. | ŠPMNDG BA | 7 | | | 9 | 9 | 0 | | | | 18 | 31 |
| 40. | Krasula Dominik | 2. | Krnov ČR | 4 | | | | | | | | | 0 | 29 |
| 41. | Tesař Emanuel | 3. | GBST LC | 7 | | | 9 | | | | | | 9 | 26 |
| 42. | Horňáková Kristína | 2. | GPár NR | 3 | | | | | | | | | 0 | 25 |
| 42. | Porubsky Michal | 3. | GsvCM NR | 4 | | | | | | | | | 0 | 25 |
| 44. | Krajmerová Barbora | 3. | G Šurany | 5 | | 9 | | | | | | | 9 | 24 |
| 45. | Trenčanská Tereza | 3. | Gamča BA | 5 | | 9 | | | | 2 | | | 11 | 20 |
| 46. | Martinka Matej | 3. | SŠsvFA | 4 | | | | | | | | | 0 | 19 |
| 47. | Kašša Ladislav | 3. | G Šamorín | 6 | | 4 | | | 0 | 2 | 0 | | 6 | 17 |
| 48. | Kudelčíková Martina | 3. | GVO ZA | 6 | | 4 | 1 | 5 | | 4 | | | 14 | 14 |
| 49. | Santrová Michaela | 4. | GMH Trstená | 10 | | | | | | | | | 0 | 11 |
| 50. | Barbora Dávid | 4. | GFS Nová Baňa | 6 | | 9 | | | | | | | 9 | 9 |
| 50. | Liu Zhen Ning Dávid | 4. | GJH BA | 12 | | | | | | | | | 0 | 9 |
| 52. | Škrlec Adam | 3. | GJH BA | 5 | | | | | | | | | 0 | 8 |
| 52. | Vančo Šimon | 3. | CGsvM SL | 4 | | | | | | | | | 0 | 8 |
| 54. | Častulíková Katarína | 1. | 1SG BA | 1 | | | | | | 2 | | | 2 | 5 |
| 54. | Petrová Simona | 3. | ŠPMNDG BA | 3 | 1 | | | | | 3 | | | 4 | 5 |
| 56. | Rozhoň Václav | 4. | GJir ČB | 6 | | | | | | | | | 0 | 0 |

**kategória ALFA**

| **Por.** | **Meno** | **Roč.** | **Škola** | $\kappa$ | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **p** | **s** | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Bošková Dagmar | 1. | GJH BA | 1 | 9 | 9 | 8 | | 9 | 9 | | | 44 | 86 |
| 1. | Leinwatherová Michaela | 1. | GPan BA | 1 | 8 | 9 | 9 | | 9 | 9 | 9 | | 45 | 86 |
| 3. | Mičko Juraj | 2. | GPoš KE | 3 | | | 9 | 4 | 9 | 9 | 9 | | 40 | 85 |
| 4. | Sásik Tomáš | 1. | Gamča BA | 1 | 8 | 9 | 9 | 5 | | 9 | | | 40 | 84 |
| 5. | Dlugošová Michaela | 1. | GKuk PP | 1 | 9 | 9 | 9 | | | 9 | 9 | | 45 | 83 |
| 6. | Belan Pavol | 1. | GVar ZA | 1 | 9 | 9 | 9 | 5 | 9 | 9 | | | 45 | 82 |
| 6. | Drotár Pavol | 2. | GPoš KE | 3 | | | 9 | 4 | 9 | 9 | 9 | | 40 | 82 |
| 6. | Pajger Šimon | 1. | GVO ZA | 1 | 9 | 9 | 9 | 2 | 9 | 9 | | | 45 | 82 |
| 9. | Lipták Jozef | 2. | GJGT BB | 2 | | 9 | 9 | 4 | 9 | 9 | | | 40 | 81 |
| 10. | Krett Jakub | 1. | GMA BA | 1 | | 9 | 8 | | 9 | 9 | 5 | | 40 | 77 |
| 10. | Švihorík Tomáš | 1. | GPár NR | 1 | 9 | 6 | 9 | 5 | 9 | | | | 38 | 77 |
| 12. | Smolárová Paulína | 1. | ŠPMNDG BA | 1 | 5 | 8 | 7 | | 9 | 4 | | | 33 | 76 |

| Por. | Meno | Roč. | Škola | $\kappa$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | p | s | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13. | Parada Matej | 1. | Gamča BA | 1 | 7 | 9 | 3 | 2 | 9 | | | | 30 | 75 |
| 14. | Domes Tomáš | 2. | G Mendel ČR | 2 | | 9 | 9 | 2 | 9 | 9 | | | 38 | 74 |
| 15. | Horanský Marek | 2. | ŠPMNDG BA | 2 | 7 | 8 | 8 | 5 | 9 | | | | 30 | 73 |
| 16. | Pulmannová Barbara | 1. | Gamča BA | 1 | 9 | 9 | 9 | | 9 | | | | 36 | 72 |
| 17. | Marčeková Michaela | 0. | GPár NR | 0 | 8 | 9 | 7 | 2 | 9 | | | | 35 | 71 |
| 18. | Kuťková Sára | 1. | Gamča BA | 1 | 8 | 7 | 9 | 1 | 9 | | | | 34 | 70 |
| 19. | Tóthová Natália | 1. | GAlej KE | 1 | 7 | 9 | 9 | 2 | 9 | 5 | | | 39 | 69 |
| 20. | Banhegyi Tomas | 3. | GJH BA | 3 | | | 8 | 3 | 9 | 9 | | | 29 | 68 |
| 21. | Sadovská Jana | 1. | ŠPMNDG BA | 1 | 9 | 8 | 6 | | 4 | | 1 | | 28 | 64 |
| 22. | Sučíková Svetlana | 1. | G-BMA UK | 1 | 6 | 8 | 8 | | 6 | | | | 28 | 62 |
| 23. | Poláková Nikola | 1. | G Šurany | 1 | 6 | 4 | 9 | | | 9 | | | 28 | 61 |
| 23. | Poljovka Jakub | 1. | GPár NR | 1 | 8 | 9 | 8 | | | | | | 25 | 61 |
| 23. | Žídková Dorota | 1. | Frýdlant ČR | 1 | 6 | 6 | 9 | | | 9 | | | 30 | 61 |
| 26. | Mikuláš Matúš | 1. | GBST LC | 1 | 4 | 9 | 9 | | 9 | | | | 31 | 60 |
| 27. | Svobodová Zuzana | 3. | Frýdlant ČR | 3 | | | | | 9 | 9 | 5 | | 23 | 56 |
| 28. | Komzala Peter | 1. | GJH BA | 1 | 9 | 7 | | | 9 | 1 | 4 | | 30 | 53 |
| 28. | Zajacová Terézia | 1. | 1SG BA | 1 | 8 | 4 | 7 | | 4 | | | | 23 | 53 |
| 30. | Onduš Peter | 1. | GAlej KE | 1 | | | | 5 | | 9 | | | 14 | 50 |
| 31. | Rozgoň Martin | 1. | G Šurany | 1 | 9 | | 9 | | | 9 | | | 27 | 49 |
| 32. | Ivan Peter | 1. | GJH BA | 1 | 5 | 3 | 1 | | 4 | 9 | 5 | | 26 | 47 |
| 32. | Juran Matúš | 3. | GJH BA | 3 | | | 9 | 2 | | 1 | 9 | | 21 | 47 |
| 32. | Tureničová Martina | 1. | GJH BA | 1 | 7 | 4 | 2 | 1 | | 1 | 1 | | 15 | 47 |
| 35. | Oravkin Richard | 0. | 1SG BA | 0 | 7 | 1 | 9 | | | | | | 17 | 46 |
| 36. | Marko Alan | 1. | GMRŠ NZ | 1 | | | | | | 9 | 9 | | 18 | 42 |
| 37. | Barteková Katarína | 2. | GCSL BA | 2 | 5 | 3 | 9 | | | | | | 12 | 40 |
| 37. | Hanesz Zoltán | 2. | GPoš KE | 3 | | | 9 | 4 | 9 | 9 | 9 | | 40 | 40 |
| 37. | Korman Andrej | 2. | G Hlohovec | 3 | | | | 6 | | | 9 | | 15 | 40 |
| 37. | Škotnárová Lucia | 2. | G Šurany | 2 | | 4 | 9 | 4 | | | | | 8 | 40 |
| 41. | Bajnohová Natália | 1. | GCSL BA | 1 | 6 | 3 | 6 | | | | | | 15 | 39 |
| 42. | Častulíková Katarína | 1. | 1SG BA | 1 | 4 | 5 | 6 | | | | | | 15 | 37 |
| 42. | Pándy Michal | 2. | GPoš KE | 3 | | | 9 | 1 | | 9 | | | 19 | 37 |
| 44. | Pozsonyi Karol | 0. | GBil BA | 0 | 7 | 3 | 8 | 1 | 9 | 1 | 9 | | 36 | 36 |
| 44. | Rosinská Veronika | 2. | G Šurany | 2 | | 3 | 3 | 1 | | 1 | | | 8 | 36 |
| 46. | Ďurina Marián | 1. | G Šurany | 1 | 5 | 3 | 4 | | | 4 | | | 16 | 35 |
| 46. | Homola Marek | 2. | GJH BA | 2 | 7 | 8 | | | 9 | 1 | 4 | | 22 | 35 |
| 48. | Steinhauser Václav | 1. | G Dacice | 1 | | | | | | | | | 0 | 34 |
| 48. | Urbán Ádám | 1. | GPoš KE | 1 | | | | | | | | | 0 | 34 |
| 50. | Horňáková Kristína | 2. | GPár NR | 3 | | | | | | | | | 0 | 32 |
| 51. | Brablecová Patrícia | 2. | GBST LC | 2 | | 3 | 1 | | 9 | | | | 13 | 30 |
| 52. | Piala Martin | 2. | GVO ZA | 2 | | | | | | | | | 0 | 28 |
| 53. | Šimková Jarmila | 1. | GPár NR | 1 | | | | | | | | | 0 | 27 |
| 54. | Hruška Rajmund | 2. | GPoš KE | 2 | | 9 | | | | | | | 9 | 26 |
| 54. | Mach Jakub | 2. | GPoš KE | 2 | | 9 | 8 | | 9 | | | | 26 | 26 |
| 56. | Čatloš Jakub | 1. | ŠPMNDG BA | 1 | | | | | | | | | 0 | 25 |
| 56. | Čermák Michal | 1. | 1SG BA | 1 | | | | | | | | | 0 | 25 |
| 58. | Májek Juraj | 3. | Gamča BA | 3 | | | | | | | | | 0 | 24 |
| 59. | Podžubanová Martina | 2. | GPH MI | 2 | | | | | | | | | 0 | 22 |
| 60. | Hladká Ľubica | 2. | GJGT BB | 3 | | | | | | | | | 0 | 21 |
| 60. | Hóz Martin | 2. | Gamča BA | 2 | | | | | | | | | 0 | 21 |
| 60. | Németh Richard | 2. | GCSL BA | 2 | | 3 | 8 | | | | | | 11 | 21 |
| 63. | Majtán Martin | 2. | G Hlohovec | 2 | | | | | | | | | 0 | 19 |
| 64. | Horkavá Alexandra | 2. | BiG Sučany | 2 | | 1 | 1 | 1 | | 1 | | | 4 | 14 |
| 65. | Remperová Natália | 1. | GKom PE | 1 | | 2 | | | | | | | 2 | 13 |
| 66. | Hrinko Adam | 1. | 1SG BA | 1 | 4 | 2 | 4 | 1 | | | | | 11 | 11 |
| 67. | Báb Samuel | 1. | GCSL BA | 1 | | | | | | | | | 0 | 9 |

| **Por.** | **Meno** | **Roč.** | **Škola** | $\kappa$ | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **p** | **s** | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 67. | Cavalieri Costauzo | 2. | GSpor NR | 2 | | | | | | | | | 0 | 9 |
| 67. | Poláková Tatiana | 1. | 1SG BA | 1 | 7 | 2 | | | | | | | 9 | 9 |
| 70. | Babjak Samuel | 1. | GCSL BA | 1 | 5 | 3 | | | | | | | 8 | 8 |
| 71. | Hreuzek Ján | 2. | GCSL BA | 2 | | | 7 | | | | | | 7 | 7 |
| 71. | Ljutenko Tomáš | 1. | 1SG BA | 1 | 4 | 3 | | | | | | | 7 | 7 |
| 71. | Petrová Simona | 3. | ŠPMNDG BA | 3 | | | 2 | 1 | | | | | 3 | 7 |
| 74. | Borčin Martin | 1. | GCSL BA | 1 | | | | | | | | | 0 | 6 |
| 75. | Šimová Mária | 2. | EGMT | 2 | | | | | | | | | 0 | 4 |
| 76. | Brezina Marek | 1. | ??? | 1 | | | | | | | | | 0 | 0 |
| 76. | Glovičková Katarína | 1. | GCSL BA | 1 | | | | | | | | | 0 | 0 |
| 76. | Lavuš Eduard | 2. | GAlej KE | 2 | | | | | | | | | 0 | 0 |
| 76. | Porges Eduard | 2. | GCSL BA | 2 | | | | | | | | | 0 | 0 |
| 76. | Schmidtová Veronika | 2. | GAlej KE | 2 | | | | | | | | | 0 | 0 |
| 76. | Tanzer Jozef | 1. | GJH BA | 1 | | | | | | | | | 0 | 0 |
| 76. | Turčeková Diana | 1. | GKom PE | 1 | | | | | | | | | 0 | 0 |