Riešenia 2. kola zimnej časti

2.1 Krádež Matematických Symbolov ($\kappa \leq 1$) opravoval **Tomáš J.**

Zadanie. *Nadránom vstúpil muž do budovy, nad ktorou práve doblikal neónový nápis „Danteho Detektívna Agentúra," sňal si z hlavy klobúk a aj so sakom ho zavesil na vešiak. Prešiel zo päť metrov a sadol si za svoj dubový stôl. Vyložil si naň nohy a zobral do rúk noviny. Hľadiac na titulnú stranu uvidel, že je zase niekto nezvestný. Danteho detektívnou agentúrou sa ozývalo: „Chalani! Vyzerá to, že máme znovu robotu!"*

Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel (a, b), pre ktoré platí

$$4^a = b^2 + 7.$$

Niekto ich zase uniesol. Nájdite ich! Bleskovo!" kričal Dante na svojich podriadených.

Riešenie

Rovnicu zo zadania si upravíme nasledujúcim spôsobom

$$4^a - b^2 = 7,$$

$$(2^a)^2 - b^2 = 7,$$

$$(2^a - b)(2^a + b) = 7.$$

Súčin dvoch celých čísel je kladný. Vieme, že $2^a + b > 0$, teda aj $2^a - b > 0$. Súčin týchto dvoch kladných celých čísel je 7. Také čísla sú iba 7 a 1.

Pretože $2^a - b < 2^a + b$,

$$2^a - b = 1, \qquad 2^a + b = 7.$$

Sčítaním týchto rovníc dostaneme $2 \cdot 2^a = 8$, teda $a = 2$ a $b = 3$.

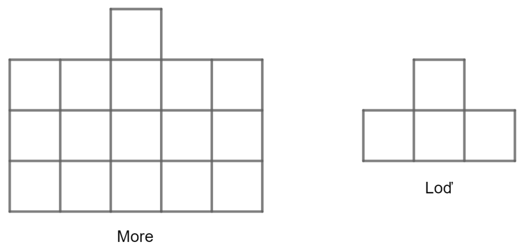
Odpoveď: rovnici vyhovuje iba dvojica čísel $(2, 3)$.

2.2 Koráb Mornár Strieľal ($\kappa \leq 2$) opravoval **Ondrej**

Zadanie. *Dante pokrýval so svojou firmou okrajovú časť ekonomického záujmu. Mal za úlohu riešiť problémy, ktoré sa občas v meste vyskytli. Matematické problémy. Aj napriek nepočetnej cieľovej skupine sa mu darilo, pretože jeho zákazníci boli zámožní a dobre mu platili. Napríklad taký admirál Ulysses S. bol celkom grand. To znamená, že dobre platil. Nerád však za muníciu, preto si zavolal Danteho agentúru, aby mu vyriešila tento problém:*

Na mori – pozri obrázok – sa nachádza na neznámom mieste loď tvaru T-čka – ako na obrázku – pričom však môže byť ľubovoľne otočená. „Na koľko najmenej políčok potrebujem vystreliť," pýtal sa admirál Ulysses S.,

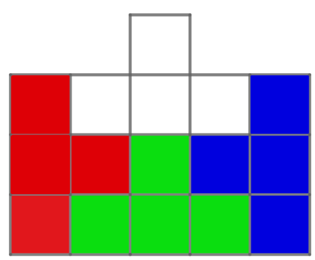
„aby som s istotou trafil loď v mori bez ohľadu na to, kde sa nachádza? A poriadne mi aj zdôvodnite, že na menej výstrelov mi to nie vždy vyjde, nebudem tu predsa plytvať muníciou!“



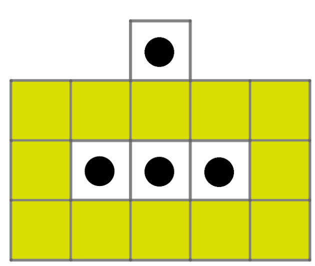
Riešenie

Máme zistiť na koľko najmenej políčok musíme vystreliť, aby sme loď zasiahli bez ohľadu na jej polohu. Poďme sa pozrieť na to, aké unikátne pozície môže loď zaberať, teda také, ktoré sa neprekrývajú. Keďže naša plocha má 16 políčok a loď zaberá 4, teda takýchto pozícií môže byť najviac 4.

Začnime v ľavom dolnom rohu. Na to aby sa časť loď nachádzala v rohu musí byť plochá strana lode popri kraji mora. Máme na výber buď horizontálne alebo vertikálne. Ale vertikálne nám nevyhovuje, lebo si odrežeme dve políčka, použijeme horizontálnu (červená loď na obrázku). Ak zrkadlovo zoberieme takúto pozíciu na druhej strane, jednoznačne dostaneme aj tretiu aj štvrtú, ktoré sa nachádzajú medzi nimi. Dostaneme takéto rozdelenie:



Pri tomto rozdelení vieme, že do každej farby musí padnúť minimálne jedna strela, ak chceme mať istotu, že trafíme loď. Teda potrebujeme minimálne štyri výstrely. Ale tá strela nemôže padnúť hocikam, ak chceme trafiť na istotu ľubovoľnú loď. Každá loď je presne daná svojim špicom. Ak vystrelíme do špicu každej našej zóny, tak ostanú nezasiahnuté len pozície, kam sa nezmestí celá loď (prinajlepšom len loď bez špicu), teda loď určite zasiahneme.



2.3 Kognitívna Matematická Spoločnosť ($\kappa \leq 3$)

opravoval **Miloš**

Zadanie. *Nadišiel ďalší deň. Slnko svietilo nad Manhattanom 50 rokov. Dante vstúpil do svojej agentúry, sňal si z hlavy klobúk a aj so sakom ho zavesil na vešiak. Prešiel zo päť metrov a sadol si za svoj dubový stôl. Vyložil si naň nohy a z vrecka vytiahol niekoľko po sebe idúcich kladných celých čísel takých, že ich súčet bol* 1000. *Koľko ich mohlo byť najviac?*

Riešenie

Na riešenie tejto úlohy použijeme známy vzorec pre súčet prvých i kladných celých čísel

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (i-1) + i = \frac{i(i+1)}{2}. \tag{1}$$

Tento vzorec môžeme využiť, aby sme zistili súčet čísel od n po $n+k-1$. Prečo práve $k-1$? Všimnime si, že čísel od n po $n+k-1$ je práve k. Stačí nám už teda nájsť iba najvyššiu možnú hodnotu k, aby sme zistili odpoveď na otázku zo zadania.

Pomocou (1) vieme vypočítať súčet čísel od 1 po $n+k-1$. Nás však zaujíma súčet od n po $n+k-1$, a nie od 1. Nestačí nám teda použiť (1) iba raz. Budeme musieť od súčtu čísel od 1 po $n+k-1$ odčítať súčet čísel od 1 po $n-1$:

$$\begin{aligned}
1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1) &= \frac{(n-1)n}{2}, \\
1 + 2 + \cdots + (n-1) + n + (n+1) + \cdots + (n+k-2) + (n+k-1) &= \frac{(n+k-1)(n+k)}{2}, \\
\frac{(n-1)n}{2} + n + (n+1) + \cdots + (n+k-2) + (n+k-1) &= \frac{(n+k-1)(n+k)}{2}, \\
n + (n+1) + \cdots + (n+k-2) + (n+k-1) &= \frac{(n+k-1)(n+k)}{2} - \frac{(n-1)n}{2}, \\
\frac{(n+k-1)(n+k)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} &= 1000, \\
n^2 + 2nk + k^2 - n - k - (n^2 - n) &= 2000, \\
2nk + k^2 - k &= 2000, \\
k(2n + k - 1) &= 2000.
\end{aligned}$$

Môžeme si všimnúť, že hľadáme dve kladné celé čísla, ktorých súčin je 2000. Aby toto tieto čísla spĺňali, musia byť obe deliteľmi 2000. Ďalej môžeme pozorovať, že $k < 2n + k - 1$. Delitele čísla 2000 teda môžeme priradiť k týmto dvom činiteľom nasledovne:

k	1	2	4	5	8	10	16	20	25	40
2n + k − 1	2000	1000	500	400	250	200	125	100	80	50

Keďže chceme nájsť čo najväčšie možné k, skúsime za k dosádzať postupne najvyššie možné hodnoty. Ak $k = 40$, potom $2n + k - 1 = 50$, čo by znamenalo, že $n = \frac{11}{2}$. My však vieme, že n musí byť celé číslo, teda $k \neq 40$. Ďalšia možnosť je $k = 25$. Potom $2n + k - 1 = 80$, z čoho $n = 28$. Tieto hodnoty vyhovujú všetkým podmienkam zo zadania, našli sme teda riešenie.

Dante mohol mať najviac 25 po sebe idúcich kladných celých čísel:

$$28 + 29 + 30 + \cdots + 50 + 51 + 52 = 1000.$$

Pozn.: Na vzorec sa dalo prísť aj nasledovne. Vypíšeme si súčet čísel od n po $n - k + 1$. Všimnime si, že sa v ňom n nachádza práve k krát a zvyšné členy tvoria súčet čísel od 1 po $k - 1$:

$$\begin{aligned} n + (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+k-2) + (n+k-1) &= 1000, \\ kn + 1 + 2 + \cdots + (k-2) + (k-1) &= 1000, \\ kn + \frac{(k-1)k}{2} &= 1000, \\ 2nk + k^2 - k &= 2000 \\ k(2n+k-1) &= 2000. \end{aligned}$$

2.4 Kasíno, Moc a Sláva ($\kappa \leq 5$)

opravovala **Robka**

Zadanie. *Keď Danteho nebavilo riešiť problémy iných, tak si vyrazil do lokálneho kasína ošklbať niekoho o peniaze. Dnes bola v ponuke takáto hra:*

Dvaja hráči – jeden naľavo a jeden napravo – hrajú hru. Pre potreby hry je na stole vyložených 2020 červených, 2020 zelených a 2020 modrých žetónov. Začína hráč napravo od žetónov, ktoré sú uprostred stola. Potom sa hráči striedajú v ťahoch. V jednom svojom ťahu si hráč zoberie zo stola aspoň jeden žetón, avšak nesmie si zobrať viac ako jeden žetón rovnakej farby. Vyhráva ten hráč, ktorý zoberie úplne posledný žetón zo stredu stola. Kam si má Dante sadnúť, aby mal proti svojmu súperovi víťaznú stratégiu? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

Poznámka: Víťazná stratégia znamená, že hráč vie voliť také ťahy, aby vyhral bez ohľadu na to, aké ťahy vykonáva jeho súper.

Riešenie

Stav hry budeme označovať trojicou prirodzených čísel (C, Z, M), kde čísla C, Z, M označujú počet červených, zelených a modrých žetónov na stole. Hra začína v stave $(2020, 2020, 2020)$ a končí, keď niektorý z hráčov dosiahne stav $(0, 0, 0)$.

Úlohy, v ktorých je potrebné nájsť víťaznú stratégiu sa obyčajne riešia od konca. Budeme hovoriť, že stav hry je vyhrávajúci, ak hráč na ťahu vie z tohto stavu zaručiť svoju výhru. Inak je stav prehrávajúci.

Zrejme stavy $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$ a ich permutácie sú vyhrávajúce, pretože hráč na ťahu môže zobrať všetky žetóny a ihneď vyhrať. Ďalej vieme zistiť, že $(2,0,0)$ je prehrávajúci stav, pretože jediný dovolený ťah nás dostane do stavu $(1,0,0)$. Avšak to je zle, pretože z tohto stavu vie náš súper vyhrať. Analogicky pre permutácie, t.j. stavy $(0,2,0)$ a $(0,0,2)$. Následne stavy $(2,1,0)$, $(2,1,1)$, $(3,1,0)$ a $(3,1,1)$ sú vyhrávajúce. Môžeme totiž zobrať žetóny tak, aby sme skončili v stave $(2,0,0)$. Z tohto stavu totiž nemôže súper vyhrať, a preto vyhráme my.

Takto môžeme postupovať až do nekonečna. Trvalo by nám však dlho, kým by sme sa dostali do stavu $(2020, 2020, 2020)$. Namiesto toho je užitočné všimnúť si vo vyhrávajúcich pozíciach nejaký vzor. Tu to vôbec nie je ťažké. Ak si vypíšeme dostatočne veľa pozícii, môžeme ľahko odhadnúť, že prehrávajúce sú práve tie pozície (M,Z,C), kde všetky tri M, Z, C sú párne. Z toho vyplýva, že víťazná stratégia spočíva v tom, že budeme hrať tak, aby vždy po našom ťahu boli M, Z aj C párne. Toto musíme aj dokázať.

Ak je súper na ťahu a M, Z, C sú párne, tak musí zobrať aspoň jeden žetón, a preto po jeho ťahu bude určite aspoň z jednej farby na stole nepárny počet žetónov. Následne my môžeme zobrať žetóny tých farieb, z ktorých je na stole nepárny počet. Tým sa znova dostaneme do situácie, kde M, Z, C sú párne. Navyše súper nemôže vyhrať, lebo po jeho ťahu bude vždy aspoň z jednej farby nepárny počet žetónov. Preto nikdy nemôže dosiahnuť stav $(0,0,0)$. Keďže hra určite skončí, tak musíme vyhrať my.

Hra začína v stave $(2020, 2020, 2020)$, ktorý je prehrávajúci, preto Dante musí ísť druhý a postupovať vyššie opísanou stratégiou.

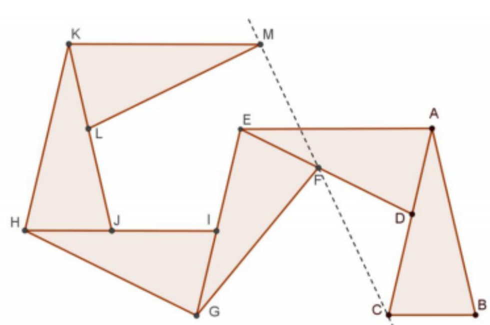
Poznámka: Opísať stratégiu v tejto konkrétnej úlohe bolo o dosť jednoduchšie. Funguje napríklad stratégia zopakovať ťah predchádzajúceho hráča. V skutočnosti je to tá istá stratégia, ktorú sme opísali v našom riešení. My sme chceli ukázať postup, ako sa na stratégiu dá prísť, v komplikovanejších úlohách.

2.5 Korporácii Modeluj Symbol ($\kappa \leq 8$)

opravovali **Mimi** a **Tomáš S.**

Zadanie. *Ráno sa Dantemu ťažko vstávalo do roboty. Veď aby nie, keď to včera prehnal s oslavami svojho veľkolepého víťazstva v kasíne. Preto keď mu ráno prišla ďalšia ponuka, delegoval ju na svojich podriadených – teda na vás. Chcelo sa mu spať.*

„Vážený pán Dante, naše firemné logo je zložené zo šiestich zhodných rovnoramenných trojuholníkov, ktoré sú umiestnené tak ako na obrázku, ktorý Vám v prílohe posielame. Naše logo však môže byť dokonalé len ak body M, F, C ležia na jednej priamke. Zistite nám, prosím, či body M, F, C ležia na jednej priamke. Musí to nevyhnutne platiť bez ohľadu na pomer dĺžok strán rovnoramenných trojuholníkov? Svoje tvrdenie zdôvodnite.“

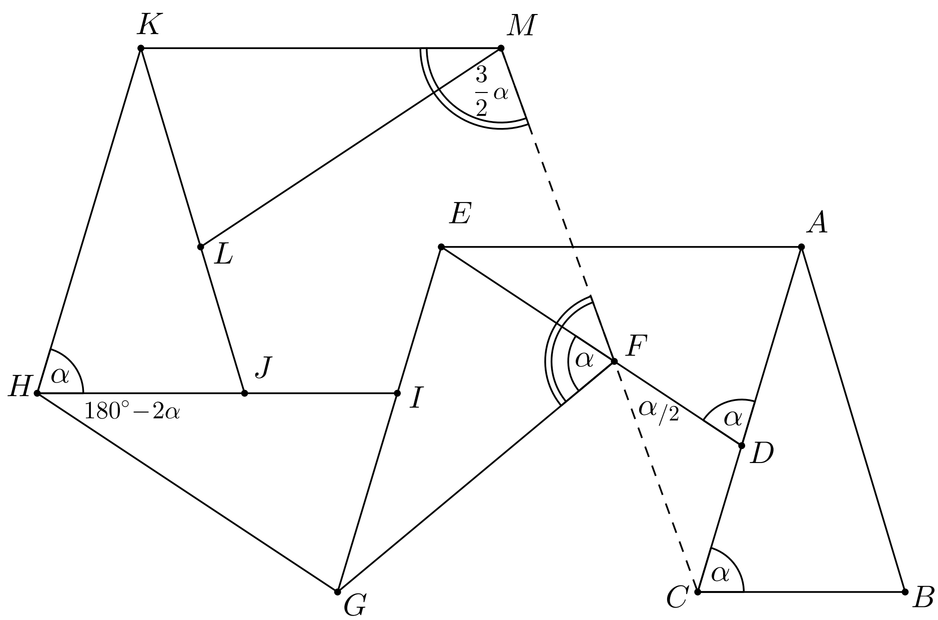


Riešenie

Akým spôsobom by sme vedeli dokázať, že body M, F, C ležia na jednej priamke? Predsa pomocou vrcholových uhlov, stačí dokázať $|\sphericalangle CFD| = |\sphericalangle EFM|$. Keďže zadané trojuholníky sú zhodné a rovnoramenné, tvar celého obrázka závisí len od jedného uhla. Napríklad keď si označíme $|\sphericalangle ACB| = \alpha$, všetky ostatné uhly závisia len od hodnoty α a pri troche šťastia by sa nám ich mohlo podariť dopočítať. Každý z našich šesť zhodných trojuholníkov má dva uhly rovné α a jeden uhol $180^\circ - 2\alpha$.

Vyjasnime si ešte jednu vec. Zadanie hovorí, že trojuholníky sú umiestnené ako na obrázku, čím sa myslí aj to, že body sú usporiadané v rovnakom poradí ako na obrázku. To konkrétne znamená, že bod D leží vnútri úsečky AC, čo je to ekvivalentné s tým, že trojuholník ABC má kratšiu základňu ako ramená, $|CB| < |AC|$.

Zamerajme sa na uhol $|\sphericalangle CFD|$. Trojuholník CDF je rovnoramenný, lebo $|FD| = |ED| - |EF| = |AC| - |AD| = |CD|$. Vieme, že uhol FDA má veľkosť α a je vonkajším uhlom v trojuholníku CDF. Využijeme, že súčet dvoch vnútorných uhlov trojuholníka je rovný vonkajšiemu protiľahlému uhlu (premyslite si), teda $|\sphericalangle CFD| + |\sphericalangle FCD| = |\sphericalangle FDA| = \alpha$. Zároveň z rovnoramennosti sú uhly $|\sphericalangle CFD|$ a $|\sphericalangle FCD|$ rovnaké, takže oba majú veľkosť $\alpha/2$.



Teraz by sme chceli vyjadriť uhol $|\sphericalangle EFM|$, ideálne aby bol tiež $\alpha/2$. Všimnime si päťuholník $FGHKM$. Štyri jeho strany majú rovnakú dĺžku a tri uhly FGH, GHK, HKM majú rovnakú veľkosť, lebo sú zložené z dvoch uhlov $\alpha = |\sphericalangle IGH| = |\sphericalangle JHK| = |\sphericalangle LKM|$ a $180^\circ - 2\alpha = |\sphericalangle FGE| = |\sphericalangle GHI| = |\sphericalangle HKJ|$. Päťuholník vyzerá byť symetrický podľa osi úsečky MF. Dalo by sa to zdôvodniť tým, že rovnoramenný trojuholník GHK je symetrický podľa osi uhla GHK, na úsečky HK a HG napojíme úsečky KM a GF rovnakej dĺžky pod rovnakými uhlami, takže budú tiež symetrické podľa tejto osi uhla. Potom obraz uhla KMF v osovej súmernosti podľa tejto osi je uhol GFM, takže majú rovnakú veľkosť: $|\sphericalangle KMF| = |\sphericalangle GFM|$.

Uvedieme ešte jedno zdôvodnenie rovnosti $|\sphericalangle KMF| = |\sphericalangle GFM|$. Rovnoramenné trojuholníky FGH a HKM sú zhodné podľa vety *sus*, takže $|HF| = |HM|$. Trojuholník MHF je rovnoramenný, takže $|\sphericalangle HFM| = |\sphericalangle HMF|$. Už ľahko spočítame rovnosť uhlov $|\sphericalangle KMF| = |\sphericalangle KMH| + |\sphericalangle HMF| = |\sphericalangle GFH| + |\sphericalangle HFM| = |\sphericalangle GFM|$.

Ďalej použijeme poznatky, že $|\sphericalangle KMF| = |\sphericalangle GFM|$, a že súčet uhlov v päťuholníku je 540° a dostaneme

$$|\sphericalangle GFM| = \frac{540^\circ - 3|\sphericalangle GHK|}{2} = \frac{540^\circ - 3(180^\circ - \alpha)}{2} = \frac{3\alpha}{2}.$$

Nakoniec naozaj dostávame $|\sphericalangle EFM| = |\sphericalangle GFM| - |\sphericalangle GFE| = \frac{3}{2}\alpha - \alpha = \alpha/2$, čím sme dokázali, že body M, F, C budú vždy ležať na jednej priamke, nezávisle od tvaru trojuholníka ABC.

2.6 Komplikovaná Mordovačka Strelcov

opravovali **Lucy** a **Jožo**

Zadanie. *Dante sa už-už chcel prevaliť na druhý bok, keď mu zazvonil telefón. „Mačka spadla do vírivky. Nasoľ chechtáky. Dnes v noci v Central Parku," zavrčal hlas jeho partnera Krumpľa. Dante zavrčal a zložil.*

V tú noc sa chystala prestrelka medzi všetkými gangami v Central Parku a Dante to neplánoval nechať tak. V časoch detektíva Danteho si Hippies presadili svoje a Central Park bol prerobený do tvaru nekonečnej štvorčekovej siete, kde uprostred každého vrchola stál strom – považujeme ho za bod. Všetci členovia gangov – dokopy 2020 členov – sa rozostavili po sieti. Každý si chce vybrať jeden strom, zoťať ho a postaviť sa na jeho peň. Keďže však nikto nechce, aby mu nepriatelia – alebo hoci aj priatelia – zmizli z dohľadu, chcú sa rozostaviť tak, aby úsečka spájajúca ľubovoľných dvoch gangsterov neprechádzala žiadnym stromom ani pňom s iným gangstrom. Dante sa poškriabal na hlave a zamyslel sa: existuje vôbec také rozostavenie? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

Riešenie

Po chvíli úvah (a prípadného hrania sa so štvorčekovým papierom alebo GeoGebrou) zrejme dôjdeme k záveru, že obsadiť viac ako štyri vrcholy je pomerne náročné. Vieme, že medzi ľubovoľnými dvoma obsadenými vrcholmi nemôže byť iný vrchol, či už obsadený, alebo nie.

Každý vrchol môžeme označiť x-ovou a y-ovou celočíselnou súradnicou, ktoré nám jasne určia jeho pozíciu. Zamyslime sa teda, čo pomocou súradníc vieme zistiť. Bude nás zaujímať najmä, kedy sa ľudia budú vidieť.

Pre jednoduchosť uvažujme, čo vidí človek, ktorý obsadil strom vo vrchole $A = [0, 0]$. Na aké vrcholy dovidí? Vieme, že ak sa pozerá nejakým smerom a uvidí vrchol (obsadený alebo nie), tým istým smerom už žiaden ďalší vrchol nevidí. Súradnice ďalších vrcholov týmto istým smerom musia byť násobkom súradníc najbližšieho vrchola. Napríklad ak vidí vrchol $[4, 5]$, nebude už vidieť vrcholy $[8, 10]$, $[12, 15]$ a tak ďalej. Môžeme teda povedať, že ak vieme súradnice nejakého bodu zapísať ako $[kx, ky]$, tento vrchol neuvidíme cez vrchol $[x, y]$. To znamená, že človek vo vrchole $[0, 0]$ nebude vidieť tie vrcholy, ktorých súradnice sú súdeliteľné.

Kedy sa dvaja ľudia vidia? Vo všeobecnosti nás bude zaujímať ich vzájomná poloha, teda rozdiel ich x-ových a y-ových súradníc. Presnejšie, ak je človek A vo vrchole $[a_x, a_y]$ a človek B vo vrchole $[b_x, b_y]$, tak sa pozrieme na rozdiely $d_x = b_x - a_x$ a $d_y = b_y - a_y$. Polohu človeka B si vieme vyjadriť aj ako $[a_x + d_x, a_y + d_y]$. Čo ak by čísla d_x a d_y mali spoločného deliteľa $k > 1$, teda by platilo $d_x = kx$ a $d_y = ky$? Potom by sa medzi ľuďmi A a B nachádzal vrchol $[a_x + x, a_y + y]$, cez ktorý by na seba nevideli. Preto musia byť rozdiely d_x a d_y nesúdeliteľné.[1]

Poďme teda ukázať, že 2020 ľudí nevieme rozmiestniť tak, aby na seba všetci videli. Ukážeme, že pri akomkoľvek rozmiestnení nájdeme dvoch ľudí, ktorí na seba nevidia. To znamená, že rozdiely ich súradníc sú súdeliteľné. Najjednoduchšie by bolo nájsť také rozdiely súradníc, ktoré by boli deliteľné dvomi. Zamyslime sa, kedy nastane

[1] Môžete si premyslieť, že v prípade, že sú d_x a d_y nesúdeliteľné, tak A a B naozaj na seba vidia. Z našich úvah to ešte nevyplýva. Avšak keďže ukazujeme neexistenciu rozostavania, tento fakt nepotrebujeme.

takýto prípad. Nastane, keď majú obe x-ové súradnice rovnakú paritu, podobne aj y-ové (nie nutne tú istú ako x-ové). Každý bod má dve súradnice a každá môže byť párna alebo nepárna. To znamená, že máme štyri typy vrcholov v závislosti na ich parite. Ak obsadíme 2020 vrcholov, každý z nich vieme priradiť do niektorej z týchto štyroch skupín. Keďže bodov je viac než skupín, v aspoň jednej skupine musia byť aspoň dvaja ľudia.[2] Títo dvaja majú rozdiely súradníc párne, teda na seba nevidia – presne v strede medzi nimi sa nachádza vrchol (či už so stromom alebo s človekom). Týmto sme dokázali, že neexistuje také rozostavenie, aby na seba všetci videli.

2.7 Kupuj Muníciu Symetricky

opravovali **Miloš** a **Juro**

Zadanie. *Dante si pobavene odpľul a vyrazil z domu. Pred prestrelkou je iste potrebné si kúpiť kokosáky do bambitky. Zohol sa a prešiel cez skrytý podchod medzi dvoma avenues. „Sevas, Jerry, starý krokodíl," zavrčal, keď naňho spoza špinavých dverí vykukol nie menej špinavý chlap. „Poď ďalej a nasoľ si klobásku," uškrnul sa Jerry a vstúpil do obchodu. Dante si chce kúpiť náboje do dvoch bambitiek. Náboje skladuje vo veľkých štvorcoch, preto by bol rád, keby aj počty nábojov boli štvorcami prirodzených čísel. Dante má rád poriadok, preto by rád kúpil oboch typov krabičiek rovnaký počet. Zaujímalo by ho však, aké má možnosti.*

Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré sú obe čísla $12n - 119$ *a* $75n - 539$ *druhými mocninami celých čísel (nie nutne rovnakých).*

Riešenie

Nech teda spomínané celé čísla sú $x, y > 0$, tj

$$12n - 119 = x^2,$$

$$75n - 539 = y^2.$$

Upravme si obe rovnice, aby pri n bolo v oboch rovniciach rovnaké číslo. Teda najjednoduchšie je, aby sme obe rovnice vynásobili na číslo $\mathrm{nsn}(12, 75) = 300$. Dostávame

$$300n = 25x^2 + 25 \cdot 119,$$

$$300n = 4y^2 + 4 \cdot 539.$$

Keď odpočítame rovnice navzájom, dostaneme

$$0 = 25x^2 - 4y^2 + 25 \cdot 119 - 4 \cdot 539.$$

Upravíme na súčin štvorcov známou formulkou $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ a po vyčíslení súčinov dostaneme

$$0 = (5x + 2y)(5x - 2y) + 819.$$

[2] Toto tvrdenie má aj svoj názov. Volá sa *Dirichletov princíp* a vo všeobecnosti hovorí, že ak máme nejaké predmety podelené do skupín a predmetov je viac ako skupín, tak existuje skupina s aspoň dvomi predmetmi. Takéto úvahy a cielené rozdeľovanie predmetov do skupín vie byť užitočné pri mnohých, aj náročnejších úlohách tohto typu. Záujemcom odporúčame si prečítať viac v Zbierke KMS na str. 67.

Teda finálne dostávame

$$(2y - 5x)(5x + 2y) = 819 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13.$$

Druhá zátvorka je kladná, teda obidve musia byť kladné. Zjavne prvá zátvorka je menšia ako druhá a musí nadobúdať hodnoty nejakého deliteľa čísla 819. Dostávame tak 6 možností, každú vyriešme zvlášť. Možnosti sú rozpísané v nasledujúcej tabuľke.

2y-5x	2y+5x	4y	x
1	819	820	409/5
3	273	276	27
7	117	124	11
9	91	100	41/5
13	63	76	5
21	39	60	9/5

Na výpočet stĺpcov tabuľky sme použili vzťahy

$$2y + 5 = \frac{819}{2y - 5x}, \qquad 4y = (2y - 5x) + (2y + 5x), \qquad x = \frac{\frac{4y}{2} - (2y - 5x)}{5}.$$

Ďalšie možnosti už neexistujú, pretože ďalšie delitele čísla 819, ktoré môže nadobúdať zátvorka $(2y - 5x)$ by boli väčšie ako zátvorka $(2y+5x)$, čo nie je možné. Dostávame tak jediné tri vyhovujúce hodnoty čo môže byť x (x musí byť celé!), a to $27, 11, 5$. Ak si tieto tri hodnoty dosadíme do pôvodnej rovnice zo zadania, kde teda $n = \frac{x^2+119}{12}$, dostaneme tak $n = \frac{848}{12}, \frac{240}{12}, \frac{144}{12}$. Z týchto vychádzajú celé iba posledné dve čísla $n = \frac{240}{12} = 20$, a $n = \frac{144}{12} = 12$. Overíme si to aj na druhej rovnici, že to vychádza: $75 \cdot 20 - 539 = 961 = 31^2$, a možnosť pre $n = 12$ vychádza tiež $75 \cdot 12 - 539 = 144 = 12^2$.

Výsledok: Rovniciam vyhovujú práve dve n, a to $n = 20, n = 12$.

2.8 Kulprit Musí Sedieť

opravoval **Ákos**

Zadanie. *Dante nakúpil náboje a pristúpil k Jerrymu. „Dočuj, prisámvačku, občas sa mi marí, že máš za pultom zašmodrchaného nejakého gan-" V tú ranu spoza pultu vyskočil vysoký uhol a vyrazil na ulicu. Dante sa obrátil na podpätku a v zlomku sekundy ho dolapil. „Počuj, nie si ty ten uhol, čo vykradol Banku pána Bambulu na siedmej avenue?" Uhol sa však len krútil a volal, že chce právnika. Dante si teda posunul klobúk hlbšie do čela a pustil sa do detektívovania. Je načim dokázať, že tento uhol a tamten uhol sú jeden a ten istý uhol.*

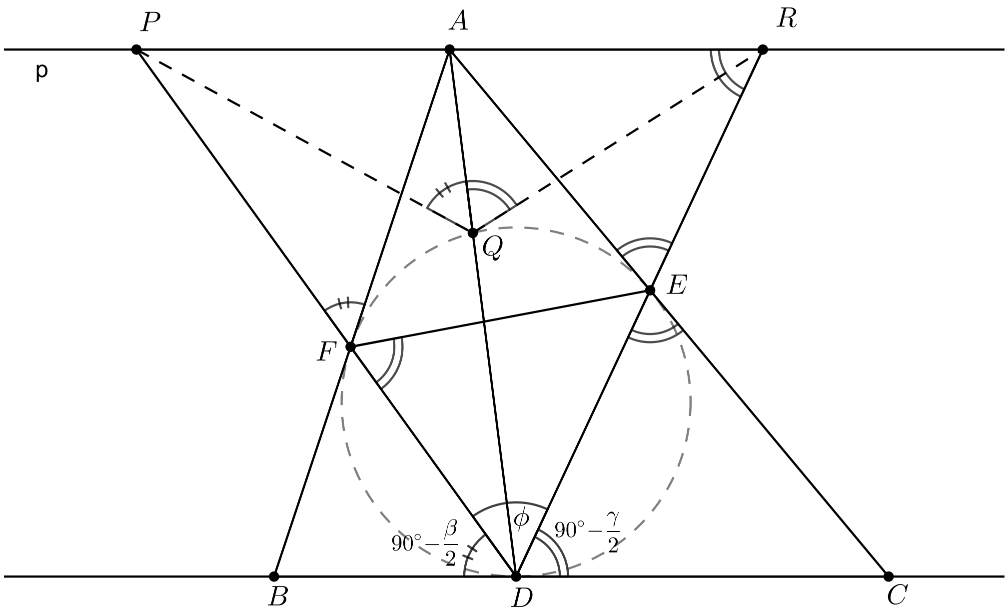
Kružnica vpísaná trojuholníku ABC sa dotýka strán BC, AC, AB postupne v bodoch D, E, F. Úsečka AD pretína kružnicu vpísanú trojuholníku ABC druhý raz v bode Q. Priamka p je rovnobežná s priamkou BC a prechádza cez bod A. Priamky DF a DE pretínajú priamku p postupne v bodoch P a R. Dokážte, že uhly PQR a FQE majú rovnakú veľkosť.

Riešenie

Nech sú uhly trojuholníka ABC α, β, γ ako obvykle. Najprv si uvedomme, že uhly v trojuholníku DEF poznáme, sú to postupne $90 - \frac{\alpha}{2}, 90 - \frac{\beta}{2}, 90 - \frac{\gamma}{2}$. Pre D sa to dá ukázať s použitím vety o obvodových a úsekových uhloch pre uhly EFA a AEF: $|\sphericalangle EFA| = |\sphericalangle EDF| = |\sphericalangle AEF|$, a z trojuholníka AEF získavame, že táto spoločná veľkosť uhlov je $90° - \frac{\alpha}{2}$. Pre zvyšné vrcholy to ide podobne.

Vidíme ďalej, že uhol $|\sphericalangle EFP| = 180° - |\sphericalangle DFE| = 180° - (90° - \gamma) = 90° + \gamma$. A tiež sa dá kvôli rovnobežnosti PR a DC odvodiť $|\sphericalangle PRE| = |\sphericalangle CDE| = 90° - \gamma$, teda súčet uhlov PRE a EFP je 180°, (alebo inak povedané, orientované uhly PRE a PFE sú rovnaké modulo 180°), teda štvoruholník $FERP$ je tetivový.

Ďalej vieme, že $|AF| = |AE|$ a ďalej vieme, že $|\sphericalangle REA| = 90° - \frac{\gamma}{2} = |\sphericalangle ARE|$, teda aj $|AE| = |AR|$, teda A je stredom kružnice opísanej $FERP$. Z toho vďaka Tálesovej vete vyplýva, že $|\sphericalangle RFP| = |\sphericalangle REP| = 90°$, teda RF a PE sú výšky v trojuholníku DRP.



Teraz sa pozrime na to, že čo vlastne chceme ukázať: $|\sphericalangle FQE| = |\sphericalangle RQP|$. Ale z tetivovosti $DEQF$ vieme, že vlastne chceme ukázať to, že ak pri D máme uhol φ, tak $|\sphericalangle RQP| = 180° - \varphi$. Teda podarilo sa nám úlohu previesť ekvivalentnými krokmi na túto známu lemu, ktorú ukážeme iba v tomto špeciálnom prípade, no dá sa takýmto spôsobom ukázať aj všeobecne, nie len s takýmito uhlami.

Lema. Ak máme daný trojuholník (tu DRP), tak ten bod (tu Q), ktorý leží na ťažnici z daného vrcholu s vnútorným uhlom φ (tu D), a tiež na kružnici určenej tým istým vrcholom a dvomi pätami výšok (tu kružnica DEF) pri tomto vrchole má vlastnosť, že nad treťou stranou má uhol $180° - \varphi$.

Dôkaz. Vieme, že $FERP$ je tetivový štvoruholník, teda vieme, že $|\sphericalangle FPA| = |\sphericalangle FED| = |\sphericalangle FQD| = 180° - |\sphericalangle AQF|$, teda $APFQ$ je tiež tetivový, z čoho si vieme získať $|\sphericalangle AQP| = |\sphericalangle AFP| = 90° - \frac{\beta}{2}$, a podobne sa dá ukázať tetivovsť $AQER$ a $|\sphericalangle RQA| = 90° - \frac{\gamma}{2}$, a tak teda

$$|\sphericalangle RQP| = |\sphericalangle AQP| + |\sphericalangle RQA| = 90° - \frac{\beta}{2} + 90° - \frac{\gamma}{2} = 90° + \frac{\alpha}{2}.$$

A nakoľko pri D sme mali uhol $90° - \frac{\alpha}{2}$, máme našu lemu dokázanú.

Teda ukázali sme, že požadované dva uhly sa naozaj rovnajú.

2.9 Križuj Mimomestské Spoje

opravoval **Marek**

Zadanie. *Dante nemal čas vypĺňať súdne dokumenty, lebo ho čakala nočná nasáľačka. Revolver mal pripravený na najhoršie a jeho kokosáky ho ťažili v kapsách. Ako kráčal ulicou, zniesol sa pred neho muž s mechanickými krídlami a vyhŕkol: „Dante! Štváč Ernest sa dozvedel, že sa ho dnes v noci chystáme čapnúť! Zobral melanž a zdrhol lietadlom!" „Tak to teda nie," zavrčal Dante. „Kúp si lístky, Watson, lebo nasadáme... do biznis triedy."*

Štváč Ernest uteká pred 62 policajtmi, ktorí ho prenasledujú po leteckej sieti USA. V USA je 2020 letísk, pričom medzi niektorými dvojicami letísk sú obojsmerné letecké spojenia. Každé spojenie spája práve dve letiská a medzi každými dvoma letiskami sa dá prepraviť využitím najviac dvoch leteckých spojov.

Počas prvého dňa sa 62 policajtov ľubovoľne rozmiestni po letiskách v USA, kľudne aj viacerí na to isté letisko. Potom cez prvú noc na niektoré letisko pricestuje Štváč Ernest, podľa svojej voľby. Po celý čas (teda už aj v prvú noc) majú Ernest aj prenasledovatelia informácie o polohách všetkých zúčastnených. Každý deň sa môže (ale aj nemusí) každý prenasledovateľ presunúť pomocou jedného leteckého spojenia z jeho letiska do nejakého iného letiska. Každú noc sa môže (ale nemusí) Štváč Ernest presunúť na iné letisko pomocou jedného leteckého spojenia. Ak sa nejaký policajt nachádza na letisku naraz so Štváčom Ernestom (je jedno či cez deň alebo v noci), Štváč Ernest je okamžite zatknutý. Dokážu policajti zatknúť Štváča Ernesta bez ohľadu na jeho stratégiu cestovania a bez ohľadu na to, ako vyzerajú letecké spojenia medzi letiskami v USA?

Riešenie

Ernest sa nechce vo svojom ťahu skončiť na letisku, ktoré je susedné s policajtom. Ak áno, tak cez deň sa ten policajt presunie na letisko kde je Ernest a zatkne ho. Takže otázka je, či sa vie Ernest pohybovať tak, že vždy bude aspoň na dva lety od každého policajta.

Ďalšie pozorovanie je, že keď je Ernest na letisku E s najviac (vrátane) 62 susednými letiskami, tak sa policajti vedia cez deň presunúť tak, že každý je v jednom z týchto susedov alebo jeho okolí – pretože z ľubovoľného letiska sa vedia dostať do suseda E najviac s dvoma letmi. To znamená, že buď by sa Ernest dostal vo svojom ťahu do letiska, v ktorom je policajt alebo do letiska, vedľa ktorého je policajt. Takže Ernest môže len sedieť a čakať kým ho druhý deň nezatknú alebo ho neobkolesia.

Ak máme letisko s aspoň 63 vrcholmi, tak do neho postavíme policajta a nech sa nehýbe. Teda pohnúť sa môže, ak by mal na susednom letisku Ernesta. Takto efektívne pokryjeme 64 letísk. Prestaneme ich uvažovať ako možnosti kam Ernest môže cestovať, zostane nám teda $2020 - 64 = 1956$ letísk kam Ernest môže cestovať a 61 policajtov na pokrytie. Teraz ak Ernest je na letisku s najviac 61 susedmi (v novej letiskovej sieti), tak ho policajti vedia podobne dolapiť na najviac dva ťahy, takže sa musí nachádzať na letisku, ktoré má aspoň 62 susedov. Ale tak na to letisko posadíme policajta, a preto Ernestovi odoberieme ďalších 63 možností kam cestovať. Takto budeme pokračovať.

Postupne ak sme už rozostavili k policajtov do letísk s aspoň $63 - i$ linkami (i od 0 po $k - 1$), tak ak je Ernest na letisku s najviac $63 - k - 1$ susedmi, tak ho vieme na tri ťahy chytiť (podobný argument ako hore) alebo je to letisko s aspoň $63 - k$ linkami a tam umiestnime policajta.

Dostaneme súčet $64 + 63 + 62 + \cdots + 3 = 2077$ letísk, na ktoré Ernest nemôže cestovať. Čo je viac ako 2020, a preto vieme Ernesta zatknúť.

2.10 Konečný Masaker Sezóny

opravoval **Pedro**

Zadanie. *Dante sa už-už chcel pustiť za Štváčom Ernestom, ale vtom mu opäť zazvonil telefón. „Šéfinšpektor Kulinoha!“ zasalutoval reflexívne Dante, keď sa ozval familiárny hlas. „Nechajte Štváča Ernesta môjmu okrsku a sústreďte sa na dnešnú prestrelku gangov,“ nariadil Kulinoha. „Rozkaz,“ uškrnul sa Dante a zložil. Dnes bude tá noc, na ktorú celý život čakal. Keď sa zotmelo, zobral svoje bambitky a prišiel do Central Parku. S nabitými pištoliskami sa opatrne zakrádal tmou, keď zrazu o niečo zakopol. Pozrel na čudesný objekt na zemi a prekvapením mu padla sánka. Bola to trojposchodová torta s marcipánovými sviečkami a priloženou kartičkou. Na kartičke stálo: „Detektívovi Dantemu. Ospravedlňujeme sa, že meškáme, ale všetci sme dostali mykózu na nohách a musíme zostať doma liečiť sa. Ako kompenzáciu vám prikladáme aspoň malú hádanku. Podpísané: Gangy New Yorku.“ A na druhej strane kartičky svietila hádanka:*

Nájdite všetky funkcie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla a, b platí

$$f(a)+f(a+f(b))=b+f(f(a)+f(f(b))).$$

Riešenie

Funkcionálne rovnice sú zaujímavé tým, že majú relatívne podobnú štruktúru riešenia. Najprv musíme spraviť pár jednoduchých dosadení. Zo zjednodušených vzťahov získaných po dosadeniach sa snažíme zistiť nejaké užitočné vlastnosti funkcie, pekné rovnosti, poprípade si tipnúť riešenie. Potom, keď už máme celkom dosť informácií, prichádza časť, kedy sa snažíme úlohu doraziť už väčšinou nejakým originálnym, pre úlohu špecifickým spôsobom (hoci aj v koncovkách zvyknú byť isté štrukturálne podobnosti).

Podobne tomu bude aj pri tejto konkrétnej funkcionálnej rovnici. Skúsme najprv dosadiť dvojicu $(0,x)$:

$$f(0)+f(f(x))=x+f(f(0)+f(f(x))). \tag{2}$$

Vidiac takéto niečo, skúsený riešiteľ funkcionálnych rovníc sa poteší. Prečo? V tejto rovnici sa vyskytuje práve jedno x osamote „vonku“, kým všetky ostatné x sú skryté „vnútri“ funkcie f. Takýto jav signalizuje *prostosť* funkcie f. Prečo?

Uvažujme $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq b$ a predpokladajme $f(a)=f(b)$. Potom ale ľavá strana rovnice (2) nemení hodnotu pre a a b, avšak pravá áno. To preto, lebo jediný výraz, ktorý mení hodnotu je osamotené a alebo b (ostatné výrazy nezmenia hodnotu vďaka rovnosti $f(a)=f(b)$). To je spor s tým, že rovnosť $f(a)=f(b)$ môže za predpokladu $a\neq b$ nastať. Preto $f(a)=f(b)\implies a=b$, čo je definičná vlastnosť prostosti.

Načo nám je prostosť dobrá? Nie je prostosť sprostosť? Nie, nie je. Prostosť má vo funkcionálnych rovniciach mnoho využití, pričom jedno z hlavných je, že môžeme „škrtať f“. Skutočne, ak sa nám podarí dostať k výrazu tvaru $f(\dots)=f(\dots)$, vďaka prostosti môžeme škrtnúť funkcie a dostaneme rovnosť výrazov vnútri funkcií.

Poďme si vymyslieť dosadenie, kde by sme presne toto mohli využiť. Všimnime si, že ak dosadíme dvojicu $(x,f(x))$, tak sa nám škrtnú $f(x)$ na ľavej aj pravej strane a dostaneme rovnosť v žiadanom tvare:

$$f(x+f(f(x)))=f(f(x)+f(f(f(x))))\implies x+f(f(x))=f(x)+f(f(f(x))). \tag{3}$$

Až doteraz bol každý krok plne motivovaný predošlým. Samozrejme, niekedy pri funkcionálnych rovniciach treba trochu skúšať. Ak si teraz vyskúšame pár pokračovaní, môžeme dospieť k názoru, že je čas posunúť sa do zatiaľ nespomenutej „casework“ fázy.

Predpokladajme najprv, že $f(0) = 0$. Tento predpoklad funkcionálne rovnice často silno zjednoduší, pretože ak jedna premenná je 0, tak týmto sa zbavíme „zbytočných“ $f(0)$ vo výrazoch. Pozrime sa, ako sa nám upraví (2) po vymazaní $f(0)$:

$$f(f(x)) = x + f(f(f(x))).$$

Po pričítaní x na obe strany rovnice dostaneme:

$$f(f(x)) + x = 2x + f(f(f(x))).$$

A s využitím (3) po jemných úpravách dostávame:

$$f(x) = 2x.$$

Avšak ak toto dosadíme do pôvodnej rovnice a overíme rovnosť, zistíme, že takáto funkcia zadaniu nevyhovuje. Preto $f(0) \neq 0$. To už je celkom dobrý signál začať veriť, že riešenie rovnice neexistuje, pretože ak existuje, tak veľmi často býva $f(0) = 0$ a navyše si môžeme skúsiť dosadiť iné klasické funkcie a žiadna nebude fungovať.

Predpokladajme teda, že $f(0) \neq 0$. Ešte predtým, než sa masívne začneme hrať s $f(0)$, pohrajme sa ešte trochu s (3). Uvažujme novú notáciu: $f(f(\ldots(x)\ldots)) \equiv f^n(x)$, teda napríklad $f(f(x)) = f^2(x)$ a dosaďme $f(x)$ za x. Dostaneme: $f(x) + f^3(x) = f^2(x) + f^4(x)$. Ak si teraz z (3) vyjadríme $f^3(x)$ a dosadíme do predošlej rovnice, dostaneme $f^4(x) = x$. To je zaujímavé tvrdenie a okrem iného nám to hovorí, že ak iterujeme zobrazenie (funkciu) f začínajúc hodnotou x, tak sa budeme cykliť s cyklom dĺžky 4 alebo 2 alebo 1. Okrem toho si môžeme všimnúť, že ak máme a a $b = f^2(a)$, potom $f^2(b) = f^4(a)$, teda $a = f^2(b)$.

Dosaďme teraz do pôvodnej rovnice zo zadania dvojicu $(0, f^2(0))$. Dostaneme:

$$f(0) + f^4(0) = f^2(0) + f(f(0) + f^4(0)) \implies f(0) = 2f^2(0).$$

Označme $f(0) = c$. Potom cyklus pre nulu bude nasledovný: $0 \to c \to c/2 \to -c/2 \to 0$, kde tretia iterácia vyplýva z (3) dosadením nuly a manuálnym výpočtom hodnoty $f^3(0)$.

Skúsme teraz dosadenie $(c, 0)$ do pôvodnej rovnice:

$$c/2 + f(2c) = f(c/2 + c/2) = c/2 \implies f(2c) = 0.$$

Nakoľko ale $f(-c/2) = 0$, tak dostávame: $0 = f(2c) = f(-c/2) \implies 2c = -c/2 \implies c = 0$. To je spor s predpokladom, že $c \neq 0$. Tým by sme boli hotoví. Vidíte, nebolo to až také ťažké. ;)