Riešenia 1. kola zimnej časti

1.1 Kotúľanie Malebných Šutríkov ($\kappa \leq 1$) opravoval **Marek**

Zadanie. *Na mramorovom námestí uprostred Atén sa chlapci, odbremenení od bežných každodenných starostí a hrozby blížiacej sa vojny, hrali tradičnú hru περιδέραιο. Hra spočívala v šikovnom vrhu farebných guľôčok po zemi na cieľ.*

V koženom vrecúšku bolo pred začiatkom hry 100 *guľôčok troch farieb – niektoré boli červené, iné zelené a zvyšné modré. Ako prvý bol na rade Markos, ktorý si na svoj vrh vybral* 30 *červených,* 10 *zelených a* 20 *modrých guľôčok. Žiaľ, počas vrhu sa mu podarilo omylom hodiť* 5 *guľôčok do kanálu. Zahanbený rýchlo pozbieral zvyšné guľôčky a vrátil ich späť do vrecúška. Ďalší v poradí bol Mikael. Vytiahol z vrecúška* 8 *červených,* 18 *zelených a* 48 *modrých guľôčok. Mikael si všimol, že Markos stratil* 5 *guľôčok, nevedel však narýchlo povedať, akej farby boli. Viete niečo povedať o farbe niektorých zo stratených guľôčok?*

Riešenie

Najprv ukážeme, že sme stratili jednu červenú a následne ukážeme, že ostatné mohli byť ľubovoľné.

Čo vieme povedať o počte napríklad červených guľôčok? Na začiatku ich bolo vo vrecku aspoň 30, inak by ich Markos nemohol vytiahnuť. Potom mohol nejaké stratiť, ale vieme, že Mikael ich vytiahol 8, takže aj keby stratil 5 červených, nie je s tým žiadny problém. Čo so zelenými a modrými? V oboch farbách Mikael vytiahol viac guľôčok ako Markos hádzal. Takže vo vrecku ostalo aspoň 18 zelených a 48 modrých. Ale to znamenalo, že na začiatku ich bolo tiež aspoň 18 zelených a aspoň 48 modrých. Keď sa teda pozrieme na začiatočné podmienky, koľko ktorých guľôčok bolo, tak dostaneme, že na začiatku bolo aspoň 30 červených, aspoň 18 zelených a aspoň 48 modrých. To je dokopy $30 + 18 + 48 = 96$. Ak by Markos zapatrošil guľôčky iba zelenej a modrej farby, tak s istotou vieme povedať, že by sa po Mikaelovom hode nachádzalo vo vrecku 30 červených, 18 zelených a 48 modrých a navyše 5 je stratených. Dokopy 101 guľôčok. Čo nemohlo nastať. *Preto musel Markos zahodiť aspoň jednu červenú guľôčku.*

Teraz by sme mali ukázať, že zvyšné 4 stratené, o ktorých sme zatiaľ nič nepovedali, môžu byť vskutku hociktoré. Pri hádzaní guľôčok Markos hádzal 30, 10, 20, teda všetky počty sú väčšie ako 4, a teda fyzicky mohol zapatrošiť tie guľôčky. Keby napríklad hádzal 3 zelené a stratil 4 celkovo, tak neexistuje možnosť ako by stratil 4 zelené. Takže takto sa nám nepodarí nič ukázať. Ale vieme, že musíme brať do úvahy všetky možnosti počtu zapatrošených guľôčok.

Okey, teraz by sme mohli vymenovať všetky možnosti červených, zelených a modrých a povedať, že to sedí. To je ale otravne dlhé. Pamätáte si ešte, že keď sme hovorili o aspoň 30 červených, aspoň 18 zelených a aspoň 48 modrých guľôčkach nazačiatku hádzania, tak sme vlastne povedali, že zvyšné 4 guľôčky mohli mať ľubovoľnú farbu? Nech teda Markos stratil guľôčky farieb w, x, y, z, čo mohli byť presne tie štyri neznáme potvory z počiatku – tie mohli byť tiež farieb w, x, y, z, nech už sú to akékoľvek farby (na poradí nezáleží). Takže po Markovom hode je s určitosťou presne 29 červených, 18 zelených a 48 modrých. Dokopy 95 guľôčok. A keďže táto možnosť mohla nastať (akokoľvek nepravdepodobná, ale mohla nastať), tak nevieme povedať nič o tom, ktoré farby w, x, y, z sú.

1.2 Kreslíme Malé Štvorce ($\kappa \leq 2$) opravoval **Ondrej**

Zadanie. *O pár blokov ďalej si študenti aténskej školy, čakajúc na svojho učiteľa, krátia čas zapisovaním prirodzených čísel v tvare súčtu dvoch druhých mocnín celých čísel. Pre 5-ku sa im to podarilo ako* $2^2+1^2=4+1=5$. *Potom prišiel ich múdry učiteľ a položil im otázku: „Je možné nájsť takéto dve celé čísla pre ľubovoľnú mocninu 10-tky?“ Skúste aj vy zodpovedať túto otázku.*

Poznámka: mocniny 10-tky sú čísla tvaru 10^k *kde k je ľubovoľné prirodzené číslo.*

Riešenie

V zadaní máme, že chceme hľadať také čísla pre ktoré platí $a^2+b^2=10^k$. Pre $k=1,2$ ich vieme nájsť pomerne ľahko, a to $1^2+3^2=10^1$ a $6^2+8^2=10^2$. Teraz sa to pokúsme dokázať pre ľubovoľné k.

Rozdeľme si k na párne a nepárne, takže sa budeme zaoberať osobitne prípadmi 10^{2k+1} a 10^{2k}. Začnime s nepárnymi. Číslo 10^{2k+1} vieme napísať ako $10^{2k}\cdot 10$. Následne vieme 10 rozpísať ako 1^2+3^2,

$$10^{2k}(1^2+3^2)=1^2\cdot 10^{2k}+3^2\cdot 10^{2k}.$$

Teraz vieme každý člen zapísať ako druhú mocninu a dostaneme to, čo sme chceli dokázať:

$$1^2\cdot 10^{2k}+3^2\cdot 10^{2k}=\left(1\cdot 10^k\right)^2+\left(3\cdot 10^k\right)^2=10^{2k+1}.$$

Teraz pre párne. Postup bude totožný ako pri nepárnych, len využijeme identitu $6^2+8^2=10^2$,

$$10^{2k}=10^2\cdot 10^{2k-2}=(6^2+8^2)10^{2k-2}=6^2\cdot 10^{2(k-1)}+8^2\cdot 10^{2(k-1)}=\left(6\cdot 10^{k-1}\right)^2+\left(8\cdot 10^{k-1}\right)^2.$$

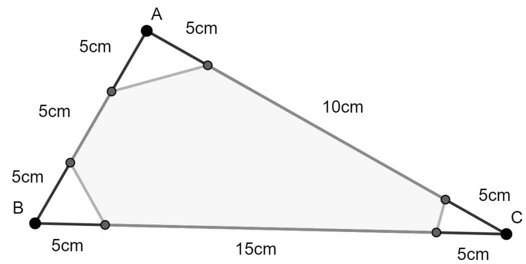
Zistili sme, že 10^k sa dá napísať ako súčet dvoch štvorcov prirodzených čísel, keď k je nepárne aj párne, a teda pre všetky prirodzené čísla.

1.3 Kalokagatia Mestskej Spoločnosti ($\kappa \leq 3$) opravovali **Matúš** a **Lucy**

Zadanie. *Na rozdiel od Sparty Aténski predstavitelia dbali na to, aby ich bojovníci – hopliti, mali nielen krásne vyšportované telá, ale aj bystrú a rozhľadenú myseľ. Tento ideál súladu fyzickej a duševnej krásy, nazývaný tiež Kalokagatia, bol pre Aténsku spoločnosť nesmierne dôležitý. Aj preto dávali svojim vojakom pred jedlom vždy nejakú mentálnu rozcvičku, ktorú museli vyriešiť, aby sa mohli dosýta najesť. Jedlo si museli zaslúžiť. Z dobových rytín a malieb na urnách sa nám dochoval tento príbeh:*

Múdry generál Perikles raz prišiel za svojimi vojakmi, ktorí práve obedovali fazuľu s tradičným gréckym nekysnutým chlebom – pitou, ktorý bol v tvare trojuholníka so stranami dĺžok 15, 20 *a* 25 *cm ako na obrázku. Skôr, ako sa vojak stihol do pity pustiť, prišiel za ním Perikles a ostrým nožom mu odrezal z každého rohu kúsok v tvare rovnoramenného trojuholníka s dĺžkou ramien* 5 *cm a povedal vojakovi: „Ak by si chcel tieto kúsky zjesť, drahý spolubojovník, budeš mi musieť najprv povedať, koľko z pity ti ostalo. Odpovieš mi však nesprávne, hodím celú pitu mačkám, ktoré už nervózne žobrú pod tvojimi nohami.“*

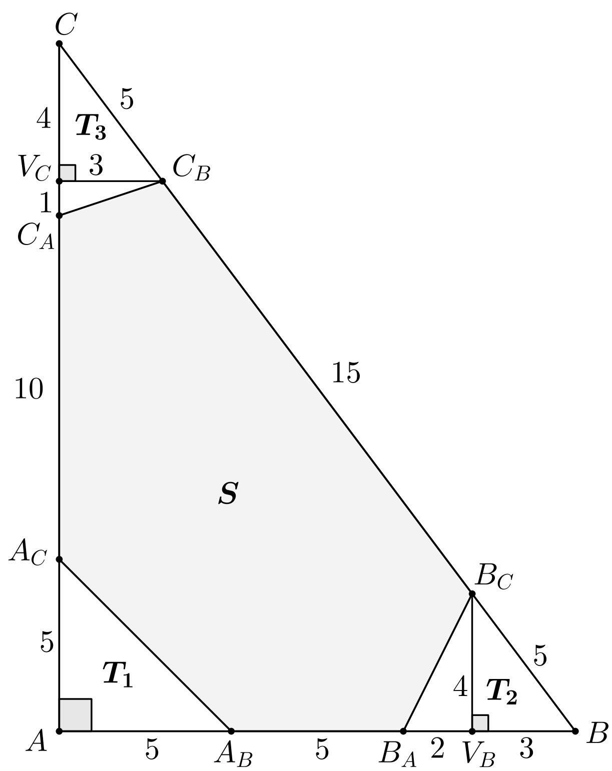
Skúste sa teraz aj vy zamyslieť nad danou úlohou a zistite obsah plochy, ktorá vojakovi ostala. Podarí sa vám to alebo vašu porciu hodia mačkám?



Riešenie

Zo zadania aj z obrázku vidíme, že obsah zostávajúcej plochy – šesťuholníka $A_CA_BB_AB_CC_BC_A$ zistíme tým, že od pôvodného trojuholníka ABC odčítame obsahy malých (odrezaných) trojuholníkov. Ako jedna z prvých vecí, čo nám môže napadnúť skúsiť, keďže poznáme dĺžky všetkých strán trojuholníka ABC, je vhodne ich dosadiť do Pytagorovej vety. Ak by platila, vedeli by sme, že trojuholník je pravouhlý. Tak to spravme. Po dosadení sme prišli na to, že trojuholník ABC je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole A, pretože $15^2 + 20^2 = 25^2$.

Keď už vieme, že trojuholník ABC je pravouhlý, jeho obsah zistíme ľahko. Dĺžky jeho strán AB a AC dosadíme do vzorca na obsah trojuholníka a zistíme, že $T = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = 150\ \mathrm{cm}^2$. Veľkosť malého trojuholníka pri pravom uhle zistíme podobne. Použijeme jeho dĺžky strán a dostávame $T_1 = \frac{1}{2} \cdot |AA_B| \cdot |AA_C| = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = 12.5\ \mathrm{cm}^2$. Náročnejšie bude zistiť obsahy zvyšných dvoch trojuholníkov.



Pri výpočte obsahu malého trojuholníka BB_AB_C si pomôžeme veľkým trojuholníkom ABC. Ak by sa nám podarilo ukázať, že nejaká časť tohto trojuholníka je podobná s trojuholníkom ABC, mohli by sme pomocou koeficientu podobnosti určiť dĺžky strán tejto časti trojuholníka BB_AB_C. Ak to spravíme šikovne, z tohto poznatku by sme potom mohli vedieť vypočítať aj obsah celého trojuholníka BB_AB_C. Pomôžeme si tým, že budeme viesť výšku z vrchola B_C na stranu BB_A, čím zároveň rozdelíme trojuholník BB_AB_C na dva menšie trojuholníky. Pätu tejto výšky si nazveme V_B. Vieme, že uhol pri päte výšky V_B je pravý. Môžeme si všimnúť, že oba trojuholníky ABC a V_BBB_C sú pravouhlé a majú spoločný uhol pri vrchole B. Potom podľa vety *uu* o podobnosti trojuholníkov vieme, že trojuholníky ABC a V_BBB_C sú (v tomto poradí) podobné. Koeficient podobnosti k je pomer dĺžok strán BB_C a BC. Teda

$$k = \frac{|BB_C|}{|BC|} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}.$$

Pomocou koeficientu podobnosti k zistíme dĺžku výšky $|B_CV_B| = k \cdot |AC| = \frac{1}{5} \cdot 20 = 4$ cm. Keďže poznáme dĺžku strany BB_A a dĺžku výšky na danú stranu, vieme ľahko dopočítať obsah trojuholníka BB_AB_C. Teda

$$T_2 = \frac{|BB_A| \cdot |B_CV_B|}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \text{ cm}^2.$$

Pri výpočte obsahu posledného odrezaného trojuholníka budeme postupovať rovnako ako pri predchádzajúcom trojuholníku. Trojuholník CC_AC_B si môžeme výškou na stranu CC_A rozdeliť na dva menšie trojuholníky. Podľa vety *uu* o podobnosti trojuholníkov sú trojuholníky ABC a V_CC_BC podobné. Môžeme si všimnúť, že ich koeficient podobnosti je

$$k' = \frac{|CC_B|}{|CB|} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}.$$

Potom výška V_CC_B je podobná so stranou AB a má veľkosť 3 cm. Keď už poznáme aj dĺžku výšky v trojuholníku $|CC_AC_B|$, ľahko dopočítame jeho obsah

$$T_3 = \frac{|CC_A| \cdot |C_BV_C|}{2} = \frac{5 \cdot 3}{2} = 7.5 \text{ cm}^2.$$

Na záver nám už len ostáva od veľkosti obsahu trojuholníka ABC odrátať obsahy trojuholníkov AA_BA_C, BB_AB_C a CC_AC_B. Výsledkom je obsah zostávajúcej plochy $S = T - T_1 - T_2 - T_3 = 150 - 12.5 - 10 - 7.5 = 120$ cm^2.

1.4 Komplikované Mocenské Spory ($\kappa \leq 5$)

opravovali **Mišo M.** a **Lucka**

Zadanie. *V čase vojny sa často aj nemysliteľné stáva skutočnosťou. Bolo tomu tak aj v čase grécko-perzských vojen, kedy Aténčanom pod velením Temistokla prišli na pomoc v ťažení proti Peržanom aj ich úhlavní nepriatelia – Sparťania, pod velením generála Pausania. Samozrejme, že proti sile ich spojených armád nemali Peržania šancu a utrpeli pri Platajach zdrvujúcu porážku. Po vojne je však potrebné víťazstvo nielen dobre osláviť, ale si aj rozdeliť vojnovú korisť. Keďže Peržania po sebe nič nezanechali, ostávalo si už len rozdeliť znovudobyté územie.*

Temistokles aj Pausanius boli obaja praktickí muži činu. Preto sa rozhodli rozdeliť si dobyté územie v tvare trojuholníka ABC čo najkonvenčnejšie. Chceli by ho rozdeliť na dve polovice, s rovnakým obsahom tak, že ho na mape prerežú jedným rezom, ktorý bude rovnobežný so stranou AB trojuholníka ABC.

K dispozícii však v tábore majú iba pravítko a kružidlo.

- *Pravítko dokáže zobrať dva body a narysovať priamku vedúcu cez tieto dva body.*

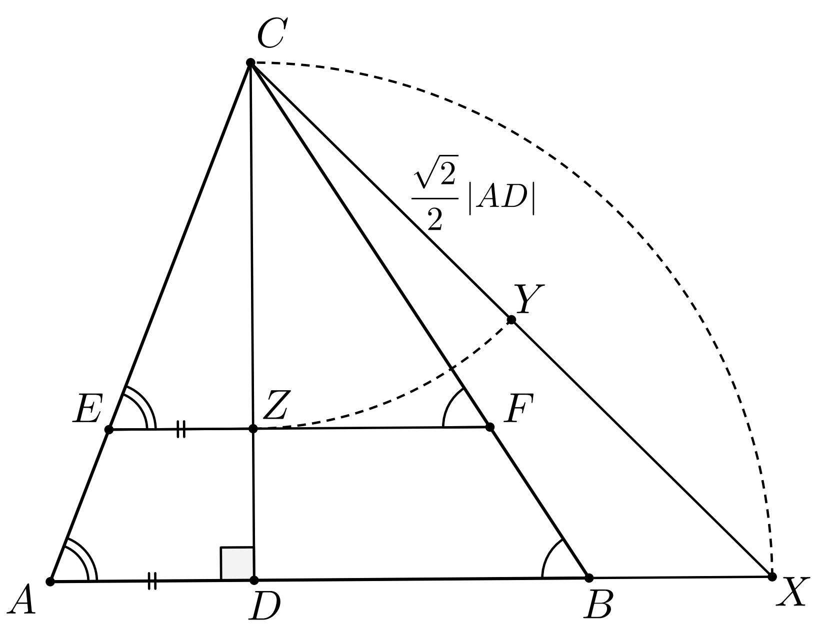
- *Kružidlo dokáže spraviť kružnicu v nejakom bode s polomerom rovným vzdialenosti nejakých dvoch bodov.*

Generáli teraz stoja pred ťažkým rozhodnutím rozrezať územie na dve rovnako veľké časti. Pomôžte im nájsť pomocou pravítka a kružidla takú priamku, ktorá je rovnobežná so stranou AB trojuholníka ABC a delí ho na dve časti s rovnakým obsahom. [1]

Riešenie

Spravme najprv všetky potrebné výpočty, nech vieme, čo presne chceme rysovať. Označme si postupne E, F body, v ktorých budú rovnobežkou prerezané úsečky AC, BC. Z vety o súhlasných uhloch vidíme, že $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle EFC|$ a $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle FEC|$. Potom bude trojuholník EFC podobný trojuholníku ABC podľa vety *uu*. Označme k koeficient podobnosti. Trojuholník ABC je teda v každom rozmere k-krát väčší ako EFC. Keďže $|AB| = k \cdot |EF|$ a v rovnakom pomere sú aj výšky na tieto strany, bude obsah ABC k^2-krát väčší ako obsah EFC. Odtiaľ vyplýva $k = \sqrt{2}$.

Označme pätu výšky trojuholníka ABC z vrcholu C ako D. Priamka EF ju bude pretínať v jednej k-tine od bodu C, teda vo vzdialenosti $\frac{1}{\sqrt{2}}|CD| = \frac{\sqrt{2}}{2}|CD|$. Pri rysovaní budeme chcieť nájsť túto výšku a vyznačiť na nej bod v tejto vzdialenosti. Následne už len narysujeme kolmicu. Ukážme si teda priamo daný postup.



1. Keďže uhol CDA má byť pravý, na jeho nájdenie využijeme Tálesovu kružnicu. Nájdeme si stred úsečky AC, označíme ho M, a spravíme kružnicu so stredom M a polomerom $|AM|$. Priesečník s AB bude D.[2]
2. Na rozdelenie výšky využijeme vlastnosti štvorca. V ňom je uhlopriečka $\sqrt{2}$-krát dlhšia ako strana. Štvorec s dĺžkou strany CD tak má uhlopriečku dlhú $\sqrt{2} \cdot |CD|$. My potrebujeme jej polovicu. Do D zapichneme kružidlo a vzdialenosť $|CD|$ prenesieme na priamku AB. Dostaneme bod X, pričom DX a CD budú susedné strany štvorca. Takže CX je uhlopriečka a platí $|CX| = \sqrt{2} \cdot |CD|$. Stred CX označíme Y a vzdialenosť $|CY|$ prenesieme na CD. Vyznačíme bod Z.

[1] Ak ste sa s podobným typom úloh ešte nestretli môže vám pomôcť krátky text na stránke: `https://kms.sk/ako_riesit/konstrukcne_ulohy/`

[2] Na nájdenie stredu vieme využiť postup pre os úsečky. V krajných bodoch do kružidla naberieme dĺžku úsečky a spravíme kružnice. Spojením ich priesečníkov dostaneme os úsečky, ktorá prechádza jej stredom.

3. Spravíme si kolmicu na CD cez bod Z. Jeden zo spôsobov je spraviť si na CD taký bod W, aby $|DZ| = |ZW|$ a spraviť os úsečky WD.

Kolmica, ktorú sme práve narysovali je priamo hľadaná priamka zo zadania.

1.5 Kadekde Mysliteľ Škriabal ($\kappa \leq 8$)

opravovali **Gianetta** a **Miloš**

Zadanie. *Aristoteles raz išiel popod most v Aténach, keď tu zrazu skríkol "Heuréka!", zobral najbližší kameň a vytesal* [3] *do kamenného piliera sústavu rovníc*

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma = \alpha^2 + \beta + \gamma^2 = \alpha + \beta^2 + \gamma^2.$$

Nájdite všetky kladné reálne trojice α, β, γ, ktoré spĺňajú Aristotelovu rovnosť.

Riešenie

Zapíšme si najprv zadanú sústavu rovníc v tvare troch rovníc:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma &= \alpha^2 + \beta + \gamma^2, \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma &= \alpha + \beta^2 + \gamma^2, \\ \alpha^2 + \beta + \gamma^2 &= \alpha + \beta^2 + \gamma^2. \end{aligned} \tag{0}$$

Pri riešení takýchto sústav sa vždy oplatí skúsiť sčítavanie alebo odčítavanie strán jednotlivých rovníc, alebo rovníc samotných. Inak tomu nie je ani tu. Začnime teda tým, že v prvej rovnici odčítame pravú stranu od ľavej:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma = \alpha^2 + \beta + \gamma^2,$$
$$\beta^2 + \gamma - \beta - \gamma^2 = 0.$$

To začína vyzerať celkom sľubne. Bystré oko si všimne, že sa v rovnici vyskytuje rozdiel dvoch štvorcov. Skúsme to teda využiť v náš prospech:

$$\begin{aligned} \beta^2 - \gamma^2 - (\beta - \gamma) &= 0, \\ (\beta - \gamma)(\beta + \gamma) - (\beta - \gamma) &= 0, \\ (\beta - \gamma)(\beta + \gamma - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Rovnice v zadaní sú si veľmi podobné. Môžeme si všimnúť, že keby ľubovoľným spôsobom povymieňame α, β a γ, zadaná sústava rovníc by ostala nezmenená. Sústava rovníc s takouto vlastnosťou sa nazýva symetrická. Vďaka

[3] Jeho akt sa nápadne podobá tomu, čo od neho nehanebne skopíroval Hamilton o 2000 rokov neskôr https://en.wikipedia.org/wiki/Broom_Bridge

tomu môžeme aplikovať predošlý postup na ľubovoľnú z rovníc (0), čím sa vieme dopracovať k nasledovným rovniciam:

$$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1)=0, \tag{1}$$
$$(\alpha-\gamma)(\alpha+\gamma-1)=0, \tag{2}$$
$$(\beta-\gamma)(\beta+\gamma-1)=0. \tag{3}$$

To, že sme dokázali upraviť rovnice na súčin dvoch členov rovný nule nám značne uľahčuje prácu. Vieme, že každá z rovníc bude platiť práve vtedy, keď aspoň jedna zo zátvoriek sa rovná nule.

Z rovnice (1) vieme, že musí platiť aspoň jedna z nasledovných rovníc:

$$\beta=\alpha, \tag{1.A}$$
$$\beta=1-\alpha. \tag{1.B}$$

$(\mathbf{1.A})$: Túto rovnosť by sme ďalej vedeli dosadiť do rovnice (3). Ľahko si overíme, že by nás to priviedlo k rovnici (2).

$(\mathbf{1.B})$: Rovnako aj túto rovnosť vieme dosadiť do rovnice (3):

$$\begin{aligned}(1-\alpha-\gamma)(1-\alpha+\gamma-1)&=0,\\ (1-\alpha-\gamma)(-\alpha+\gamma)&=0,\\ (\alpha+\gamma-1)(\alpha-\gamma)&=0.\end{aligned}$$

Znova nás to však privedie k rovnici (2).

Aby sme vedeli pokračovať ďalej v riešení, potrebujeme poznať riešenie rovnice (2). To však už v podstate vieme, pretože je analogicky podobné riešeniu (1). Musí platiť aspoň jedno z:

$$\gamma=\alpha, \tag{2.A}$$
$$\gamma=1-\alpha. \tag{2.B}$$

Riešenie sa nám teda znova vetví na dve časti. Máme štyri, ktoré musíme preveriť:

$(\mathbf{1.A}-\mathbf{2.A})$: Platí $\beta=\alpha$ a $\gamma=\alpha$, čiže $\alpha=\beta=\gamma$. Nakoľko hľadáme len kladné riešenia, prvým riešením je trojica (α,α,α), $\alpha\in\mathbb{R}^+$.

$(\mathbf{1.A} - \mathbf{2.B})$: Platí $\beta = \alpha$ a $\gamma = 1 - \alpha$. V tomto prípade musíme dávať pozor na to, kedy sú všetky tri premenné kladné. Musí platiť $\alpha > 0$ a zároveň $1 - \alpha > 0$, teda $\alpha < 1$.

Druhým riešením je trojica $(\alpha, \alpha, 1 - \alpha)$, $\alpha \in (0, 1)$.

$(\mathbf{1.B} - \mathbf{2.A})$: Platí $\beta = 1 - \alpha$ a $\gamma = \alpha$. Podobne ako v predošlom prípade, treba si dať pozor, aby boli všetky premenné kladné. Tretím riešením v tomto prípade je trojica $(\alpha, 1 - \alpha, \alpha)$, $\alpha \in (0, 1)$.

$(\mathbf{1.B} - \mathbf{2.B})$: Platí $\beta = 1 - \alpha$ a $\gamma = 1 - \alpha$. Štvrtým riešením je trojica $(\alpha, 1 - \alpha, 1 - \alpha)$, $\alpha \in (0, 1)$.

Ľahko sa presvedčíme, že všetky štyri typy riešení, ktoré sme našli, naozaj vyhovujú, a to tak, že ich dosadíme do pôvodnej sústavy rovníc.

1.6 Kadekto Musel Stáť

opravovali **Jožo** a **Mimi**

Zadanie. *Súčasťou večerného života Grékov boli aj divadelné predstavenia v amfiteátroch. Vždy pred predstavením sa pred amfiteátrom tvorili dlhé rady, no ani dĺžka radov neodradila gréckych džentlmenov od bontónu.*

Do radu prišlo naraz 30 *Grékov – dámy aj páni. Na začiatku každej minúty každý pán, ktorý mal hneď za sebou dámu, túto dámu pustil pred seba (vymenil sa s ňou). Dokážte, že po* 30 *minútach boli všetky dámy pred všetkými pánmi a to bez ohľadu na to, ako vyzeral rad na začiatku. Pánov a dám môže byť rôzny počet.*

Riešenie

Všimnime si, že zakaždým sa vymieňajú iba susední pán a dáma. Vzájomné poradie dám sa nemení. Preto si môžeme očíslovať dámy celými číslami od 1 do d (vrátane), kde d je počet dám v rade, v poradí, v akom stoja v rade. Toto číslovanie sa zachová počas celého procesu. Ako druhé vypozorujme, že v danej chvíli (na danom začiatku minúty) sa dáma posúva dopredu práve vtedy, ak na začiatku tohto pohybu stál bezprostredne pred ňou pán.

Keď si skúsime simulovať správanie sa radu pre nejaké počiatočné rozostavenia dám a pánov, uvidíme, že prvá dáma sa od začiatku hýbe dopredu, až kým nepredbehne všetkých pánov. Druhá dáma môže byť blokovaná prvou, ale iba raz, lebo potom sa už za prvú dámu dostane každú minútu jeden pán, ale druhá každú minútu predbehne iba jedného, čiže prvú dobehne až na začiatku radu. Podobne tretia dáma môže byť na začiatku blokovaná, ale iba v prvých dvoch minútach… Vo všeobecnosti: Každá dáma počká najviac toľko minút, koľko je pred ňou dám. Za tento čas sa práve toľko pánov (ak sme nenarazili na začiatok radu) dostane do priestoru medzi ňou a prvou dámou. Odvtedy už má vždy koho predbiehať. Na základe takýchto experimentov už sformulujeme pomocné tvrdenie, ktorého dôkazom úlohu vyriešime.

Matematickou indukciou[4] teda dokážme, že k-ta dáma v rade (pre všetky čísla dám k) vždy, keď už prešlo aspoň $k - 1$ minút, sa bude nachádzať bezprostredne za pánom (alebo, ekvivalentne, sa pohne) alebo pred všetkými pánmi.

Pre $k = 1$ prvá dáma vždy, keď už prešlo aspoň 0 minút (táto podmienka je splnená pri každej príležitosti na pohyb), sa má pohnúť alebo stáť na čele radu. Keďže pred ňou nestojí ani jedna dáma, akonáhle sa pred ňou niekto nachádza, musí sa hneď pred ňou nachádzať pán. Tým je tento prípad dokázaný.

Keď už máme za sebou aspoň $k - 1$ minút, pri predchádzajúcom pohybe už prešlo aspoň $k - 2$ minút, takže z indukčného predpokladu pri predchádzajúcom pohybe sa dáma číslo $k - 1$ pohla alebo sa pred ňou už nenachádzal

[4] O tomto nástroji viac v zbierke KMS na `https://old.kms.sk/docs/zbierkaKMS_klikacia.pdf#3`.

pán. Ak sa pohla, bezprostredne za ňu sa dostal pán, čo znamená, že medzi ňou a dámou číslo k je aspoň jeden pán. Ak sa pred dámou $k-1$ už nenachádza pán, buď sa nenachádza ani pred k-tou, alebo sa opäť nejaký nachádza medzi nimi. Odtiaľ bezprostredne pred k-tou dámou stojí pán, čo sme chceli. Dokázali sme tvrdenie pre k.

Z tohto plynie, že posledná dáma číslo d sa pohne zakaždým, keď prešlo aspoň $d-1$ minút a pred ňou je ešte nejaký pán. Ak sa po 29 minútach pred ňou ešte nachádza nejaký pán, musel sa tam nachádzať nejaký aj vždy dovtedy (počet pánov pred ňou nemôže vzrásť, páni sa posúvajú iba za ňu), čo znamená, že na začiatku každej minúty od d-tej po dvadsiatu deviatu vrátane sa dáma pohla. To sa ale musela pohnúť $30-d$ ráz, čo je spor, pretože v rade stojí celkovo iba $30-d$ pánov a potom, čo ju každý pustil pred seba, už pred ňou nemôže byť ani jeden. To znamená, že všetci sa nachádzajú za ňou (a za všetkými ostatnými dámami) a dokázali sme tvrdenie zo zadania dokonca pre 29 minút.

Pravdaže, tým ho máme dokázané aj pre požadovaných 30, pretože posledný pohyb cieľový stav už nezvráti (ba čo viac, na začiatku tridsiatej minúty sa neudeje ani jedna výmena).

1.7 Kompletne Márny Sizyfos

opravoval **Juro**

Zadanie. *Po vystátí radu sa začalo divadelné predstavenie o Syzifovi. Bohovia udelili Syzifovi za trest tlačenie kameňa do kopca. V nultý deň vytlačil Syzifos kameň do nejakej výšky, no na konci dňa sa mu skotúľal o kus nadol. V prvý deň znovu vytlačil kameň do nejakej výšky a večer sa mu opäť skotúľal. Takto Syzifos pokračoval do nekonečna…*

Máme danú nekonečnú postupnosť $a_0, a_1, a_2, \dots$ reálnych čísel takú, že pre každé kladné celé číslo n platí $(a_{n-1}+a_{n+1})/2 \ge a_n$. Dokážte, že pre všetky kladné celé čísla n platí

$$\frac{a_0+a_{n+1}}{2} \ge \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Riešenie

Zo zadania vieme, že platia nasledovné vzťahy:

$$\begin{aligned} 2a_1 &\le a_0 + a_2, \\ 2a_2 &\le a_1 + a_3, \\ &\vdots \\ 2a_n &\le a_{n-1} + a_{n+1}. \end{aligned}$$

Sčítajme všetky nerovnice, dostaneme $2(a_1+\cdots+a_n) \le a_0 + a_1 + a_n + a_{n+1} + 2(a_2+\cdots+a_{n-1})$, odkiaľ odčítaním rovnakých členov dostávame $a_1 + a_n \le a_0 + a_{n+1}$. To je cool nerovnosť. S touto nerovnosťou už máme prakticky vyhraté, zároveň hlavný trik už máme za sebou.

Uvedomme si, že platí aj $a_2 + a_n \le a_1 + a_{n+1}$, ktorú dostaneme tak, že v pôvodnom veľkom súčte nevezmeme prvý riadok. Všeobecnejšie, rovnako aj $a_k + a_l \le a_{k-1} + a_{l+1}$ pre ľubovoľné $k \le l \le n$, čo dostaneme tak, že vezmeme iba súčet rovníc

$$2a_k \leq a_{k-1} + a_{k+1},$$
$$\vdots$$
$$2a_l \leq a_{l-1} + a_{l+1}.$$

Intuitívne, čím ďalej sú od seba dva indexy, tým väčší súčet dávajú. A nás zaujíma $a_0 + a_{n+1}$. Skúsme pomocou nerovností z minulého kroku dosiahnuť súčet $a_1 + \cdots + a_n$. Už stačí iba ľahká úvaha a dostaneme nasledovné nerovnosti (pre nepárne n je rozdiel iba v tom, že v strede nebude "stredný" člen):

$$a_0 + a_{n+1} \geq a_1 + a_n,$$
$$a_0 + a_{n+1} \geq a_1 + a_n \geq a_2 + a_{n-1},$$
$$\vdots$$
$$a_0 + a_{n+1} \geq a_1 + a_n \geq \ldots \geq a_k + a_{n-k+1},$$
$$\vdots$$
$$a_0 + a_{n+1} \geq a_1 + a_n \geq \ldots \geq a_{n/2} + a_{n/2},$$
$$a_0 + a_{n+1} \geq a_n + a_1 \geq \ldots \geq a_{n/2+1} + a_{n/2-1},$$
$$\vdots$$
$$a_0 + a_{n+1} \geq a_n + a_1.$$

Po sčítaní všetkých nerovností dostávame $n(a_0 + a_{n+1}) \geq 2(a_1 + \cdots + a_n)$, čo je skutočne to, čo sme chceli dokázať.

Iný postup: Iba v rýchlosti spomenieme iné, netradičné riešenie. Ak si body $a_0, a_1, a_2, \ldots$ usporiadame do grafu funkcie, ktorej $f(0) = a_0$, $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $\ldots$ a spojíme tieto body úsečkami (tj. interpolujeme lineárnymi funkciami), tak plocha nad grafom je z predpokladov *konvexná* (stačí si to nakresliť, aby to bolo uveriteľné, no tento krok si treba poriadne rozmyslieť a zdôvodniť). Z vlastností konvexných útvarov plynie aj to, že úsečka spájajúca body $[0, a_0], [n+1, a_{n+1}]$ leží celá nad všetkými bodmi $[1, a_1], \ldots, [n, a_n]$, teda jej stred leží nad ich priemerom (body priemerujeme tak, že zvlášť spriemerujeme x-ové súradnice, a zvlášť y-ové súradnice). Požadovanú nerovnosť dostaneme ako nerovnosť medzi y-ovými súradnicami spomínaného stredu úsečky a priemeru.

1.8 Kompetitívna Majestátna Súťaž

opravoval **Ákos**

Zadanie. *Ešte významnejším podujatím ako divadelné predstavenia boli olympijské hry. V starovekom Grécku mali však nezvyčajný systém bodovania.*

Olympijských hier sa zúčastnilo $2n$ tímov. Každá (neusporiadaná) dvojica tímov hrala proti sebe práve raz. Žiaden zápas neskončil remízou. Po každom zápase dostal porazený tím 0 bodov a víťazný tím toľko bodov, koľkokrát pred tým celkovo prehral. Nájdite všetky celé čísla $n \geq 2$, pre ktoré mohli olympijské hry prebehnúť tak, aby každý tím skončil s rovnakým nenulovým počtom bodov.

Riešenie

Keď si bežný riešiteľ (alebo opravovateľ) prečíta zadanie typu „všetky dvojice hrali proti sebe práve raz“, mali by mu hneď napadnúť turnajové grafy (tournament graph[5]). Keby sme nemali takýto čudný bodovací systém, už by sme boli dosť šťastní. Keby sme vyhodnocovali zápasy na konci turnaja (tak, že každá výhra dáva toľko bodov, koľkokrát sme prehrali), vtedy by sme mohli body počítať celkom ľahko, iba vynásobením počtu výhier a prehier pre dané družstvo. To by sme hneď mali pozorovanie, že každé družstvo buď vyhralo k hier a prehralo $2n-1-k$ zápasov, alebo prehralo k a vyhralo $2n-1-k$. Ale tu sa skóre určuje úplne iným spôsobom, táto úvaha nám nepomohla.

Ľahké začínajúce pozorovania

Poďme sa teraz pozrieť, čo je toto za bodovací systém. Môžeme sa napríklad spýtať, či družstvá silné v normálnom živote (napr. Bayern Mníchov v Lige Majstrov v ročníku 2019/2020) sú silné aj v tomto bodovacom systéme: Prídeme na to, že ono to tak vôbec nie je, pretože samé výhry znamenajú 0 bodov. Taktiež si môžeme všimnúť, že aj keď dva tímy vyhrali rovnako veľa zápasov, ak tím A vyhral prvých k zápasov, tak ten má 0 bodov, a B, ktorý vyhral posledných k, má $k(2n-1-k)$ bodov. Takže počet výhier nám o skóre nehovorí nič.

Ešte predtým, než sa začneme zaoberať nejakými ozajstnými turnajmi, poďme si tipnúť, čo by sme vlastne chceli dokázať. Keby sme chceli ukázať pre nejaké n, že to nejde, tak by sme mali nájsť nejaký hrozne silný invariant, ktorý sa nám popasuje s hrozne veľa možnosťami. Treba si všimnúť, že nevieme nič o tom, kto kedy hral. Nemôžeme voľne predpokladať, že každý tím má odohratých v istom čase zhruba rovnako veľa zápasov, a dokonca zápasy sú asymetrické v zmysle, že nejaký tím môže výhrou získať oveľa viac bodov ako ten druhý. Teda ukázať niečo také, že niečo sa nedá, vyzerá byť skoro nemožné.

Na druhú stranu v prípade kladnej odpovede máme ľahšiu prácu, treba nájsť jeden rozpis zápasov, kde všetci majú rovnaké skóre. A vyššie sme videli, že máme relatívne veľké množstvo volieb. Tak pokúsme sa o nájdenie vhodnej konštrukcie v malých prípadoch a možno uvidíme niečo, čo by mohlo fungovať aj pre väčšie čísla.

Základná konštrukcia

Najprv sa pozrime, ako sa dobre počíta skóre pre daný tím a ako sa z tohto počítania dá pripraviť vhodný rozpis zápasov. Tak daný tím odohral $2n-1$ zápasov, niektoré vyhral, niektoré nie. Môžeme ich chronologicky po sebe napísať, ako postupnosť výhier (W – win) a prehier (L – loss). Napríklad, ak niekto vyhral prvé 2 zápasy, potom prehral a vyhral a znovu prehral, tak postupnosť tímu je $WWLWL$. Tu sa skóre počíta celkom jednoducho: treba spočítať pre všetky W, koľko je pred nimi L. Každý tím má teda nejakú takúto postupnosť a chceme tieto postupnosti napísať do tabuľky tak, aby sme po riadkoch s vynechaním prázdnych políčok dostali postupnosť daného tímu. Tiež chceme, aby každý stĺpec reprezentoval jeden zápas. Teda v každom stĺpci by sme mali mať práve jedno W a jedno L aináč prázdne políčka. Toto bude nejaký úplný rozpis turnaja. Môžeme si rozmyslieť, že tabuľka by mala mať $2n$ riadkov a $\binom{2n}{2}$ stĺpcov.

Tak poďme na to pre $n=2$ (4 tímy). Aby niekto mal nenulové skóre, musí mať aj prehru, aj výhru a všetci musia hrať 3 zápasy. Tak po chvíľke hrania si uvedomíme, že maximum dosiahnuteľných bodov je 2 a dá sa dosiahnuť postupnosťami LLW a LWW. Hneď si ale vieme povedať, že takýto turnaj sa nám nájsť určite nepodarí, pretože všetci musia začať prehrou, teda chronologicky prvý zápas nemal kto vyhrať. Zostáva iba prípad, keď všetci získajú

[5]Viď viac napr. na týchto stránkach: https://prase.cz/library/Turnaje_a_orientovane_grafy_PT/Turnaje_a_orientovane_grafy_PT.pdf a https://prase.cz/library/TurnajeET/TurnajeET.pdf.

práve 1 bod. Toto je možné iba postupnosťami WLW a LWL (ľahko si vieme rozmyslieť, že tieto postupnosti sú dobré, WWW a LLL dávajú 0, LLW a LWW sme pozerali, dávajú 2 body, WLL a WWL dávajú tiež 0 bodov a dokopy je 8 rôznych postupností). Takže aby sme mali rovnaký počet výhier a prehier, 2 tímy mali postupnosť WLW a 2 tímy LWL. To sa dá spraviť napríklad takto:

$$
\begin{bmatrix}
W & L & & & W & \\
L & & W & & & L \\
& W & & L & & W \\
& & L & W & L &
\end{bmatrix}
$$

Takže pre $n = 2$ to ide.

Rekurentný krok

Z tejto konštrukcie by sme si mohli zobrať so sebou nejaké nápady. Napríklad ten so striedajúcimi postupnosťami vyzerá dosť dobre. Chceme ukázať, že naše dve striedavé postupnosti dĺžky $2n - 1$ ($WLW \dots LW$ a $LWL \dots WL$) majú vždy rovnakú hodnotu. A ono to platí triviálne, pretože W na začiatku postupnosti pripočíta 0 bodov a L na konci tiež, a keď tie zmažeme z oboch postupností, dostávame tú istú postupnosť ($LWLW \dots LW$) dĺžky $2n-2$. Ak už máme konštrukciu pre n, ľahko spravíme konštrukciu pre $n+1$. Treba iba spraviť niečo nasledovného typu: na začiatku turnaja prídu 2 tímy, rýchlo zahrajú všetky svoje zápasy a potom odídu. Potom zvyšných $2n$ tímov hrá už len medzi sebou ako v turnaji pre n. Treba dať pozor na to, aby sa pre nikoho nepokazilo striedanie výhier a prehier, ale ide to dosť priamočiaro.

Chceme pridať 2 tímy (budeme ich nazývať A a B a staré tímy si pomenujme $1, 2, \dots, 2n$) tak, aby sme konštrukciu pre n nijak nepokazili. Asi najjednoduchší spôsob je, že na začiatok turnaja si dáme všetky zápasy A s očíslovanými tímami. Chceme to spraviť tak, aby postupnosť tímu A bola striedavá, aby aj oni nahrali toľko bodov, ako ostatní. Takže nech hrá A s tímami v poradí $1, 2, \dots, 2n$ tak, aby jeho postupnosť začínala s W (teda tím A porazil práve tímy s nepárnym číslom). Po týchto $2n$ zápasoch si tím B zahrá $2n$ zápasov proti očíslovaným tímom tak, že prehrá práve proti tímom s nepárnym číslom. Potom si ešte zahrajú medzi sebou zápas A a B tak, že vyhrá A. Teraz nám zostávajú iba zápasy medzi tímami s číslami. Chceme to zorganizovať tak, aby všetky postupnosti boli striedavé, teda aby tento menší turnaj začínali prehrou tímy s nepárnym číslom. Môžeme si všimnúť, že v prípade 2 tímov a rovnako tu pre $n+1$ tímov, vďaka rozpisu prvých $4n+1$ zápasov platí, že ak zoradíme tímy v poradí $(A, 1, \dots, 2n, B)$, tak prvé hry tímov končili $W, L, W, \dots L$, takže ak z konštrukcie pre n vymeníme všetky W na L a naopak, dostaneme taký podrozpis turnaja pre $n+1$, čo po spojení s prvými $4n+1$ zápasmi dáva pre všetky tímy vhodnú striedavú postupnosť. Pre ilustráciu pre $n = 3$ viď rozpis.

$$
\begin{bmatrix}
W & L & W & L & & & & & W & & & & & & \\
L & & & & W & & & & & \color{red}{L} & \color{red}{W} & & & \color{red}{L} & \\
& W & & & & L & & & & \color{red}{W} & & \color{red}{L} & & & \color{red}{W} \\
& & L & & & & W & & & & \color{red}{L} & & \color{red}{W} & & \color{red}{L} \\
& & & W & & & & L & & & & \color{red}{W} & \color{red}{L} & \color{red}{W} & \\
& & & & L & W & L & W & L & & & & & &
\end{bmatrix}
$$

Týmto sme si ukázali jednoduchú metódu na rekurentnú výrobu správneho rozpisu (správnosť sme si ukázali tým, že sme si ukázali, že striedavou postupnosťou všetky tímy získajú rovnaký počet bodov) pre všetky $n \geq 2$. Odpoveďou teda je, že taký turnaj sa mohol odohrať pre všetky $n \geq 2$.

1.9 Kruhy Mysliteľa Syrakúz

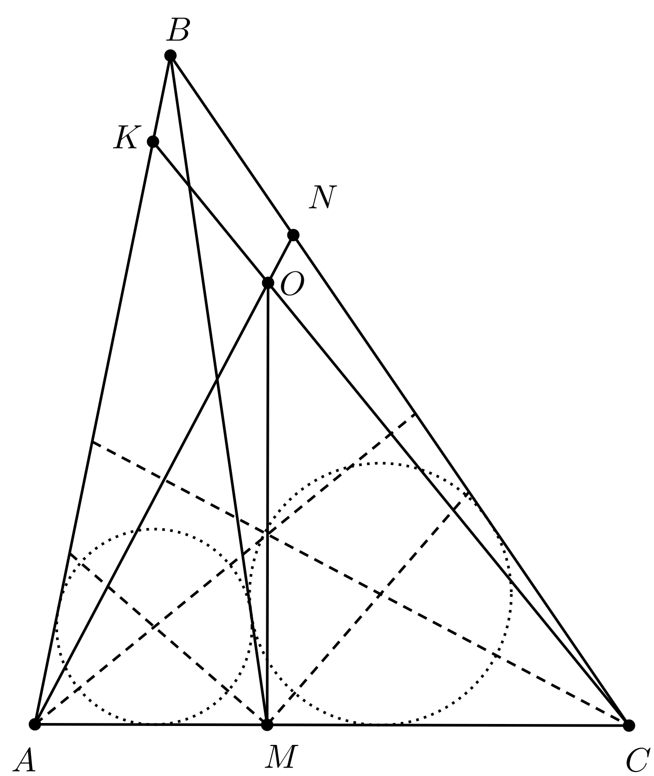
opravovali **Pedro** a **Marek**

Zadanie. *Jeden z rímskych vojakov vtrhol práve do domu Archimeda a našiel ho pri tom, ako do piesku kreslí matematické diagramy. Archimedes, ktorý si v pohrúžení nevšimol ani prítomnosť vojaka, na to nakoniec doplatil. Riman mu zakázal kresliť a vtedy fyzik vyslovil slávnu vetu: „Noli tangere circulos meos!", čo v preklade znamená: „Nedotýkaj sa mojich kruhov!." Vraj to boli posledné slová, ktoré vyriekol pred svojou smrťou (vojak ho prebodol mečom).*[6] *Pri tomto známom Archimedovom výroku „Nerušte moje kruhy" išlo o kruhy nasledovné:*

V trojuholníku ABC, kde platí $|AC| < |AB| < |BC|$, ležia na stranách AB a BC postupne body K a N tak, že platí $|KA| = |AC| = |CN|$. Priamky AN a CK sa pretínajú v bode O. Bod M leží na strane AC tak, že OM je kolmé na AC. Dokážte, že kružnice vpísané trojuholníkom ABM a CBM sa dotýkajú.

Riešenie

Hoci úloha je zaradená až na deviatu pozíciu, jej riešenie môže byť veľmi jednoduché a intuitívne (hoci fungujú aj menej intuitívne a zložitejšie riešenia, takže ak by ste mali smolu a nenakreslili si do obrázka kľúčové čiary, stále by ste neboli stratení). Riešenie sa skladá z dvoch fáz. V prvej fáze sa pokúsime zistiť niečo viac o konfigurácii vytvorenej bodmi K a N a v druhej fáze použijeme zistené informácie na doklepnutie dotyku žiadaných kružníc.

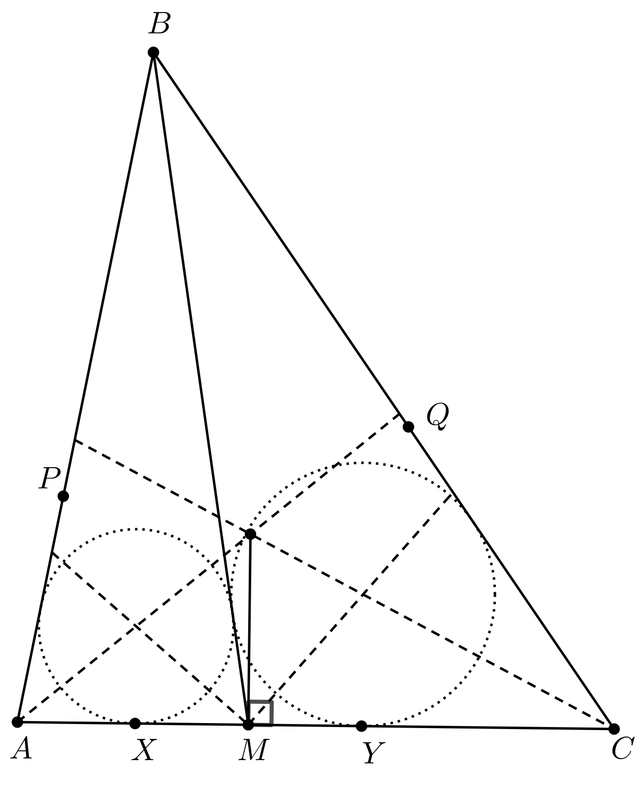


[6] Zdroj: https://sk.wikipedia.org/wiki/Archimedes_zo_Syrakúz

V prvej časti, keď sa hráme s príkladom a snažíme sa čosi si všimnúť, tak budeme mať šťastie, ak si do obrázka nakreslíme osi uhlov BAC a BCA. Takéto dokreslenie vyzerá fajn už predtým, ako vieme, že sa nám bude hodiť. Jednak nám osi týchto uhlov pomôžu nájsť stredy žiadaných vpísaných kružníc, dvak sa nám môže javiť zaujímavé, že na týchto osiach zároveň leží aj stred kružnice vpísanej samotnému trojuholníku ABC.

Keď už tieto priamky máme nakreslené, môžeme si všimnúť (a aj to urobíme!), že nakoľko trojuholníky ACN a ACK sú rovnoramenné so základňami AN a CK, tak zrovna tieto osi uhlov BAC a BCA sú v týchto trojuholníkoch aj výškami. To ale znamená, že sú výškami aj v trojuholníku AOC. V tomto trojuholníku je ale výškou aj priamka OM, a teda tieto tri priamky sa pretínajú v jednom bode, ktorým je stred vpísanej kružnice v trojuholníku ABC. To ale znamená, že M je bodom dotyku kružnice vpísanej trojuholníku ABC a strany AC. Týmto zistením je prvá fáza úspešne ukončená.

V druhej fáze sa vieme zbaviť značnej časti príkladu. Stačí nám už totiž iba dokázať, že majúc základný trojuholník ABC a bod M predefinovaný ako dotyk trojuholníka s jemu vpísanou kružnicou, tak kružnice vpísané AMB a CMB sa dotýkajú. Táto fáza je založená na známom a jednoduchom tvrdení o dĺžkach úsekov medzi bodom dotyku vpísanej kružnice a vrcholom trojuholníka. Spomínané tvrdenie vyjadruje dĺžky týchto úsekov pomocou dĺžok strán trojuholníka (a okrem samotného vyjadrenia z neho aj vyplýva, že dĺžky úsekov z jedného vrchola sa rovnajú). [7]



Všimnime si najskôr, že na to, aby sa nám kružnice dotýkali, musí byť vzdialenosť od bodu M do bodov dotyku týchto kružníc so spoločnou stranou MB rovnaká. Tieto vzdialenosti si vieme vďaka známej vlastnosti preniesť

[7] Samotné explicitné znenie vyjadrenia si môžete prečítať napríklad tu, v odseku "touchpoints": http://mathafou.free.fr/themes_en/kincircle.html

na stranu AC. Označme si preto X a Y postupne bod dotyku kružnice vpísanej trojuholníku AMB so stranou AC a bod dotyku kružnice vpísanej trojuholníku CMB so stranou AC. Chceme ukázať rovnosť $|XM| = |MY|$.

Na dôkaz tejto rovnosti využijeme spomínaný vzorec, pomocou ktorého môžeme oboje dĺžky vyjadriť pomocou dĺžok strán v trojuholníkoch AMB a CMB. Tento vzorec aplikovaný na stranu XM má nasledovný tvar: $|XM| = \frac{1}{2}(|MA| + |MB| - |AB|)$ a podobne $|YM| = \frac{1}{2}(|MC| + |MB| - |CB|)$. Ak dáme tieto dve vyjadrenia do rovnosti, tak po jednoduchých úpravách nám zostane overiť platnosť: $|AB| - |MA| = |CB| - |MC|$ (tu došlo ešte aj k výmene znamienok na oboch stranách rovnice). Táto rovnosť ide ukázať buď opätovným využitím rovnakého vzorca, tentoraz aplikovaného na trojuholník ABC a jeho vpísanú kružnicu, alebo aj nasledovne. Označme ešte P a Q body dotyku vpísanej kružnice trojuholníku ABC so stranami AB a CB. Potom vieme, že $|MA| = |AP|$ a $|MC| = |CQ|$, čím vieme našu rovnosť upraviť na $|AB| - |AP| = |CB| - |CQ|$. To je ale ekvivalentné $|BP| = |BQ|$, čo samozrejme platí, nakoľko B môžeme vnímať ako priesečník dotyčníc ku kružnici vpísanej ABC. (Navyše rovnakú rovnosť sme už v úlohe využili niekoľkokrát. Ak ste si to neuvedomili, prečítajte si tento odstavec ešte raz.)

1.10 Kontradikció Monotheism Superlatif

opravoval **Mišo S.**

Zadanie. *Nad starovekými Grékmi bdelo nespočetné množstvo bohov. Zapamätať si všetky tie ich mená je priam nemožné. Ani my si ich nepamätáme. Preto miesto mien ich budeme volať číslami. Taký Zeus, vládca Olympu, mal číslo* 5*, ktoré má nasledovnú zaujímavú vlastnosť. Vieme ho vyjadriť ako súčet aj súčin piatich celých čísel, ktoré sú v oboch prípadoch rovnaké* $5 = 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = 5 + 1 + 1 - 1 - 1$. *Z toho dôvodu Zeus býval na Olympe len s bohmi, ktorí mali túto vlastnosť tiež.*

Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré existuje n (nie nutne rôznych) celých čísel, ktorých súčet aj súčin je rovný n.

Riešenie

Označme si hľadanú množinu čísel $x_1,\ x_2, \dots,\ x_n$. Má nám platiť $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$ a $x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n = n$.

Môžeme si všimnúť, že ak máme nejakú množinu čísel a pridáme k nej jednotku, súčin sa nezmení, ale súčet (ktorý očakávame, že zvyčajne bude menší), sa zväčší o 1. Ďalšia užitočná vec, ktorá sa môže hodiť pri konštrukcii, je, že pridaním štyroch čísel $-1,\ -1,\ 1,\ 1$ sa nezmení ani súčet, ani súčin. Teda keď sa nám podarí zapísať nejaké číslo n ako súčin aj súčet tých istých t čísel, vieme ho zapísať aj ako súčet $t + 4,\ t + 8, \dots$ čísel atď.

Keďže $x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n = n$, musia byť všetky x_i deliteľmi čísla n. Keďže chceme v tomto tvare zapísať čo najviac čísel, a to aj prvočísla, či čísla, ktoré sú súčinom len málo prvočísel a ťažko sa rozkladajú, bolo by dobré nájsť taký rozklad, ktorý obsahuje čo najviac ± 1 a čo najmenej iných čísel.

Keďže pridanie štvorice $1,\ 1,\ -1,\ -1$ k nejakému zápisu nezmení ani súčet, ani súčin, pre čísla $n = 4k + 1$ vieme jednoducho za čísla x_i zobrať číslo n, $2k$ jednotiek a $2k$ mínus jednotiek.

$$n = n \cdot (-1)^{2k} \cdot 1^{2k}$$
$$n = n + (-1) \cdot 2k + 1 \cdot 2k$$

Ak máme párne číslo, musí vo svojom rozklade obsahovať párny počet párnych sčítancov, a teda aj činiteľov. Je to kvôli tomu, že keby ich bol nepárny počet, ich súčet by bol párny a k nemu by sme pridali ešte nepárny počet nepárnych čísel (zvyšné sčítance) a dokopy by sme mali nepárny súčet. My ale potrebujeme dostať párny súčet rovný n.

Z toho vidno, že čísla tvaru $n = 4k + 2$ v požadovanom tvare zapísať nemožno. Sú párne, musíme použiť aspoň jedno párne x_i, ale zároveň takých musí byť párny počet, čiže musíme mať aspoň dve. Avšak vtedy už súčin bude deliteľný 4 a je jedno, čo k tomu prinásobíme, nikdy nedostaneme číslo tvaru $4k + 2$.

Ak máme číslo 4, musíme tiež použiť aspoň dva párne činitele, takže musíme použiť čísla $1, 1, 2, 2$ s nejakými znamienkami. Záporných musí byť vždy párny počet. Ak budú všetky kladné, dostaneme súčet 6, ak budú aspoň dve záporné, dostaneme najviac $2 + 2 - 1 - 1 = 2$. Ani štvorku teda zapísať nevieme.

Ak však budeme mať väčšie číslo deliteľné štyrmi, rozklad na súčin $n = \frac{n}{2} \cdot 2$ nám už pomôže, len sa musíme pohrať so znamienkami tak, aby sme dostali správny súčet. Znamienko pri dvojke dokonca závisí od zvyšku n po delení ôsmimi, teda pre n, ktoré je násobkom 4, rozlíšime dva prípady:

1. $n = 8k$, $k \geq 1$:

$$n = 2 \cdot (4k) \cdot (-1)^{2k} \cdot 1^{6k-2},$$
$$n = 2 + 4k + (-1) \cdot (2k) + 1 \cdot (6k - 2),$$

2. $n = 8k + 4$, $k \geq 1$:

$$n = (-2) \cdot (4k + 2) \cdot (-1)^{2k-1} \cdot 1^{6k+3},$$
$$n = (-2) + (4k + 2) + (-1) \cdot (2k - 1) + 1 \cdot (6k + 3).$$

Číslo 4 by patrilo do prípadu 2., lenže k by bolo 0 a počet mínus jednotiek by musel byť $2k - 1 = -1$, čo nie je možné.

Napokon nám ostávajú čísla n tvaru $4k + 3$. Tie sú tvrdý oriešok. Ak skúšame takéto čísla zapísať v požadovanom tvare, nijak sa nám to nedarí, takže by sme mohli skúsiť dokázať, že sa to nedá. Z toho, čo sme zistili doteraz, zrejme budú dôležité zvyšky po delení 4. Keďže máme n nepárne, všetky x_i musia byť nepárne, teda mať zvyšok 1 alebo 3 po delení 4 (inak dostaneme párny súčin).

Použijeme dôkaz sporom. Pre spor predpokladajme, že sme našli vyhovujúce čísla x_i a roztrieďme ich podľa zvyškov a znamienok.

Označme A počet tých, ktoré majú zvyšok 1 a sú kladné (napr. $1, 5, \ldots$), B počet tých, ktoré majú zvyšok 3 a sú kladné $(3, 7, \ldots)$, pre záporné označme C počet tých, ktoré majú v absolútnej hodnote zvyšok 1 $(-1, -5, \ldots)$ a D počet tých v absolútnej hodnote so zvyškom 3 $(-3, -7, \ldots)$.

Musí platiť, že všetkých x_i so zvyškom abs. hodnoty 3 je nepárny počet, inak bude mať celkový súčin absolútnych hodnôt zvyšok 1 (dvojica čísel so zvyškom 3 má súčin so zvyškom 1), takže B a D majú rôznu paritu.

Ďalej máme $n = A + B + C + D \equiv 3 \pmod 4$, pretože počet všetkých x_i je dohromady n.

Poďme sa pozrieť na to, aký zvyšok má súčet čísel x_i a porovnať ho s n:

$$n = x_1 + \cdots + x_n \equiv A \cdot 1 + B \cdot 3 - C \cdot 1 - D \cdot 3 \equiv A - B - C + D \equiv n \equiv A + B + C + D \pmod 4,$$
$$A - B - C + D \equiv A + B + C + D \pmod 4.$$

Všetkých záporných čísel musí byť párny počet, aby bol súčin kladný, teda

$$C + D \equiv 0 \pmod 2,$$
$$2C + 2D \equiv 0 \pmod 4.$$

Keď túto kongruenciu odčítame od pravej strany, dostaneme

$$A - B - C + D \equiv A + B - C - D \pmod 4,$$
$$-B + D \equiv B - D \pmod 4,$$
$$2B - 2D \equiv 0 \pmod 4,$$
$$B - D \equiv 0 \pmod 2,$$

čo je ale spor, pretože B a D musia mať rôznu paritu (ako sme už ukázali vyššie).

Aby sme si to zhrnuli, čísla n, ktoré sa dajú zapísať ako súčin aj súčet tých istých n celých čísel, sú práve všetky čísla so zvyškom 0 alebo 1 po delení 4 okrem samotného čísla 4.