Korešpondenčný matematický seminár
XLII. ročník, 2020/2021
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Riešenia 3. kola zimnej časti

3.1 Koniec Matfyzného Štúdia ($\kappa \le 1$)

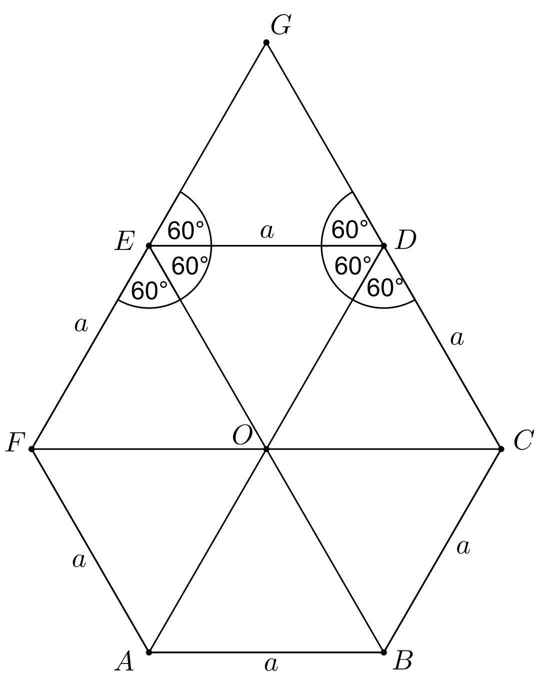
opravovali **Tomáš S.** a **Matúš**

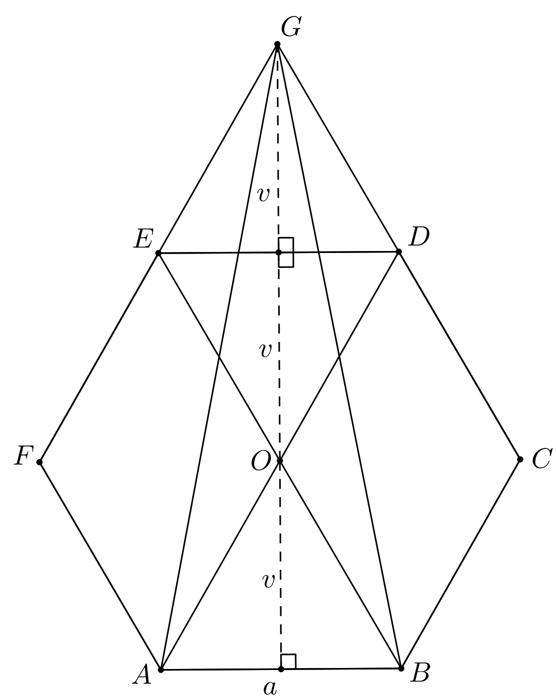
Zadanie. *Po tom ako Kubko krvopotne dokončil štúdium na MatFyze, rozhodol sa vybrať sa na dovolenku do Japonska. A veru, že sa aj vybral. Cestovnou kanceláriou, ktorá mala takéto pekné logo. Jeden by povedal, že by sa z neho dala spraviť aj pekná úloha...*

Je daný pravidelný[1] *šesťuholník ABCDEF s obsahom* $1\,\mathrm{cm}^2$. *Priamky CD a EF sa pretnú v bode G. Nájdite obsah trojuholníkov ABG a BCG.*

Riešenie

Všetky strany šesťuholníka majú rovnakú dĺžku a. Rozdeľme si šesťuholník na 6 zhodných rovnostranných trojuholníkov, ktoré majú spoločný vrchol O v strede šesťuholníka, tak ako na obrázku vľavo. (Rozmyslite si ako dokázať, že tieto trojuholníky sú rovnostranné, len pomocou definície, že šesťuholník má rovnaké strany aj uhly. Tu to budeme považovať za známy a ľahko nahliadnuteľný fakt.) Trojuholník GED má uhly GED aj GDE veľkosti $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, takže je tiež rovnostranný, so stranou dĺžky $|ED| = a$.





Na obrázku vpravo máme tri rovnostranné trojuholníky ABO, EDO a EDG, ktoré majú rovnobežné základne AB a ED. Výšky týchto trojuholníkov budú ležať na jednej priamke, konkrétne na priamke OG. Platí to, lebo výšky v

[1] všetky strany sú rovnaké a všetky uhly sú rovnaké

trojuholníkoch EDO a EDG majú spoločný bod v strede strany ED, keďže ide o rovnostranné trojuholníky a všetky tri výšky sú rovnobežné, lebo sú kolmé na rovnobežné základne. Všetky tri výšky majú rovnakú dĺžku v, keďže ide o zhodné trojuholníky.

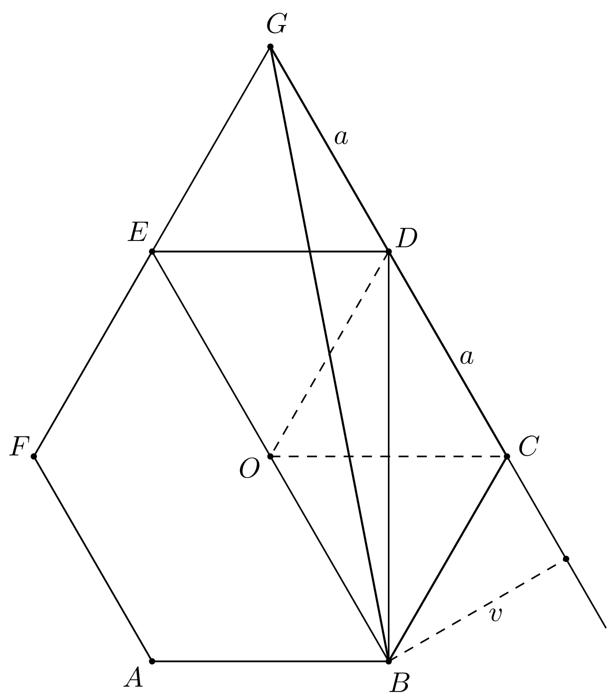
Vidíme, že trojuholník ABG má základňu a a výšku $3v$. Obsah trojuholníka ABO je šestina obsahu celého šesťuholníka, $S = \frac{1}{6}$ a zároveň $S = \frac{1}{2}av$. Teraz by sme mohli vypočítať pomocou Pytagorovej vety, že v rovnostrannom trojuholníku platí

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \qquad S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2,$$

a dorátať presnú dĺžku a a v, ale my to spravíme šikovnejšie.

Keďže trojuholník ABG má rovnakú základňu a 3-krát väčšiu výšku ako ABO, tak musí mať 3-krát väčší obsah.

$$S_{ABG} = \frac{a(3v)}{2} = 3\frac{av}{2} = 3S = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$



Ostáva nám trojuholník GCB, ktorý má základňu $|GC| = |GD| + |DC| = 2a$. Potrebujeme ešte výšku na túto základňu. Stačí si uvedomiť, že úsečka OB je rovnobežná s GC, lebo $|\sphericalangle OBC| + |\sphericalangle BCD| = 60° + 120° = 180°$, takže sú rovnobežné. Preto vzdialenosť bodu B od priamky GC je rovnaká ako vzdialenosť bodu O od priamky GC. Táto vzdialenosť je výška v trojuholníku CDO, čo je v. Výška trojuholníka BCG je teda tiež v. Trojuholník GCB má 2-krát väčšiu základňu a rovnakú výšku ako trojuholník CDO, takže má 2-krát väčší obsah, konkrétne $2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Poznámka. Chceli by sme ešte objasniť bodovanie, pretože pomerne veľa riešiteľom sme museli strhnúť body za nedostatočné zdôvodnenie faktov a pozorovaní, ktoré sa využívali v tejto úlohe. Vyžadovali sme poriadny matematický dôkaz vašich tvrdení, pretože len na základe pozorovania z obrázku si nemôžeme byť na 100% istý, že to tak skutočne je. Bodovanie teda bolo: 1b – pozorovanie, že trojuholník EDG je rovnostranný s dĺžkou strany

a, 1b – dôkaz tohto tvrdenia, 1b – výška trojuholníka ABG je $3v$, 2b – dôkaz, 1b – správna hodnota obsahu ABG, ďalej ste viacerí postupovali tak, že BCG a AFG sú zhodné trojuholníky, takže 1b – uvedomenie si zhodnosti trojuholníkov BCG a AFG, 1b – dôkaz, že sú zhodné, 1b – hodnota obsahu BCG.

3.2 Kocky Mihom Skladáme ($\kappa \leq 2$)

opravovali **Mišo S.** a **Juro R.**

Zadanie. *Počas letu do Tokia si Kubko našiel kamaráta menom Rjoiči. Cesta ale bola dlhá, a preto, keď leteli nad Kazachstanom, navrhol Rjoiči, aby si zahrali hru kocky a vytiahol* 2020 *kociek (nie nutne rôznych veľkostí), z ktorých každá bola zlepená z nejakého počtu (možno aj jednej) malých kocôčiek s dĺžkou hrany* 1 cm*. Kubko skôr, ako sa s nimi začali hrať, zistil, že ich dokáže poukladať tak, že z nich poskladá jednu veľkú kocku, ktorej hrana má dĺžku* n cm*. Nájdite najmenšiu možnú hodnotu n, pre ktorú táto situácia mohla nastať.*

Riešenie

Veľká kocka má hranu dĺžky n cm, preto sa skladá z n^3 malých kocôčok s dĺžkou hrany 1 cm, pričom počet malých kocôčok je vždy zhodný s objemom kocky. Každá Kubkova kocka pozostáva aspoň z jednej takej malej kocôčky. Ak by veľká kocka mala hranu 12 alebo menej centimetrov, pozostávala by najviac z $12^3 = 1728$ jednotkových kocôčok (ak by bola hrana menšia, bolo by aj jednotkových kocôčok menej). Vidíme teda, že $n = 12$ ani menšie nestačí, Kubko by do veľkej kocky nedokázal zmestiť ani 2020 najmenších možných kociek.

Avšak 13^3 už je $2197 > 2020$, takže to už vyzerá nádejne. Toto ale samo o sebe nestačí, musíme ešte nájsť vhodné veľkosti kociek, ktoré mohol Kubko mať. Inak si nemôžeme byť istí, či naozaj taká možnosť vôbec existuje.

Väčšina Kubkových kociek bude mať určite hranu (aj objem) rovný 1 cm^3, pre 2020 takých kociek nám chýba len $2197 - 2020 = 177\,\text{cm}^3$ do plného objemu. Teraz by sme chceli niektoré z nich nahradiť väčšími tak, aby sme dostali objem $2197\,\text{cm}^3$. Ak nahradíme kocku s hranou 1 cm kockou s hranou a cm, zväčší sa objem z 1 cm^3 na a^3 cm^3, teda o $a^3 - 1$ cm^3, pričom počet kociek bude stále 2020. Pre malé hodnoty $a \in \{2, 3, 4, 5, \dots\}$ vieme objem zvyšovať o 7, 26, 63, 124, … cm^3. Z týchto čísel potrebujeme vyskladať zvýšenie objemu o 177 cm^3.

To sa dá napríklad tak, že vezmeme šesťkrát 26 a trikrát 7, čo zodpovedá tomu, že použijeme šesť kociek s hranou 3 cm, tri kocky s hranou 2 cm a ostatných 2011 kociek bude mať hranu 1 cm. Môžeme si overiť, že celkový objem sedí: $6 \cdot 3^3 + 3 \cdot 2^3 + 2011 \cdot 1 = 2197$.

Ešte potrebujeme ukázať, že z týchto kociek vieme zložiť veľkú kocku s hranou dĺžky 13 cm. Aj toto treba overiť, napríklad keby sme mali dve kocky s hranou 7 cm (a nejaké ďalšie menšie), tie dve väčšie do veľkej kocky uložiť nevieme. Rozmyslite si, že nech umiestnime kocku s hranou 7 cm ľubovoľne, vždy zaberie priestor jednotkovej kocky v strede veľkej kocky, a teda tam nemôžu byť dve naraz.

V našom prípade to však ide jednoducho. 6 kociek s hranou 3 cm uložíme do obdĺžnika 2×3 do podstavy kocky, ten sa vojde, má rozmery 6×9 cm. Tri kocky s hranou 2 cm položíme ľubovoľným spôsobom na niektoré tri z umiestnených kociek (čím sa dostaneme do výšky 5 cm) a zvyšok kocky vyplníme malými kockami s hranou 1 cm. Všetko sa vošlo.

Ukázali sme, že najmenšia možná hodnota n je 13.

3.3 Kruhový Magický Symbol ($\kappa \leq 3$)

opravovali **Jožo** a **Erik**

Zadanie.

Keď Kubko pristál v Tokiu, bol ohúrený. Všade okolo videl pokémonov, a to dokonca aj takých, o ktorých ani samotný Jožo nepočul. Nedávny rozmach pokémonov dospel až do štádia, keď pre každé kladné celé číslo existoval práve jeden pokémon. Dokonca, sa medzi pokémonmi rozmohol špeciálny druh evolúcie, v ktorom sa z dvoch pokémonov stane jeden nový. V starom chráme našiel Kubko o tejto evolúcii nasledovné zápisky:

1. $a \otimes a = a + 2$,
2. $a \otimes b = b \otimes a$,
3. $\dfrac{a \otimes (a+b)}{a \otimes b} = \dfrac{a+b}{b}$.

Rozlúštil, že $a \otimes b$ značí číslo pokémona, ktorého dostaneme spojením pokémonov s číslami a, b. V zápiskoch sa teda píše:

1. *Keď spojíme dvoch pokémonov s rovnakým číslom, výsledkom je pokémon s číslom o 2 väčším.*
2. *Pri spájaní dvoch pokémonov nezáleží na poradí, v ktorom ich spájame.*
3. *Pre ľubovoľné kladné celé čísla a, b platí: Ak zoberieme číslo pokémona vzniknutého spojením pokémonov s číslami a, a + b a vydelíme ho číslom pokémona vzniknutého spokením pokémonov a, b, dostaneme rovnaké (racionálne) číslo ako $(a+b)/b$.*

Pokémona s akým číslom dostaneme, ak spojíme pokémonov Wartortle (číslo 8) a Charmeleon (číslo 5)?

Riešenie

Nachádzame sa v situácii, kedy máme nejakých dvoch pokémonov a pravidlá, ktoré platia pre ich spájanie. Musíme sa nejak posunúť ďalej, a keďže máme len tieto pravidlá, ktoré vieme aplikovať na ľubovoľných pokémonov (prirodzené čísla), tak ich vyskúšame na tých našich.[2] Prvé nám nepomôže, nemáme 2 rovnakých pokémonov. Druhé nám tiež nepomôže, keď sa chceme niekam posunúť, tak nám ostáva použiť tretie, t. j.

$$\frac{a \otimes (a+b)}{a \otimes b} = \frac{a+b}{b}.$$

Naši pokémoni majú čísla 8 a 5. Kebyže si dosadíme $a = 8$, $b = 5$, tak v čitateli nám vyjde $8 \otimes (8+5)$, teda táto hodnota je závislá od spojenia pokémonov 8 a 13, a takto by sme pokračovali do nekonečna (keďže sa nám budú čísla pokémonov, ktorých hodnotu chceme zistiť, stále zvyšovať). Zvolíme teda inú taktiku a posnažíme sa dostať v čitateli $8 \otimes 5$, resp. $5 \otimes 8$, keďže nezáleží na poradí. Dosadíme si $a = 5$, $b = 3$ a skutočne nám vyjde nasledovný tvar

$$\frac{5 \otimes (5+3)}{5 \otimes 3} = \frac{5 \otimes 8}{5 \otimes 3} = \frac{5+3}{3}.$$

Výborne! Z tohoto si vieme vyjadriť hodnotu $5 \otimes 8$, ibaže tá je závislá od hodnoty $5 \otimes 3$:

$$5 \otimes 8 = (5 \otimes 3) \cdot \frac{5+3}{3}.$$

[2] Takýto prístup je dobré využiť aj pri iných úlohách, kde máme v zadaní podmienku, ktorá má platiť pre všetky čísla (či už prirodzené, reálne alebo nejaké iné). Príp. aj v situácii, keď takú podmienku objavíme počas riešenia. Keď niečo platí pre všetky čísla, bude to platiť aj vtedy, keď si dosadíme konkrétne hodnoty. S takýmito úvahami sa môžete stretnúť napr. pri funkcionálnych rovniciach, kde dosádzanie konkrétnych hodnôt do podmienky je často prvým krokom ako si môžete pozrieť napr. v úlohe Kvalitnejší Mirov Seminár.

Tak pre pokémonov 5 a 3 spravíme rovnaký postup ako pri 5 a 8 a takto budeme pokračovať dovtedy, kým nebudeme vedieť použiť nejaké iné pravidlo, ktoré nám bude vedieť povedať priamo hodnotu evolúcie,

$$\frac{3 \otimes (3+2)}{3 \otimes 2} = \frac{3 \otimes 5}{3 \otimes 2} = \frac{3+2}{2}.$$

Tieto kroky spravíme aj pre $3 \otimes 2$:

$$\frac{2 \otimes (2+1)}{2 \otimes 1} = \frac{2 \otimes 3}{2 \otimes 1} = \frac{2+1}{1}.$$

Následne dostaneme $2 \otimes 1$ a takúto situáciu:

$$\frac{1 \otimes (1+1)}{1 \otimes 1} = \frac{1 \otimes 2}{1 \otimes 1} = \frac{1+1}{1}.$$

Čo je výhra, lebo na $1 \otimes 1$ už vieme využiť prvé pravidlo evolúcie, $a \otimes a = a + 2$, teda $1 \otimes 1 = 1 + 2 = 3$ a môžeme veselo dosádzať. Hodnotu 3 si dosadíme za $1 \otimes 1$, z výsledku dostaneme hodnotu $1 \otimes 2$ ktorú zas dosadíme do predošlého kroku a takto sa dostaneme až k výsledku.

$$\frac{1 \otimes 2}{3} = \frac{2}{1}, \text{ teda } 1 \otimes 2 = \frac{2 \cdot 3}{1} = 6.$$

Toto bude samozrejme platiť aj pre $2 \otimes 1$, keďže nezáleží na poradí spájania. Pokračujeme ďalej s touto hodnotou,

$$\begin{aligned}
\frac{2 \otimes 3}{2 \otimes 1} &= \frac{2 \otimes 3}{6} = \frac{2+1}{1} = 3, && \text{teda } 2 \otimes 3 = 6 \cdot 3 = 18,\\
\frac{3 \otimes 5}{3 \otimes 2} &= \frac{3 \otimes 5}{18} = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}, && \text{teda } 3 \otimes 5 = 18 \cdot \frac{5}{2} = 45,\\
\frac{5 \otimes 8}{5 \otimes 3} &= \frac{5 \otimes 8}{45} = \frac{5+3}{3} = \frac{8}{3}, && \text{teda } 5 \otimes 8 = 45 \cdot \frac{8}{3} = 120.
\end{aligned}$$

Dostali sme sa k tomu, čo sme chceli, že spojením pokémonov s číslami 5 a 8 dostaneme pokémona s číslom 120, teda pokémona s menom Staryu[3].

3.4 Kvitne Mi Sakura ($\kappa \leq 5$) opravovali **Ákos** a **Miloš**

Zadanie. *V druhý deň svojho pobytu sa Kubko vybral do Osaky navštíviť ten povestný hrad, ktorý zohrával dôležitú rolu pri zjednotení Japonska v šestnástom storočí. Hneď na prvý pohľad ho upútali prekrásne sakurové záhrady črtajúce sa pod hradbami mohutného hradu, ako aj rovnostranné vlajky klanu Tojotomi. Práve tieto vlajky nás inšpirovali k ďalšej úlohe. Veríme, že sa vám bude páčiť.*

Je daný rovnostranný trojuholník ABC. Na strane AB leží bod D, rôzny od bodov A, B. Na polpriamke opačnej k polpriamke AC leží bod E tak, že $|BD| = |AE|$. Dokážte, že $|DE| = |DC|$.

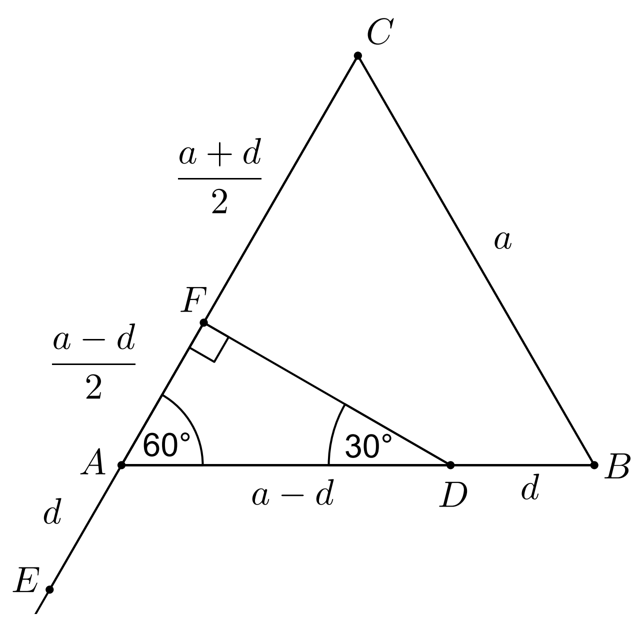
[3] https://bulbapedia.bulbagarden.net/wiki/Staryu_(Pok%C3%A9mon)

Riešenie

Ako prvé je dobré uvedomiť si, čo znamená tvrdenie, ktoré máme dokázať. Rovnosť $|DE| = |DC|$ znamená, že bod D je rovnako vzdialený od bodov E, C. Množina takýchto bodov je práve os úsečky EC. Je to známy fakt, ale idea jeho dôkazu nám ďalej pomôže v riešení: Ak päta kolmice z bodu D na priamku EC je bod F, tak z Pytagorových viet pre trojuholníky CFD a EFD dostávame $|CF|^2 + |FD|^2 = |CD|^2 = |ED|^2 = |EF|^2 + |FD|^2 \Leftrightarrow |CF|^2 = |EF|^2$. Teda daný bod D je rovnako vzdialený od bodov E, C práve vtedy, keď leží na kolmici na priamku EC prechádzajúcej stredom úsečky EC.

Teda našou úlohou je ukázať, že D leží na osi úsečky EC. Ako sme uviedli pred chvíľou, pre dôkaz tohto nám stačí ukázať, že $|EF| = |CF|$, kde F je päta kolmice z D na EC. Tak poďme si toto ukázať.

Nech dĺžka strany rovnostranného trojuholníka je a a $|BD| = d$. Potom si môžeme ľahko vypočítať $|EC| = a + d$, $|AD| = a - d$. Teraz to, čo potrebujeme ukázať, je vlastne $|CF| = (a + d)/2$.



Poďme sa teraz pozrieť na trojuholník AFD. Je to pravouhlý trojuholník s pravým uhlom pri vrchole F a uhlom veľkosti 60° pri vrchole A. Má teda uhly 30°, 60°, 90°, a to znamená, že dĺžka prepony AD a odvesny AF sú v pomere 2 : 1. Krátky dôkaz tohto tvrdenia je, že ak premietneme trojuholník AFD cez priamku DF, tak dostaneme rovnostranný trojuholník DAA_1, teda $2|AF| = |AA_1| = |AD|$ alebo pre pokročilejších riešiteľov vychádza to z faktu $\sin(30°) = \frac{1}{2}$. Teda kvôli rovnosti $|AD| = a - d$ platí $|AF| = (a - d)/2$. Teda nám vychádza

$$|AC| = |AF| + |FC| \Leftrightarrow |CF| = a - \frac{a-d}{2} = \frac{a+d}{2}.$$

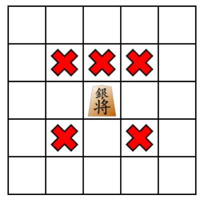
A práve toto sme si chceli ukázať, pretože, ako sme ukázali vyššie, je to ekvivalentné so zadaním úlohy. Tým sme dôkaz dokončili.

3.5 Kultový Miestny Šach ($\kappa \leq 8$)

opravovali **Milan** a **Veronika P.**

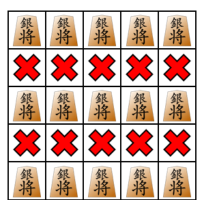
Zadanie. *Počas prehliadky hradu zvnútra sa Kubko trochu nechal strhnúť krásou fresiek na stenách a pútavými slovami sprievodkyne. Najviac ho však zaujalo, keď sprievodkyňa začala rozprávať o japonskom šachu, ktorý hrávali japonskí Šogúni a Daimjóvia.*

V japonskej verzii šachu existuje figúrka strieborného generála, ktorá vie byť otočená jedným zo štyroch základných smerov. Strieborný generál ohrozuje políčka, ktoré s ním susedia diagonálne a jedno políčko pred sebou (podľa toho, ktorým smerom je otočený). Koľko najviac figúrok Strieborných generálov je možné umiestniť na šachovnicu 8×8 *tak, aby žiadna figúrka strieborného generála neohrozovala inú figúrku?*



Riešenie

Dobrým začiatkom pri riešení takýchto úloh je skúsiť koľko najviac figúrok vieme na hraciu plochu dostať. V tomto prípade to ide pomerne ľahko – vyberieme si nejaký riadok (alebo stĺpec) a keď otočíme všetkých generálov tak, aby sa pozerali na políčka mimo daného riadku, môžeme ho zaplniť celý. Oba riadky susediace s tým, ktorý sme práve zaplnili, sú ohrozené, ale ostatné riadky môžeme ďalej zapĺňať. Takouto taktikou vieme zaplniť generálmi každý druhý riadok, a žiadni z nich sa nebudú ohrozovať. Príklad ako to môže vyzerať je na obrázku nižšie.



Umiestnili sme 32 generálov, čo je celkom dosť. Teraz potrebujeme dokázať, že viac ich tam umiestniť nejde (ak by sa nám to nepodarilo, naznačovalo by to, že ich tam ide umiestniť viac a mali by sme sa viac snažiť). Aby sme to dokázali, úlohu si najprv zjednodušíme. Šachovnicu 8×8 si zmenšíme na šachovničku 2×2 a zamyslíme sa, koľko najviac generálov sa zmestí na ňu. Či už krátkou úvahou, alebo vyskúšaním všetkých možností zistíme, že na šachovničke 2×2 je možné umiestniť najviac dvoch generálov tak, aby sa neohrozovali.

Teraz sa vrátime k veľkej šachovnici 8×8. Môžeme si všimnúť, že sa skladá z 16 menších šachovničiek 2×2 (štvorcov so stranou dĺžky 2). Vieme, že v každom z nich môžu byť najviac dvaja generáli, čo znamená, že na celej veľkej šachovnici môže byť najviac $2 \cdot 16 = 32$ generálov. Toľko sa nám tam aj podarilo umiestniť, čiže je to naozaj najväčší možný počet.

3.6 Konsky Mätúca Stránka

opravovali **Števka** a **Kubo**

Zadanie. *Na hoteli Kubka ako nového učiteľa čakala prvá prednáška tohto školského roku. Dištančné vzdelávanie je však sviňa. Keď sa Kubko snažil nakresliť zadanie geometrickej úlohy na jednej internetovej stránke, ktorá po-*

skytuje zdieľanú tabuľu, zistil, že to nie je žiadna sranda. Kružnice sa tam kreslia vážne blbo. A ešte k tomu vpísať trojuholníku kružnicu? No nazdar!

Aplikácia dovoľuje robiť nasledovné kroky:

1. *Vyznačiť bod v rovine, na priamke, na kružnici, na priesečníku dvoch útvarov alebo dotykový bod.*
2. *Vyznačiť dva body a narysovať nimi priamku.*
3. *Vyznačiť dva body K, L a jednu z dvoch polrovín určenej priamkou KL a narysovať kružnicu, ktorá je vpísaná do štvorca so stranou KL, ktorý sa nachádza vo vyznačenej polrovine. (V tomto kroku sa narysuje len kružnica, štvorec ani stred kružnice sa nenarysuje.)*

Vie pomocou uvedených krokov vpísať Kubko do trojuholníka ABC kružnicu, a to bez ohľadu na voľby bodov A, B, C?

Riešenie

Tretia operácia v zadaní je nezvyčajná, tak ju nazvime „kružnica nad úsečkou", aby sme ju nemuseli vždy celú opisovať. Ak by sme mali obyčajnú konštrukciu kružnice pomocou stredu A a polomeru $|AB|$, tak by sme úlohu vedeli riešiť bežnou konštrukciou stredu opísanej kružnice. Jeden príklad takej konštrukcie si ukážeme na konci. Chceli by sme teda získať možnosť narysovať kružnicu pomocou stredu A a iného bodu B. Na získanie takejto možnosti použijeme niekoľko pomocných krokov:

1. **Zostrojenie stredu úsečky:** Vezmime si úsečku KL. Keď do štvorca vpíšeme kružnicu, tak táto kružnica sa ho dotýka v stredoch strán. Použitím „kružnice nad úsečkou" teda vieme zostrojiť kružnicu, ktorá sa dotýka úsečky KL v jej strede. Vyznačením dotykového bodu kružnice a úsečky KL zostrojíme stred úsečky KL.

2. **Narysovanie osi úsečky:** Os úsečky sa nám hodí, pretože nám umožňuje istým spôsobom otočiť úsečku o $90°$, a teda vyrábať pravé uhly, ktoré sa hodia napríklad pri konštrukcií štvorca či kolmíc.

   Keď už máme stred úsečky, skúsme zostrojiť aj jej os. Narysujme v rovnakej polrovine nad oboma polovicami úsečky kružnice (zatiaľ aj tak veľmi nevieme skonštruovať niečo iné). Tie sa budú dotýkať, keďže štvorce, do ktorých sú vpísané, majú spoločnú stranu. Dostali sme tak nový bod a môžeme ním viesť priamku. Keď ju vedieme aj cez stred úsečky KL, bude na úsečku KL kolmá (rozmyslite si prečo). Nová priamka je tak hľadaná os úsečky.

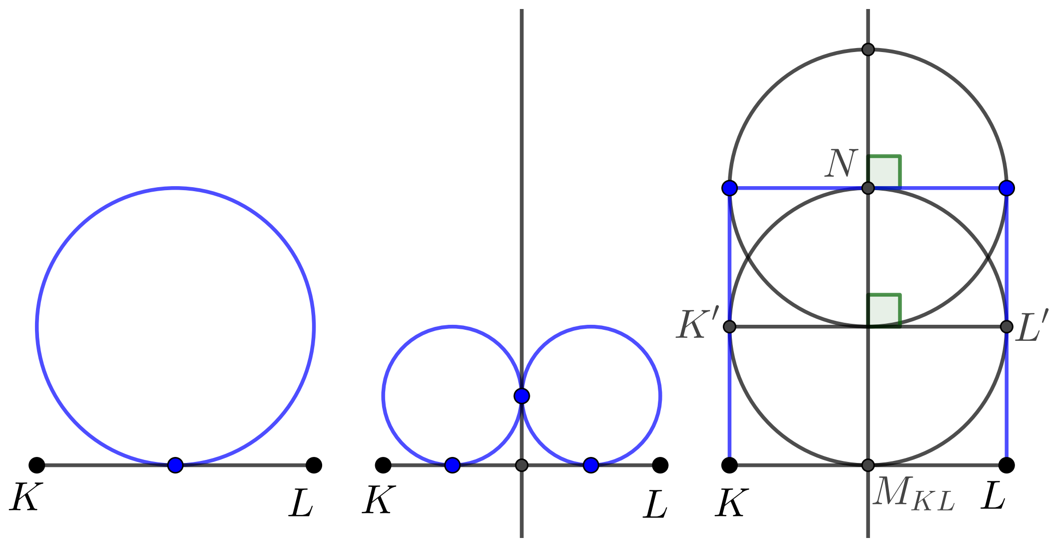
3. **Narysovanie štvorca so stranou KL:** Štvorcom už vieme vpísať kružnicu pomocou operácie „kružnica nad úsečkou", stačí vyznačiť krajné body jednej z jeho strán. Avšak samotný štvorec sa nám nenarysuje. Keby sme ich ale vedeli konštruovať, mohli by sme ich všelijako preklápať a vyrobiť z nich mriežku. Stačí vždy narysovať nový štvorec nad stranou nejakého už existujúceho štvorca. Navyše, štvorce majú mnoho ďalších vlastností, ktoré by sa nám mohli hodiť.

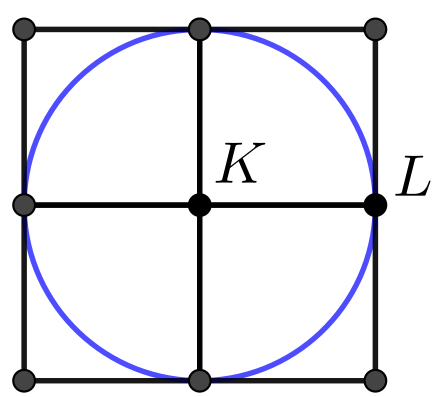
   Teraz ku konštrukcií. Najskôr narysujeme „kružnicu nad úsečkou" KL a os úsečky KL. Stred úsečky KL označme M_{KL}. Druhý bod, v ktorom pretne os úsečky KL „kružnicu nad úsečkou" KL označíme N. Teraz narysujeme os úsečky $M_{KL}N$. Táto os pretne „kružnicu nad úsečkou" KL v bodoch K', L'. Dá sa všimnúť (a skúste si to dokázať), že K', L' sú stredmi strán štvorca so stranou KL, teda zopakovaním celého tohto postupu pre úsečku $K'L'$ vieme dostať druhé dva vrcholy štvorca so stranou KL.

4. **Narysovanie kružnice so stredom v bode K a polomerom $|KL|$:** Už vieme narysovať štvorec nad úsečkou KL v jednej z polrovín určenej priamkou KL. Narysujme teda oba možné štvorce nad úsečkou KL. Teraz máme narysovaný jeden obdĺžnik zložený z dvoch štvorcov, ktorého stredy dlhších strán sú body K a L.

   Môžme dorysovať „kružnicu nad úsečkou“ pre stranu obdĺžnika, na ktorej leží bod L. Takto dostaneme kružnicu so stredom v bode K, ktorá zároveň prechádza bodom L. Ak by sme preklopili tento obdĺžnik ešte doľava, tak ako je to na obrázku, tak uvidíme, že kružnica ktorú sme skonštruovali je vpísaná jednému veľkému štvorcu.

Všetky tieto kroky môžme zachytiť nasledovnými obrázkami:

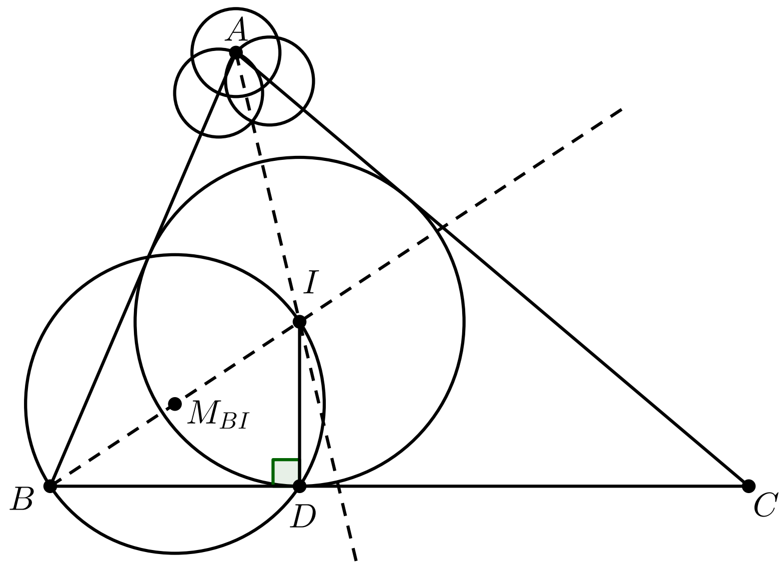




Samozrejme spôsobov, ako docieliť konštrukciu kružnice podľa stredu a polomeru je veľa, my sme si len vybrali jednu konkrétnu konštrukciu. Už len stačí použiť jeden z bežných postupov konštrukcie stredu vpísanej kružnice:

1. Zostrojíme os uhla BAC klasickým postupom pomocou troch kružníc, tak ako na obrázku.
2. Analogicky zostrojíme os uhla ABC. Priesečník osí uhlov označíme I a ide o stred vpísanej kružnice.
3. Nech M_{BI} je stredom úsečky BI. Kružnica so stredom M_{BI} a polomerom $|BM_{BI}|$ je Tálesovou kružnicou nad úsečkou BI. To znamená, že ak druhý priesečník tejto kružnice a strany BC označíme D, tak uhol BDI je pravý, teda D je zároveň bod dotyku kružnice vpísanej trojuholníku ABC a strany BC.

4. Už len stačí dorysovať kružnicu so stredom I a polomerom $|ID|$. Táto kružnica je vpísanou kružnicou trojuholníka ABC. Celý náčrt si môžme pozrieť na nasledovnom obrázku.



3.7 Kvalitný Mimoriadny Sejf

opravovali **Juro** a **Lucka**

Zadanie. *Kubka mrzelo, že počas prvej online prednášky sa rozprával len s čiernym monitorom, lebo študenti sa rozhodli nezapnúť kamery na svojich počítačoch. Rozhodol sa preto si prečistiť hlavu večernou prechádzkou po vychýrenej železničnej stanici Šindžuku. Sadol si na lavičku a sledoval odchádzajúce vlaky. Zrazu sa vedľa neho ktosi vrhol na lavičku a začal nadávať. Kubko sa neznámeho perfektnou angličtinou opýtal, v čom je problém. „Tu na Šindžuku si človek môže uschovať cennosti do skriniek na zámok,“ vysvetlil neznámy. „Ale ja som svoj kľúčik stratil a musím zodpovedať bezpečnostnú otázku, aby mi zamestnanci skrinku odomkli. A keďže som ultra hlúpy, dal som si ako hádanku matematickú úlohu a zabudol som jej riešenie.“ Kubko ho s potešením ubezpečil, že to nebude najmenší problém.*

Cudzincova hádanka znie nasledovne: Dá sa pre každú dvojicu nenulových racionálnych čísiel (a, b) nájsť dvojica prirodzených čísiel m, n takých, že $(am + b)^2 + (a + nb)^2$ je prirodzené číslo?

Riešenie

Odpoveď je NIE. Treba sa mať vždy na pozore a nikdy nepredpokladať, že zadanie platí a hneď ho dokazovať. Je dobré si vyskúšať najprv pre pekné a potom aj nejaké škaredé konštanty, že to vychádza. Pri vyskúšaní prvých dvoch ”škaredých” konštánt zistíme, že to neplatí. V našom príklade si ukážeme, že pre $a = 1, b = \frac{1}{2}$ také m, n neexistujú. Samozrejme sa to dá dokázať aj pre mnohé iné dvojice, veľa z vás to dokazovalo pre 1 a $\frac{1}{4}$, či dvojicu $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{4}$.

Čo chceme dokazovať? Chceme ukázať, že pre všetky $m, n \in \mathbb{N}$ je číslo $\left(1m + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}n + 1\right)^2$ necelé. Ak ale roznásobíme zátvorky, dostávame

$$\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}n+1\right)^2=\frac{(2m+1)^2+(n+2)^2}{4}=\frac{4m^2+4m+4n+4+n^2+1}{4}$$
$$=m^2+m+n+1+\frac{n^2+1}{4}.$$

Ale základný trik pri práci s mocninami je znalosť tzv. kvadratických zvyškov, teda že n^2 má vždy zvyšok 0 alebo 1 modulo 4. Inak povedané, n^2+1 nikdy nie je deliteľné štyrmi. Teda celý výraz tiež prirodzený nikdy nebude, pre žiadnu voľbu m, n. Takže skutočne, pre $a=1, b=\frac{1}{2}$ neexistujú také m, n, aby bol výraz $(am+b)^2+(bn+a)^2$ prirodzené číslo.

3.8 Konečnú Misku Schlamstnem!

opravovali **Tomáš J.** a **Mimi**

Zadanie. *„Vďaka za pomoc, ja som Jótaró Hamata," vystrel ku Kubkovi človek ruku na znak vďaky. „Pozývam vás na misku alebo dve horúceho oyakodonu." Keď zapadli do ošumelej krčmičky pod stanicou, vysvitlo, že tých misiek nebude len jedna či dve.*

Na stole je viac ako n^2 misiek, kde n je kladné celé číslo. Kubko sa s Jótarom rozhodol zahrať si hru o to, kto vychlípe poslednú misku so šťavnatou rybou. Ako prvý bude chlípať Kubko a následne sa s Jótarom striedajú v ťahoch. Hráč na ťahu musí vychlípať m misiek, pričom m spĺňa jednu z nasledovných podmienok:

- $m=1$.
- $1<m<n$ *a zároveň* m *je prvočíslo.*
- m *je násobkom čísla* n.

Vyhráva ten, kto vychlípe špeciálnu poslednú misku[4] so šťavnatou rybou. Dokážte, že Kubko má víťaznú stratégiu.

Riešenie

Stav hry medzi ťahmi je úplne popísateľný počtom misiek na stole a hráčom na ťahu. Teda pozícia, do ktorej hráč svojim ťahom hru dostáva, je popísaná iba jedným nezáporným celým číslom – počtom misiek. Misiek vždy, keď je na stole aspoň jedna, ubúda, takže hra sa musí skončiť za nanajvýš toľko ťahov, koľko je na začiatku misiek, čo je konečne mnoho.

Vďaka tomu môžeme pozície rozdeliť na vyhrávajúce a prehrávajúce. Vyhrávajúca pozícia je taká, že keď do nej potiahneme, tak vyhrávajúca stratégia ostáva na našej strane – vieme zaručene vyhrať. Nech 0 je vyhrávajúca pozícia. Ak z pozície existuje ťah do vyhrávajúcej pozície, je prehrávajúca, inak je vyhrávajúca. Takéto rozdelenie je dobre definované, pretože môžeme pozície prechádzať podľa počtu misiek vzostupne.

Najprv si všimnime, že neexistujú dve vyhrávajúce pozície zhodujúce sa vo zvyšku po delení počtu misiek číslom n. Ak by existovali, z tej s vyšším počtom misiek by existoval ťah do tej s nižším (pretože rozdiel medzi ich počtami je násobkom n), čo je spor s neexistenciou ťahu z vyhrávajúcej pozície do vyhrávajúcej.

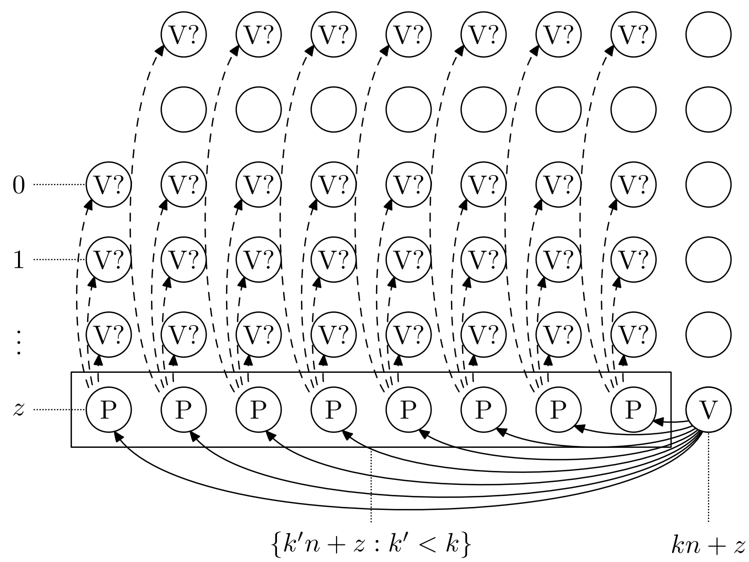
Predpokladajme, že počiatočná pozícia je vyhrávajúca. Nech počiatočný počet misiek na stole je $kn+z$, kde k je celé číslo a $z \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Keďže $kn+z>n^2$ a $n \geq z$, tak musí byť $k>n-1$. Pozrime sa na n pozícií s počtami

[4] Podľa dávnej tradície však túto misku je možné vychlípať až ako poslednú, zo všetkých na stole. Preto sa tiež volá posledná miska.

misiek $k'n + z$ pre $k' \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$. Tieto počty sú nižšie než počiatočný počet ($k' \leq n - 1 < k$) o násobky n. To znamená, že do všetkých týchto pozícií existujú ťahy z počiatočnej vyhrávajúcej, a teda sú prehrávajúce.

Ťah tretieho typu z pozície s $k'n + z$ miskami vedie do prehrávajúcej pozície, lebo všetky pozície s menej miskami s tým istým zvyškom modulo n sú prehrávajúce. Odtiaľ ide o ťah prvého alebo druhého typu. Ťah druhého typu vždy znižuje počet misiek o menej než n. Ťah prvého typu tiež, ak $n \neq 1$. Pre $n = 1$ však ťah o $m = 1$ je zároveň ťahom o násobok n, čiže vedie do prehrávajúcej pozície. To značí, že každý ťah z $k'n + z$ vedie do prehrávajúcej pozície alebo znižuje počet misiek o menej než n, čím vedie do pozície s počtom misiek vyšším než $(k' - 1)n + z$.

Každá pozícia $k'n + z$ je prehrávajúca, odkiaľ z nej musí jestvovať ťah do vyhrávajúcej pozície. V zmysle predchádzajúceho odseku táto vyhrávajúca pozícia musí mať viac než $(k' - 1)n + z$ misiek, takže pre každé k' je medzi $(k' - 1)n + z$ a $k'n + z$ vyhrávajúca pozícia. Tieto rozsahy sa neprekrývajú, nuž pre n rôznych k' musí ísť o n rôznych vyhrávajúcich pozícií. Ani jedna z nich nedáva zvyšok z po delení n, pretože jediná vyhrávajúca pozícia s týmto zvyškom má $kn + z$ misiek. Z Dirichletovho princípu potom medzi $n - 1$ ostatnými zvyškami aspoň jeden obsahuje viac než jednu z našich n vyhrávajúcich pozícií, čo je v spore s tým, čo sme si už dokázali.



Náš predpoklad musí byť nepravdivý a počiatočná pozícia je prehrávajúca. Odtiaľ už dostávame vyhrávajúcu stratégiu pre začínajúceho Kubka: Vždy potiahne do vyhrávajúcej pozície. Z takej je Jótaró nútený ťahať do prehrávajúcej pozície. Napokon z takej pozície vždy jestvuje ťah do vyhrávajúcej pozície, čo znamená, že Kubkovi sa ťahy neminú a neprehrá. Po konečnom počte ťahov sa však hra musí skončiť. Vtedy Kubko vyhrá.

3.9 Komplikáciu Má Shinji

opravovali **Marek** a **Lucy**

Zadanie. *Keď dojedli, spokojne sa opreli vo svojich isu a uvoľnili si opasky. „Dočuj," povedal Jótaró. „Pomohol by si mi ešte s jedným problémom? Ak mi dáš pomocnú ruku, za odmenu ti prezradím zmysel života." Kubko poomáľal jeho ponuku na jazyku a nakoniec prikývol.*

Sadli teda do Jótarovho auta a odviezli sa do akejsi podzemnej futuristickej základne. Všade monitory, herné konzoly, počítače, autá Nissan a hlavne rad obrovských robotov. „Problém je v tom, že nevieme dostať Shinjiho do robota," vysvetlil Jótaró. „On je totiž trošku divný a má takú podmienku, ktorú treba splniť, aby vstúpil do robota. Ja by som chcel vedieť, ktoré z týchto robotov podmienke vyhovujú. Tiež mi rovno pomôž niečo Shinjimu dokázať."

Roboty sú číslované zaradom 1, 2, 3.... *Shinji si vymyslel špeciálnu funkciu* $f(x)$, *ktorá zoberie binárny zápis*[5] *čísla* x, *vymení všetky jednotky za nuly a naopak, a prevedie výsledok do desiatkového zápisu, čo je jej funkčná hodnota pre* x. *Napríklad* $f(23) = 8$, *lebo* $23 = 10111_2$, *teda* $f(23) = 01000_2 = 8_{10}$. *Shinji potrebuje, aby ste dokázali, že pre každé kladné celé* n *platí nerovnosť*

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \leq \frac{n^2}{4}$$

Dokážte, že Shinjiho nerovnosť platí pre každé kladné celé číslo n, *a následne zistite, pre ktoré* n *platí rovnosť.*

Riešenie

Na začiatok uvedieme nejakú tú analýzu problému, kde uchopiť takéto problémy. Pozrieme sa na správanie funkcie f pri malých hodnotách n. Funkcia f nám dáva hodnoty $0, 1, 0, 3, 2, 1, 0, 7, 6, 5, 4, \ldots$ pre čísla $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Spravíme niekoľko pozorovaní: Platí nerovnosť $f(n) < n$, nakoľko prvá binárna cifra n sa zmení na nulu v $f(n)$ a pred ňou budú iba nuly. Číslo $2^k - 1$ má v binárnej sústave samé jednotky, a teda $f(2^k - 1) = 0$. Taktiež číslo 2^k vyzerá v binárnom zápise $100\ldots00$, kde k je počet núl, potom $f(2^k)$ má k jednotiek vo svojom zápise. Ďalej si uvedomme, že pre ľubovoľné n je číslo $f(n) \otimes n = 0$, kde $\otimes$ je binárny *xnor*. Operácia *xnor* robí to, že si zoberie dve cifry (v binárnom zápise) a vyhodí 1 ak sú rovnaké a 0 ak sú rôzne. To platí, presne preto, že sme si funkciu $f(n)$ zadefinovali, že obracia cifry n. Pre číslo n tvaru $2^k + l$, kde $0 \leq l < 2^k$ je podmienka $f(n) \otimes n = 0$ ekvivalentná $f(2^k + l) \otimes (2^k + l) = 0$. Rovnosť $2^k - l - 1 \otimes 2^k + l = 0$ necháme ako cvičenie pre čitateľa. Keďže $2^k - l - 1$ je jediné riešenie rovnice $x \otimes 2^k + l$ menšie ako 2^k, tak musí platiť, že $f(n) = 2^k - 1 - l$.

Uvedieme dve riešenia. Prvé priamočiare, vyžadujúce iba trochu vytrvalosti a narábanie so sumami na úrovni geometrických a aritmetických súm a hľadania maxima kvadratickej funkcie, a druhé s trochou nápadu. Poznatky z prvého odseku budeme využívať v oboch riešeniach.

Priamočiare riešenie

Súčet $f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$ spočítame priamo, rozdelíme ho na niekoľko ucelených častí od $2^k - 1$ po 0 a zvyšok. Od 2^{i-1} po $2^i - 1$ máme súčet

$$2^{i-1} - 1 + 2^{i-1} - 2 + \cdots + 1 + 0 = \frac{(2^{i-1} - 1)2^{i-1}}{2} = (2^{i-1} - 1)2^{i-2}.$$

Nech teda $n = 2^k + l$, súčet po 2^k bude

$$\sum_{i=2}^{k} (2^{i-1} - 1)2^{i-2} = \sum_{i=2}^{k} 2^{2i-3} - 2^{i-2} = \sum_{i=2}^{k} 2^{2i-3} - \sum_{i=2}^{k} 2^{i-2} = \sum_{i=0}^{k-2} 2^{2i+1} - \sum_{i=0}^{k-2} 2^{i}.$$

To sú geometrické rady a tie vieme sčítať,

[5] binárny zápis je postupnosť 0 a 1 začínajúca 1 okrem prípadu, kedy $f(x) = 0$

$$\sum_{i=0}^{k-2} 2^{2i+1} = 2 \cdot \frac{4^{k-1}-1}{4-1} = \frac{2}{3}(4^{k-1}-1),$$

$$\sum_{i=0}^{k-2} 2^{i} = \frac{2^{k-1}-1}{2-1} = 2^{k-1}-1,$$

$$\sum_{i=0}^{k-2} 2^{2i+1} - \sum_{i=0}^{k-2} 2^{i} = \frac{2}{3}(4^{k-1}-1) - (2^{k-1}-1).$$

Zvyšok od 2^k po $n = 2^k + l$ je vlastne

$$\sum_{i=0}^{l} 2^k - 1 - i = (l+1)\cdot(2^k) - \frac{(l+1)(l+2)}{2}.$$

Dokopy teda súčet

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \frac{2}{3}(4^{k-1}-1) - (2^{k-1}-1) + (l+1)\cdot(2^k) - \frac{(l+1)(l+2)}{2}.$$

Na pravej strane dokazovanej nerovnosti máme

$$\frac{n^2}{4} = \frac{(2^k+l)^2}{4} = \frac{2^{2k} + 2\cdot 2^k \cdot l + l^2}{4}.$$

Dokazujeme teda nerovnosť

$$\frac{2}{3}(4^{k-1}-1) - (2^{k-1}-1) + (l+1)\cdot(2^k) - \frac{(l+1)(l+2)}{2} \le \frac{2^{2k} + 2\cdot 2^k \cdot l + l^2}{4},$$

$$-\frac{2}{3} + 2^{k-1}(l+1) - \frac{3l^2}{4} - \frac{3l}{2} \le \frac{1}{3}4^{k-1},$$

$$3\cdot 2^{k+1}(l+1) - (9l^2 + 18l + 8) \le 4^k.$$

Pravá strana nezávisí od l ľavá áno. Preto by bolo fajn keby sme sa pozreli akú maximálnu hodnotu môže výraz naľavo nadobúdať ak nehýbeme k-čkom. Funkcia na ľavo je konkávnou kvadratickou funkciou, nakoľko pri l^2 je znamienko mínus. Vzorec na výpočet vrcholu paraboly $ax^2 + bx + c$ je nasledujúci $x = -\frac{b}{2a}$. Tento všeobecný vzorec sa dá odvodiť, keď máme korene, pomerne jednoducho. Tento vzorec platí aj keby sme mali parabolu bez koreňov. Pre fajnšmekrov z derivácie ľahko vidieť, že $ax^2 + bx + c\frac{d}{dx} = 2ax + b = 0$ je rovnicou maxima s riešením $x = -\frac{b}{2a}$. Preto $l_{max} = \frac{2^k}{3} - 1$. Lenže číslo $\frac{2^k}{3} - 1$ očividne nie je celé číslo, preto najbližšie celé číslo je buď $\frac{2^k}{3} - 1 - \frac{1}{3}$ alebo $\frac{2^k}{3} - 1 + \frac{1}{3}$, v závislosti od k. Jedno z týchto čísel bude celé a preň parabola dosahuje svoje maximum na celých číslach.

Dosadením maxima na celých číslach $l_{max} \pm \frac{1}{3}$ máme

$$3 \cdot 2^{k+1}\left(\frac{2^k}{3} \pm \frac{1}{3}\right) - \left(9\left(\frac{2^k}{3} - 1 \pm \frac{1}{3}\right)^2 + 18\left(\frac{2^k}{3} - 1 \pm \frac{1}{3}\right) + 8\right) \le 4^k,$$

$$2^{2k+1} \pm 2^{k+1} - \left(9\left(\frac{2^k}{3} - 1 \pm \frac{1}{3}\right)^2 + 18\left(\frac{2^k}{3} - 1 \pm \frac{1}{3}\right) + 8\right) =$$

$$2 \cdot 4^k \pm 2^{k+1} - 9\left(\frac{4^k}{9} + 1 + \frac{1}{9} - 2 \cdot \frac{2^k}{3} \pm 2 \cdot \frac{2^k}{9} \mp 2 \cdot \frac{1}{3}\right) - 18\left(\frac{2^k}{3} - 1 \pm \frac{1}{3}\right) - 8 =$$

$$= 2 \cdot 4^k - 4^k - 9 - 1 + 6 \cdot 2^k \pm 6 - 6 \cdot 2^k + 18 \mp 6 - 8 = 4^k \le 4^k$$

Dokázali sme teda nerovnosť zo zadania. Ba čo viac, našli sme aj kedy nastáva rovnosť. Pre $n = 2^k + \frac{2^k \pm 1}{3} - 1$ nastáva rovnosť.

Riešenie s nápadom

Postupujme matematickou indukciou. Pre $n = 1$ tvrdenie zjavne platí. Zoberme znovu $n = 2^k + l$, kde $l < 2^k$. Rozlíšime dva prípady. Ak $l < 2^{k-1}$, tak

$$f(1) + \cdots + f(n-1) + f(2^k + l) \le \frac{(n-1)^2}{4} + f(2^k + l) = \frac{(n-1)^2}{4} + 2^k - l - 1 < \frac{(n-1)^2}{4} + 2^k - 2^{k-1} - 1 =$$

$$= \frac{(n-1)^2}{4} + 2^{k-1} - 1 \le \frac{(n-1)^2}{4} + \frac{n}{2} - 1 = \frac{n^2 - 3}{4} < \frac{n^2}{4}.$$

V prípade $l \ge 2^{k-1}$ nebude stačiť použiť indukciu s krokom o 1, ale využijeme, že indukčný predpoklad platí pre všetky menšie hodnoty od n. Celý súčet si rozdelíme na dve časti. Prvá časť bude po $t = 2^k - l - 2$, čo si označíme $F(t) = f(1) + \cdots + f(t)$. Druhá časť je od $t + 1$ do n. Následne si funkčné hodnoty šikovne popárujeme, aby to pekne vyšlo,

$$f(1) + \cdots + f(t) + f(2^k - l - 1) + \cdots + f(2^k + l) = F(t) + \sum_{i=0}^{l} f(2^k - 1 - i) + \sum_{i=0}^{l} f(2^k + i) =$$

$$F(t) + \sum_{i=0}^{l} f(2^k - 1 - i) + f(2^k + i) = F(t) + \sum_{i=0}^{l} (i) + (2^k - 1 - i) = F(t) + (l+1)(2^k - 1) =$$

$$F(t) + \frac{(n-t)}{2}\frac{(n+t)}{2} \le \frac{t^2}{4} + \frac{n^2 - t^2}{4} = \frac{n^2}{4}.$$

3.10 Kóan Mysteriózneho Spoločníka

opravovali **Vodka** a **Robberta**

Zadanie. *Kubko, byvší tou matematickou legendou, za ktorú ho všetci považujú, úlohu vyriešil ľavou prednou. Jótaró Hamata uznanlivo pokýval hlavou a vydali sa späť do Tokia. Sadli do Jótarovho auta a vyrazili. Jótaró chvíľu šoféroval mlčky a potom sa opýtal: „Bude ti vadiť, keď si pustím hudbu? Pri šoférovaní ma upokojuje.“ Kubko pokýval hlavou, že mu to v najmenšom neprekáža. Jótaró vybral z náprsného vrecka kazetu a vložil ju do obstarožného prehrávača. Autom sa rozľahli teplé tóny niekoho menom Takaši Jošimacu (ako Jótaró Kubkovi vysvetlil). O pol minúty na to auto zastalo a kazeta stíchla. Stáli pred Kubkovým hotelom. Nebo bolo plné hviezd, ktoré žiaľ kvôli svetelnému smogu nebolo vidieť, a noc voňala tajomstvom. Jótaró sa oprel a úplne zbytočne zašepkal: „Sme na mieste.“ Kubko prikývol a zahľadel sa na obzor. Spoločne mlčali. Jótaró napokon pootvoril ústa a potichu, ako keď kladiete niekoho srdcu blízkeho do postele, pošepkal: „To, čo ti teraz poviem, ti možno príde kryptické. Ale verím, že raz si uvedomíš plnú dôležitosť mojich slov a vtedy si na mňa spomenieš.“ Kubko nevedel, čo odpovedať, tak mlčal. Jótaró trochu bubnoval prstami po volante a napokon Kubkovi prezradil zmysel života, prezradil mu ho v otázke, ktorá Kubka mátala až do rána, a potom aj počas celého letu späť domov a ktovie ako dlho ešte:*

„Existuje nekonečne veľa kladných celých čísel n, pre ktoré je číslo $(2020n)!$ *deliteľné číslom* $n! + 1$*?“*

Riešenie

Ukážeme, že existuje len konečne veľa takých čísel. Predpokladajme, že pre nejaké n platí $n! + 1 \mid (2020n)!$. Využitím vzťahu

$$\binom{kn}{n} = \frac{(kn)(kn-1)\dots((k-1)n+1)}{n!}$$

môžeme upraviť pravú stranu nasledovne:

$$(2020n)! = (n!^{2020})\binom{n}{n}\binom{2n}{n}\dots\binom{2020n}{n}.$$

Vieme, že čísla $n! + 1$ a $n!$ sú nesúdeliteľné, a preto môžeme pravú stranu deliteľnosti vydeliť $n!^{2020}$. Dostávame

$$n! + 1 \mid \binom{n}{n}\binom{2n}{n}\dots\binom{2020n}{n}.$$

Kombinačné číslo $\binom{kn}{n}$ sa nachádza v (kn)-tom riadku Pascalovho trojuholníka, ktorého súčet je 2^{kn}. Preto platí $\binom{kn}{n} < 2^{kn}$. Keď aj našu deliteľnosť nahradíme nerovnosťou, tak použitím tohto odhadu máme:

$$n! + 1 \le \binom{n}{n}\binom{2n}{n}\dots\binom{2020n}{n} < 2^n \cdot 2^{2n} \cdots 2^{2020n} = (2^{(1010\cdot 2021)n}) = M^n,$$

kde sme pre jednoduchosť označili $2^{1010\cdot 2021} = M$. Avšak faktoriál rastie rýchlejšie ako exponenciálna funkcia, a preto existuje konštanta C taká, že pre $n > C$ je $n! > M^n$.

Ak vám to nie je jasné, zamyslite sa nad tým, že ak položíme $n = 2M$ a postupne zväčšujeme n o 1, tak pomer $n!/M^n$ sa vždy aspoň zdvojnásobí. Preto od istého C bude väčší ako 1.

To znamená, že nutne $n \le C$, čo znamená, že našich hľadaných n môže byť len konečne veľa, čo sme chceli dokázať.