Korešpondenčný matematický seminár
XLII. ročník, 2020/2021
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Riešenia 1. kola letnej časti

1.1 Komunálny Marlboroughský Sheriff ($\kappa \leq 1$) opravovali **Kubo P.** a **Kaja P.**

Zadanie. *Nad mestom sa vznášal prach. A predsa bolo vidieť šerifskú hviezdu nad vchodom do úradu Sgt. Peppera. Ak niekto americké Marlborough držal na krátko a prinášal do všedných dní vraždenia, krvi a krčmových duelov poriadok, tak to bol on. Muž činu a legenda, Sheriff Sgt. Pepper. Ale zase nepreháňajme. Nie každý deň bolo treba volať hrobára. Napríklad včera jediným problémom, ktorý Sgt. Pepper riešil, bol nejaký rodinný spor o deľbe majetku:*

13-členná rodina mala v banke po zosnulom strýcovi majetok v neznámej hodnote. Pamätali si však, že tá hodnota bola tvaru 44...43, pričom 3-ke predchádzalo $n \geq 1$ štvoriek. Akú hodnotu mohol mať majetok, aby si ho vedeli rozdeliť bezo zvyšku? Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že vyššie uvedené číslo je deliteľné 13 bezo zvyšku.

Riešenie

Zoberme si ľubovoľnú hodnotu daného tvaru a nazvime ju x. Nasledujúcu hodnotu, ktorá bude mať počet štvoriek o 1 väčší, získame z pôvodnej ako $x \cdot 10 + 13$.

Našu hodnotu si môžeme vždy rozpísať ako $13a + b$, kde a a b sú nezáporné celé čísla a $b < 13$. Nasledujúca hodnota bude potom $(13a + b) \cdot 10 + 13 = 13 \cdot (10a + 1) + 10b$.

Číslo $13 \cdot (10a+1)$ je určite deliteľné číslom 13, teda deliteľnosť nasledujúcej hodnoty číslom 13 ovplyvní iba zvyšok čísla $10b$ po delení číslom 13. Môžeme si však všimnúť, že číslo $10b$ je deliteľné číslom 13 práve vtedy, keď ním je deliteľné b. Keďže b je zvyšok pôvodnej hodnoty po delení číslom 13, tak aj nasledujúca hodnota bude deliteľná číslom 13 práve vtedy, keď je ním deliteľná pôvodná hodnota.

Keďže ale hneď prvá možná hodnota, čo je 43, nie je deliteľná číslom 13, tak ním nebude deliteľná ani žiadna ďalšia hodnota. Preto neexistuje žiadne také n, pre ktoré by hodnota daného tvaru bola deliteľná číslom 13 bezo zvyšku.

1.2 Komančská Maľba v Sene ($\kappa \leq 2$) opravovala **Lucka**

Zadanie. *„Ser Pepper!“ kričal zadychčaný muž texaským dialektom, „Komančovia sa vrátili! V noci do našich úrodných polí vypálili znak. Musíte nám pomôcť.“ Sgt. Pepper neváhal. Povedal jeho povestné „Idem, riešim,“ nasadol na koňa a vybral sa za kovbojom. Až dorazili na miesto činu, odkryl sa im takýto obraz:*

Vo vnútri pravidelného 80-uholníka je vyznačených 50 bodov tak, že žiadna trojica zo všetkých 130 bodov (vrcholov a vyznačených bodov) neleží na jednej priamke. 80-uholník rozdelíme na trojuholníky (ktoré sa nepretínajú), pričom vrcholy týchto trojuholníkov tvoria práve vrcholy 80-uholníka a vyznačené body v jeho vnútri. Na koľko najmenej a koľko najviac trojuholníkov vieme takto rozdeliť náš 80-uholník?

Riešenie

Rozdeľme 80-uholík na trojuholníky a označme n ich počet. Pozrime sa na súčet vnútorných uhlov týchto trojuholníkov. Vieme, že každý trojuholník má súčet vnútorných uhlov rovný 180°, takže súčet všetkých uhlov v stupňoch musí byť $180 \cdot n$. Na druhej strane, súčet vnútorných uhlov ľubovoľného k-uholníka v stupňoch je $(k-2) \cdot 180$, takže v 80-uholníku to je $78 \cdot 180$. Navyše je ešte vnútri 80-uholníka ďalších 50 bodov, a keďže žiadne tri z tých 130 bodov neležia na priamke, tak každý z tých 50 bodov je vrcholom niekoľkých trojuholníkov, a to tak, že súčet všetkých uhlov v trojuholníkoch pri tomto vrchole je 360°. Súčet všetkých vnútorných uhlov vo všetkých n trojuholníkoch tak musí byť zároveň $78 \cdot 180° + 50 \cdot 360° = 178 \cdot 180°$, z čoho dostávame rovnosť $180 \cdot n = 178 \cdot 180$, a teda $n = 178$. Odpoveďou na obe otázky zo zadania tak je 178.

1.3 Komanč Mocný Syseľ ($\kappa \leq 3$) opravoval **Miloš**

Zadanie. *„Buď pozdravený, muž zákona," vyšlo z úst náčelníka Komančov Mocného Sysľa počas toho, ako Sgt. Peppera obkľúčili ale dva tucty Indiánov. „Ďakujem Ti, že si reagoval na našu výzvu v poli a prišiel sem. Pokrvný brat musí pokrvnému bratovi pomôcť. Naša jednotka včera zajala 47 zlatokopov a moji náčelníci si potrebujú rozdeliť ich skalpy."*

Komanči majú 47 skalpov. Piati náčelníci – Tuarego, Pacahuti, Winnetou, Apasuke a Komanke – si chcú tieto skalpy rozdeliť, pričom Tuarego aj Pacahuti chce párny počet skalpov (aj 0 je párne číslo) a Winnetou, Apasuke a Komanke chcú nepárny počet. Koľkými spôsobmi si vedia náčelníci skalpy medzi sebou rozdeliť? Skalpy sú nerozlíšiteľné, čiže dva spôsoby považujeme za rôzne, ak aspoň jeden náčelník má v nich rôzne počty skalpov.

Riešenie

V ľubovoľnej možnosti, ako rozdeliť skalpy pre náčelníkov, majú Winnetou, Apasuke a Komanke aspoň jeden skalp. Dajme im teda po jednom skalpe a zamerajme sa na to, ako rozdeliť zvyšných 44 skalpov.

V tejto situácii chce každý náčelník dostať ešte nejaký párny počet skalpov. Zároveň máme ešte párny počet skalpov, ktoré sme nepoužili (čo je dobre, skúste si premyslieť, čo by znamenalo, keby máme v tomto bode nepárny počet skalpov na rozdelenie). Môžeme teda riešiť analogický problém – rozdeľme 22 párov skalpov medzi 5 náčelníkov.

V tejto časti je dôležité si veľmi dobre premyslieť, či týmto postupom nezarátame nejaké možnosti dvakrát, či na nejakú možnosť nezabudneme, alebo či nenájdeme nejakú možnosť, ktorá neprislúcha žiadnemu rozdeleniu skalpov. Zoberme si ľubovoľné rozdelenie dvojičiek. Ak si označíme postupne počty dvojičiek pre náčelníkov a, b, c, d, e, potom vieme, že platí $a+b+c+d+e = 22$. Takémuto rozdeleniu dvojičiek zodpovedá rozdelenie skalpov, kde náčelníci dostanú postupne $2a, 2b, 2c+1, 2d+1, 2e+1$ skalpov, kde si môžeme overiť, že $2a + 2b + (2c+1) + (2d+1) + (2e+1) = 47$. Môžeme si taktiež premyslieť, že rovnako to funguje aj naopak – ku každému rozdeleniu skalpov vieme nájsť prislúchajúce rozdelenie dvojičiek. Tým pádom vieme s istotou povedať, že keď spočítame všetky možné rozdelenia dvojičiek, bude sa tento počet rovnať počtu všetkých možných rozdelení skalpov.

Poďme teda rozdeliť 22 dvojičiek medzi 5 náčelníkov. Môžeme použiť techniku „oddeľovačov". Zoraďme si 22 dvojičiek vedľa seba do radu. Zoberme si 4 oddeľovače a uložme ich medzi nejaké dve susediace dvojičky (kde oddeľovače nemusia byť nutne medzi rôznymi susedmi). Takto sme rozdelili všetky dvojičky do 5 skupín. Teraz vieme dvojičky prideliť náčelníkom tak, že každému náčelníkovi dáme všetky dvojičky z jednej skupiny.

Tu je taktiež dôležité uviesť, že takýmto postupom zarátame každé rozdelenie dvojičiek práve raz, a nevytvoríme také usporiadanie dvojičiek a oddeľovačov, ktoré nezodpovedá žiadnemu rozdeleniu dvojičiek. Už sme si ukázali, ako sa od konkrétneho usporiadania dvojičiek a oddeľovačov vieme dopracovať k rozdeleniu dvojičiek pre náčelníkov. Ľahko vieme popísať aj opačný postup. Ak vieme, koľko dvojičiek má ktorý náčelník, jednoducho uložíme všetky dvojičky prvého náčelníka vedľa seba a na koniec dáme oddeľovač. Potom spravíme to isté s dvojičkami druhého, tretieho a štvrtého náčelníka, a na konci už iba pridáme dvojičky posledného, bez oddeľovača na konci (môžete si to predstaviť ako vykladanie nákupu v obchode na pokladničný pás – každý si vyloží svoj nákup a dá zaň oddeľovač). Znova teda platí argument, že ak porátame koľko existuje možných spôsobov rozdelenia dvojičiek a oddeľovačov, nájdeme zároveň počet všetkých možných rozdelení dvojičiek náčelníkom.

Ako však zistiť, koľkými spôsobmi môžeme umiestniť oddeľovače? Všimnime si, že po umiestnení oddeľovačov máme v rade 26 objektov (22 dvojičiek a 4 oddeľovače). Pre ľubovoľné rozmiestnenie platí, že máme 26 miest, na ktorých môžu dvojičky a oddeľovače byť. Čo robí konkrétne rozloženie unikátnym, je pozícia oddeľovačov. Musíme teda vybrať 4 z 26 miest, kam oddeľovače uložíme. Keďže vyberáme miesta bez opakovania a na poradí jednotlivých oddeľovačov nezáleží, odpoveď na otázku koľkými spôsobmi vieme vybrať 4 z 26 miest nám dajú kombinačné čísla[1]. Tomuto počtu zodpovedá kombinačné číslo

$$\binom{26}{4} = \frac{26!}{4!22!} = 14\,950.$$

Náčelníci si teda vedia rozdeliť skalpy 14 950 spôsobmi.

1.4 Koža Mojej Šije ($\kappa \leq 5$)

opravovali **Jožo** a **Veronika P.**

Zadanie. *„No počkať, čože ste to vy? Zajali 47 dobrých Američanov? Tak to teda nie!“ zazneli posledné slová z úst Sgt. Peppera skôr, ako ho Indiáni ovalili tomahavkom a zviazaného hodili do típí. Keď sa Sheriff Pepper prebral, vydesil ho pošahaný muž, ktorý si kreslil na zem obrázky. Chcel vedieť, koľko kože mu ostane, až ho tí divosi oskalpujú...*

V štvoruholníku $ABCD$ označíme K, L, M, N postupne stredy strán AB, BC, CD, DA. Platí, že

$$|AL| = |AM| = |BM| = |BN| = |CN| = |CK| = |DK| = 47.$$

Dokážte, že aj $|DL| = 47$.

Riešenie

Skôr než sa pustíme do vytrvalého počítania uhlov a iných vecí, je dobré sa zamyslieť, ako náš štvoruholník $ABCD$ môže vyzerať. Ak skúsime nakresliť obrázok, v ktorom by všetko zo zadania platilo, tak sa nám to pri všeobecnom štvoruholníku nepodarí. Rovnosti zo zadania by isto platili, ak by štvoruholník $ABCD$ bol štvorec. Tak sa vyberme tým smerom a poďme zisťovať k tomu potrebné vlastnosti štvoruholníka $ABCD$.

Strany AB a CD sú rovnobežné

Najprv ukážme, že strany AB a CD sú rovnobežné. Vezmime si trojuholník ABM. Vieme, že strany AM a BM sú rovnako dlhé, preto je tento trojuholník rovnoramenný. Úsečka KM je jeho výškou, a preto je kolmá na základňu AB. Podobne si môžeme zobrať trojuholník CDK, ktorý je tiež rovnoramenný a jeho výška, tiež úsečka KM, je teda kolmá aj na základňu tohto trojuholníka, teda na úsečku CD.

Ak je tá istá úsečka KM kolmá na úsečky AB a CD, tak musia byť úsečky AB a CD rovnobežné. Úsečka KM ich navyše delí na 2 zhodné časti (nezabúdajme, že body K a M sú stredmi strán AB a CD) V tomto momente sme ukázali, že náš štvoruholník $ABCD$ je vlastne lichobežník (má rovnobežné základne AB a CD) s výškou KM.

[1] https://cs.wikipedia.org/wiki/Kombinace

Strany AB a CD majú rovnakú dĺžku

Teraz poďme ukázať, že úsečky AB a CD sú aj rovnakej dĺžky. Vieme, že výška na základňu v rovnoramennom trojuholníku delí trojuholník na dva zhodné pravouhlé trojuholníky. Naše rovnoramenné trojuholníky ABM a CDK teda ich výška (úsečka KM) delí na 4 pravouhlé trojuholníky: AKM, BKM, CKM a DKM. Zo zadania vieme, že $|AM| = |BM| = |DK| = |CK|$, teda, že prepony všetkých štyroch trojuholníkov majú rovnakú dĺžku. Ich ďalšia strana je práve zdieľaná úsečka KM. A ešte vieme, že všetky trojuholníky sú pravouhlé. Teda vieme, že sa všetky štyri trojuholníky zhodujú v dvoch stranách a v uhle oproti väčšej z nich, a preto sú zhodné. Ak sú ale pravouhlé trojuholníky zhodné, tak sú aj pôvodné rovnoramenné trojuholníky zhodné, a teda majú rovnaké dĺžky základní. Preto o základniach platí $|AB| = |CD|$.

ABCD je obdĺžnik a záver

Keďže body A, D sú rovnako vzdialené od úsečky KM, tak úsečka AD je rovnobežná s KM. Z rovnakého dôvodu je s KM rovnobežná aj úsečka BC. Úsečky BC a AD sú tak rovnobežné a dokoca aj kolmé na základne AB, CD. Tým sme ukázali, že náš štvoruholník $ABCD$ je vlastne obdĺžnik.

Pozorný riešiteľ si všimne, že už teraz vieme úlohu dokončiť. Trojuholníky NLD a NLA sú pravouhlé so zhodnými odvesnami. Preto podľa vety *sus* sú zhodné. Tým dostávame, že $|DL| = |AL| = 47$, čo sme chceli dokázať.

ABCD je štvorec

Ukazovať, že $ABCD$ je štvorec nie je teda v tomto momente potrebné, no pre záujemcov ukážeme aj to. Označme si $|AB| = |CD| = 2a$ a $|BC| = |DA| = 2b$. Z Pytagorových viet pre trojuholníky KBC a CDN dostávame

$$|CK|^2 = a^2 + 4b^2 = 4a^2 + b^2 = |CN|^2,$$

z čoho po úprave dostaneme $a = b$. Teda $ABCD$ je naozaj štvorec.

To, že vo štvorci nám už platí $|DL| = |AL|$, nechávame na vás. Dá sa to dostať rovnako, ako pri obdĺžniku.

1.5 Kaderník Ma Skalpuje ($\kappa \leq 8$)

opravovali **Mišo M.** a **Lucy**

Zadanie. *Keď sa začalo stmievať, vošiel do típí náčelník Mocný Syseľ v doprovode dvoch Indiánov. Medzitým, ako Indiáni odťahovali druhého muža k lokálnemu barberovi, prehovoril náčelník k marlboroughskému šerifovi: „Sgt. Pepper, v minulosti sme si boli ako bratia a mnohokrát si nám pomohol. Že si to ty, dovolím ti si teraz vybrať pravouhlý trojuholník kože, ktorý ti za trest oskalpujeme. Samozrejme odtiaľ-potiaľ, musíš sa držať nejakých pravidiel.“ Medzitým sa už vrátili naspäť Indiáni a hodili na zem zvitok s ponukou lokálneho kaderníctva. V zvitku stálo:*

Z hlavy ti vytrhneme pravouhlý trojuholník kože, ktorý má odvesny s celočíselnými dĺžkami. Navyše platí, že číselné vyjadrenie jeho obsahu a obvodu je rovnaké. Pomôžte Sgt. Pepperovi nájsť všetky takéto trojuholníky, nech si môže lepšie vybrať svoj účes podľa najnovšej módy.

Riešenie

Označme dĺžky odvesien nášho trojuholníka a, b a dĺžku prepony ako c. Podľa zadania chceme rovnosť medzi obvodom a obsahom (bez jednotiek), takže

$$\frac{ab}{2} = a + b + c,$$

keďže trojuholník je pravouhlý. Túto vlastnosť vieme tiež použiť na zníženie počtu neznámych. Platí totiž Pytagorova veta, a tak $c^2 = a^2 + b^2$, čiže $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Dosadíme do našej rovnosti:

$$\frac{ab}{2} = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Od tohto momentu budeme daný výraz už len upravovať s cieľom vyjadriť jednu dĺžku pomocou druhej. Najprv sa zbavíme odmocniny tým, že ju na pravej strane osamostatníme a následne celú rovnosť umocníme na druhú.

$$\frac{ab}{2} - a - b = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\frac{a^2b^2}{4} + a^2 + b^2 - a^2b - ab^2 + 2ab = a^2 + b^2$$

$$\frac{a^2b^2}{4} - a^2b - ab^2 + 2ab = 0$$

V poslednom kroku sme odčítali $(a^2 + b^2)$ od oboch strán. Výsledný výraz má byť rovný nule. Obsahuje tiež v každom člene ab. Keďže sa jedná o strany trojuholníka, mali by byť kladné, a teda môžeme rovnicu predeliť ab.

$$\frac{ab}{4} - a - b + 2 = 0$$

$$ab - 4a - 4b + 8 = 0$$

$$a(b - 4) = 4b - 8$$

$$a = \frac{4b - 8}{b - 4} = \frac{4(b - 4) + 8}{b - 4} = 4 + \frac{8}{b - 4}$$

Pri vyjadrení a sme delili výrazom $(b - 4)$. Ľahko overíme, že je nenulový. Ak by $b = 4$, dostali by sme $a \cdot 0 = 8$, čo isto neplatí.

Na nájdenie konkrétnych a, b využijeme fakt, že obe majú byť celé čísla. Potom vidíme, že číslo $(b - 4)$ musí byť deliteľom 8. Deliteľmi 8 sú 1, 2, 4, 8 a ich záporné verzie. Pre kladné delitele dostaneme možné dvojice (a, b): $(12, 5)$, $(8, 6)$, $(6, 8)$, $(5, 12)$. Pre záporné delitele bude b kladné len v prípade -1, -2, avšak a presne naopak. Keďže sme v našom postupe umocňovali, mali by sme overiť, či naozaj všetky dané možnosti vyhovujú zadaniu. Ľahko overíme, že trojuholník $5, 12, 13$ má obsah aj obvod 30 a trojuholník $6, 8, 10$ má obvod aj obsah 24. Iné riešenia neexistujú.

1.6 Kravy Marlboroughské Sledujem

opravovali **Mišo S.** a **Juro R.**

Zadanie.

Nad mestom sa vznášal prach. A predsa bolo vidieť šerifskú hviezdu nad vchodom do úradu Sgt. Peppera. Ak niekto americké Marlborough držal na krátko a prinášal do všedných dní vraždenia, krvi a krčmových duelov poriadok, tak to bol on. Muž činu a legenda, Sheriff Sgt. Pepper. Ale zase nepreháňajme. Nie každý deň bolo treba volať hrobára. Napríklad dnes jediným problémom, ktorý Sgt. Pepper riešil, bolo hľadanie strateného dobytka[2] statkára Ritza:

Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré existuje n **nie nutne rôznych** *prvočísel $p_1, p_2, \ldots, p_n$, pre ktoré platí:*

$$\begin{aligned} p_1 &\mid p_2^2 - 1, \\ p_2 &\mid p_3^2 - 1, \\ &\vdots \\ p_{n-1} &\mid p_n^2 - 1, \\ p_n &\mid p_1^2 - 1. \end{aligned}$$

Poznámka. Zápis $a \mid b$ čítame „a delí b" a znamená, že existuje celé číslo k také, že $a \cdot k = b$, čiže číslo b je deliteľné číslom a.[3]

Riešenie

Pri deliteľnostiach s prvočíslami býva užitočné rozkladať veci na súčin. V tejto úlohe dokonca máme výrazy, ktoré na súčin idú rozložiť veľmi jednoducho. Pre každé i od 1 do n má platiť

$$\begin{aligned} p_i &\mid p_{i+1}^2 - 1, \\ p_i &\mid (p_{i+1} - 1)(p_{i+1} + 1). \end{aligned}$$

Indexy pritom berieme cyklicky, teda $p_{n+1} = p_1$.

Teraz vieme využiť známu vlastnosť prvočísel, že ak prvočíslo delí súčin dvoch alebo viacerých činiteľov, tak musí deliť jedného z nich. Navyše platí (keďže naše čísla sú kladné), že deliteľ musí byť menší alebo rovný ako číslo, ktoré delí, teda $p_i \leq p_{i+1} - 1$, ak p_i delí prvú zátvorku alebo $p_i \leq p_{i+1} + 1$. Výhodnejšie však bude mať len jednu nerovnosť, a to $p_i \leq p_{i+1} + 1$, ktorá platí v každom prípade pre všetky i.

Vidíme, že oba činitele, z ktorých jeden p_i delí, sú pre nepárne prvočíslo p_{i+1} párne. Oplatí sa teda úlohu rozdeliť podľa toho, či nejaké p_i je rovné 2.

Majme postupnosť prvočísel spĺňajúcu vzťahy zo zadania a skúmajme, aký môže byť počet týchto prvočísel n. Predpokladajme najprv, že niektoré z prvočísel je rovné 2. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $p_n = 2$. Keďže podmienky sa nezmenia, ak indexy prvočísel posunieme do kruhu, môžeme ich posunúť tak, aby dvojka (alebo jedna z viacerých dvojok) skončila na indexe n.

Potom platí $p_{n-1} \mid 2^2 - 1 = 3$, teda jediná možnosť, ako môže vyzerať predchádzajúce prvočíslo, je $p_{n-1} = 3$. Pokračujme podobne ďalej, $p_{n-2} \mid 3^2 - 1 = 8$. Jediné prvočíslo, ktoré delí 8, je 2, takže $p_{n-2} = 2$. Opakuje sa nám

[2] Pekne očíslovaného vypáleným prirodzeným číslom n.

[3] Keď sa zaoberáme celými číslami a nie len prirodzenými, tak aj $0 \mid 0$, keďže $0 \cdot 1 = 0$.

situácia, v ktorej sme boli pre n. Keď budeme tento postup opakovať, bude nám opakovane vychádzať, že jediná možnosť je, že postupnosť má tvar $2, 3, 2, 3, 2, 3, \dots$.

Časom sa však potrebujeme dostať opäť k p_n, ktoré je ale rovné 2. S párnym počtom prvočísel to funguje. Môžeme zobrať $p_1 = p_3 = \dots = p_{n-1} = 3$ a $p_2 = p_4 = \dots = p_n = 2$. Tieto prvočísla skutočne vyhovujú zadaniu.

Ak by však n bolo nepárne, dostali by sme, že $p_n = p_{n-2} = \dots = p_1 = 2$, ale neplatí nám $p_n \mid p_1^2 - 1$, pretože $2 \nmid 3$. To znamená, že pri nepárnom počte prvočísel dvojku nemáme.

Pre všetky i platí $p_i \mid p_{i+1} - 1$ alebo $p_i \mid p_{i+1} + 1$. Zároveň všetky p_i sú nepárne, a teda $p_{i+1} - 1$ aj $p_{i+1} + 1$ sú párne. Ak nepárne p_i delí niektorý z týchto výrazov, delí aj jeho polovicu. Ako sme už naznačili v úvode, p_i musí byť menšie alebo rovné ako to, čo delí, teda ako $\frac{p_{i+1}-1}{2}$ alebo ako $\frac{p_{i+1}+1}{2}$, v oboch prípadoch ale platí

$$p_i \leq \frac{p_{i+1} + 1}{2}.$$

Pre $p_{i+1} \geq 3$ (všetky nepárne prvočísla sú väčšie alebo rovné 3) nám platí, že $\frac{p_{i+1}+1}{2} < p_{i+1}$, čo ľahko overíme roznásobením. Máme teda $p_i \leq \frac{p_{i+1}+1}{2} < p_{i+1}$. Napísaním všetkých takýchto nerovností za seba dostaneme

$$p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n < p_1,$$

pretože podmienky platia cyklicky. Toto očividne nemôže nastať, pretože z toho vyplýva, že $p_1 < p_1$.

Aj keď sa to možno nezdá, táto argumentácia funguje aj pre $n = 1$, pretože p_1 delí $p_1 - 1$ alebo $p_1 + 1$ a z nepárnosti platí, že $p_1 \leq \frac{p_1+1}{2} < p_1$, čo je rovnako ako vyššie spor.

Hľadané čísla n sú teda všetky kladné párne čísla.

1.7 Kasíno, Moc a Slama

opravoval **Žaneta**

Zadanie. *Keď Sgt. Peppera nebavilo riešiť problémy iných, tak si vyrazil do lokálneho kasína ošklbať niekoho o peniaze. Toho dňa, kedy našiel stratený dobytok statkára Ritza, bola v ponuke takáto hra:*

Na stole máme karty s hodnotami od 1 po 13 v nejakom poradí. Postupne ťaháme karty z balíčka a ukladáme na kôpky. Kôpky musia byť rastúce (novú kartu môžeme položiť len na kartu s menším číslom) a kartu ukladáme vždy na kôpku s najvyšším možným číslom, lícom nahor. Ak taká kôpka neexistuje, vytvoríme novú. Keď vyložíme všetky karty, dáme kôpky na seba (postupne od najnovšej na spodku po najstaršiu na vrchu), otočíme (čím získame opäť balíček kariet, ktoré sú lícom nadol) a hráme znovu.

Kasíno vehementne hlásilo, že dá 100$ tomu, komu sa podarí nájsť také poradie kariet, ktoré sa týmto spôsobom usporiadať nedajú. Dokážte, že také poradie neexistuje a karty sa po niekoľkých opakovaniach vždy usporiadajú.

Riešenie

Proces ťahania a ukladania kariet a zbierania nazveme kolom. Nech v balíčku je n kariet, úlohu dokážeme pre ľubovoľné n. Možno si všimnúť nasledovný invariant[4] vzhľadom na počet kôl: Predpokladajme, že máme na stole

[4]Vlastnosť ktorá sa nemení, zostáva rovnaká.

v nejakom momente počas ťahania a ukladania kariet aspoň 2 kôpky P, Q, nech čísla na vrchu týchto kôpok sú p, q. Nech platí, že kôpka P sa objavila na stole skôr ako Q. Potom platí $p > q$. Toto teraz dokážeme.

- Najprv potrebujeme dokázať, že to platí v momente, keď sa na stole prvýkrát spolu objavia dané 2 kôpky P, Q. Majme teda kôpku P s číslom p navrchu a práve nám vznikla kôpka Q s číslom q. Z balíčka sme vytiahli kartu s číslom q. Zrejme nemôže platiť $p = q$. Keby platilo $p < q$, kartu s číslom q by sme uložili na vrch kopy P. Preto musí platiť $p > q$.
- Teraz dokážeme, že ak v istom momente invariant platí pre všetky dvojice kôpok, bude platiť aj keď vytiahneme kartu z balíčka a uložíme ju na príslušnú kôpku. Vezmime si opäť konkrétnu dvojicu kôpok P, Q s číslami p, q navrchu, pričom P sa objavila na stole skôr. Nech z balíčka vytiahneme kartu s číslom r. Ak túto kartu neuložíme ani na jednu z P, Q, invariant bude ďalej platiť. Ak kartu uložíme na kôpku Q, zrejme musí platiť $r < p$, ináč by sme porušili pravidlá zadania. Teda v tomto prípade invariant platí. Ak kartu uložíme na kôpku P, musí platiť $r > p$, a teda keďže platí $p > q$, vieme, že platí aj $r > q$.

Teda invariant platí vždy.

Indukciou vzhľadom na k dokážeme, že po k kolách sa budú nachádzať na k posledných miestach v balíčku karty s číslami

$$n, n-1, \ldots, n-k+1.$$

- Nech $k = 0$, vtedy tvrdenie nehovorí nič, a teda je pravdivé.
- Nech tvrdenie platí pre nejaké k.
- Z indukčného predpokladu, na začiatku $k+1$-ého kola sa na posledných k miestach v balíčku nachádzajú karty s číslami $n, n-1, \ldots, n-k+1$. Po ťahaní $n-k$ kariet z balíčka budú na stole karty $1, \ldots, n-k$. Karta s číslom $n-k$ musí byť podľa invariantu na najstaršej kôpke. Podľa pravidiel zo zadania ostatné karty z balíčka s číslami $n, \ldots, n-k+1$ uložíme práve na túto kôpku. Po zozbieraní všetkých kôpok sa tak karta s číslom $n-k$ dostane pred kartu s číslom $n-k+1$. Tvrdenie teda platí aj pre $k+1$.

Po opakovaní n kôl sa v balíčku budú nachádzať vzostupne usporiadané karty.

1.8 Komančská Maľba v Stene

opravoval **Pedro**

Zadanie. *„Ser Pepper!“ kričal zadychčaný muž texaským dialektom, „Komančovia sa vrátili! V noci*[5] *do našich úrodných polí doniesli obrovskú stenu, a do nej vypálili znak. Musíte nám pomôcť.“ Sgt. Pepper neváhal. Povedal jeho povestné „Idem, riešim,“ nasadol na koňa a vybral sa za kovbojom. Až dorazili na miesto činu a prisvietili si svojimi fakľami, odkryl sa im takýto obraz:*

Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník, pre ktorý platí $|DA| < |AB| = |BC| < |CD|$. Body E a F sú postupne zvolené na stranách CD a AB tak, že priamky BE a AC sú na seba kolmé a priamky EF a BC sú rovnobežné. Dokážte, že $|FB| = |FD|$.

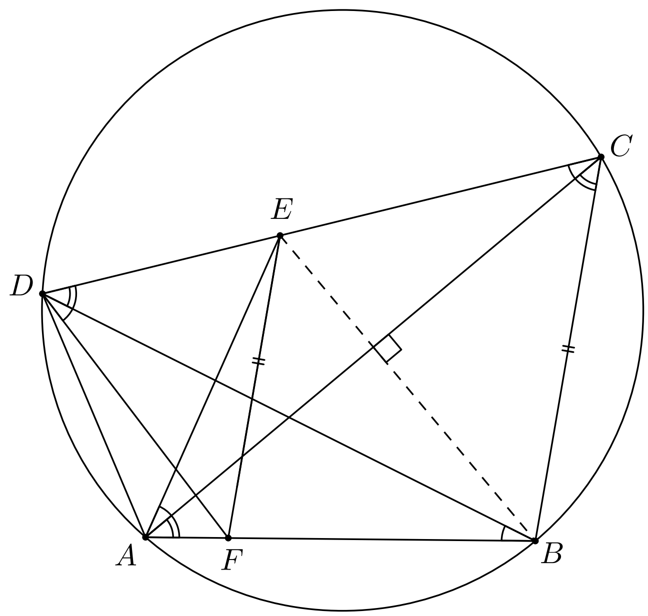
Riešenie

Napriek tomu, že úloha bola zaradená ako ôsma, jej riešenie si vyžaduje iba tie najzákladnejšie vedomosti a ich aplikácia je relatívne priamočiara. Dalo by sa povedať, že na vyriešenie tejto úlohy je potrebné „čisté uhlenie“.

[5] Čiže teraz, lebo teraz bola noc.

Ak ste túto úlohu nevyriešili, odporúčam vám venovať tomuto vzoráku plnú pozornosť a snažiť sa odniesť si čo najviac princípov.

Najpriamočiarejší spôsob, ako ukázať, že dĺžky dvoch úsečiek stretávajúcich sa v jednom bode sú rovnaké, je jednoducho ukázať, že trojuholník vytvorený týmito dvomi úsečkami je rovnoramenný. Naším cieľom je ukázať rovnoramennosť trojuholníka BDF. Najjednoduchšie sa to dá tak, že ukážeme rovnosť $|\sphericalangle BDF| = |\sphericalangle DBF|$. Uhol DBF je vďaka vete o obvodových uhloch rovný uhlu ACE. Priamo zo zadania tiež máme rovnosť uhlov BAC a BCA a opäť, použitím vety o obvodových uhloch tiež BDC.



Teraz už budeme musieť trochu pohútať. Šikovné geometrické oko si hneď všimne, že nakoľko strana EF je rovnobežná so stranou BC, musí byť štvoruholník $AFED$ tetivový. To vidno napríklad tak, že uhol FED je rovnako veľký ako BCD (z rovnobežnosti), a teda je rovný $180° - |\sphericalangle FAD|$, z čoho už tetivovosť, podľa známeho a dôležitého tvrdenia o protiľahlých uhloch v tetivovom štvoruholníku, vyplýva.

To nás motivuje dokresliť aj stranu AE, aby sme mohli plne využívať obvodové uhly aj v štvoruholníku $AFED$. Teraz vieme preniesť náš dôležitý uhol FDB na uhol CAE. Toto nevyplýva priamo použitím obvodových uhlov, ale až dopočítaním z rovnosti uhlov FDE a FAE po odpočítaní identických uhlov BAC a BDC.

Vidíme, že ak majú byť rovnaké uhly FDB a FBD, potom sme práve vyuhlili, že aj uhly CAE a ACE by boli rovnaké (a naopak, z rovnakosti týchto dvoch uhlov spätne vyplýva aj rovnakosť našich pôvodných). Teda trojuholník ACE musí byť rovnoramenný. Teda E musí ležať na osi strany AC. Ale keďže priamka BE bola definovaná ako kolmica z B na AC a ABC je rovnoramenný trojuholník, BE musí byť os strany AC.

1.9 Kapitán Mocný Syseľ

opravoval **Juro B.**

Zadanie. „*Buď pozdravený, muž zákona!*“ *vyšlo z úst náčelníka Komančov Mocného Sysľa počas toho, ako Sgt. Peppera obkľúčili ale dva tucty Indiánov. „Ďakujem Ti, že si reagoval na našu výzvu v poli a prišiel sem. Pokrvný brat musí pokrvnému bratovi pomôcť. Naša jednotka včera znovu zajala 47 zlatokopov a moji náčelníci si potrebujú roz-*

deliť ich skalpy. Ale o to nejde. To už vedia. To si nám už včera vysvetlil. Iné potrebujeme. Vyriešiť takúto úlohu by sa hodilo. Že načo nám to je? Hááá, do toho ťa nič nie je!“

Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, pre ktoré platí $abc \geq 1$. Dokážte, že

$$a^4 + b^3 + c^2 \geq a^3 + b^2 + c.$$

Riešenie

Brute-force AG riešenie spočíva v použití váženej AG nerovnosti, t.j. ak platí pre kladné $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, tak pre všetky *kladné* reálne čísla $x_1 \ldots x_n$ platí

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \geq x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}.$$

Ak ste sa s AG nerovnosťou v takejto forme nestretli, checknite napr TU.

Skúsime teda použiť takúto nerovnosť pre $x_1 = a^4, x_2 = b^3, x_3 = c^2$. Keďže $\lambda_i < 1$, tak budeme potrebovať viac nerovností, ktoré potom sčítame, aby na ľavej strane vyšlo $a^4 + b^3 + c^2$ (a dáva zmysel že budú tri). Treba iba trochu skúšať a hrať sa zo zlomkami, aby vyšlo napríklad toto:

$$\frac{21}{26}a^4 + \frac{2}{26}b^3 + \frac{3}{26}c^2 \geq a^{\frac{84}{26}} b^{\frac{6}{26}} c^{\frac{6}{26}} = (abc)^{\frac{6}{26}} a^3 \geq a^3$$

$$\frac{2}{26}a^4 + \frac{20}{26}b^3 + \frac{4}{26}c^2 \geq a^{\frac{8}{26}} b^{\frac{60}{26}} c^{\frac{8}{26}} = (abc)^{\frac{8}{26}} b^2 \geq b^2$$

$$\frac{3}{26}a^4 + \frac{4}{26}b^3 + \frac{19}{26}c^2 \geq a^{\frac{12}{26}} b^{\frac{12}{26}} c^{\frac{38}{26}} = (abc)^{\frac{12}{26}} c^1 \geq c^1.$$

Sčítaním všetkých nerovností získame požadovanú nerovnosť.

Trikové riešenie spočíva vo všimnutí si nasledovných nerovností:

$$c^2 - c \geq c - 1$$

$$b^3 - b^2 \geq b - 1$$

$$a^4 - a^3 \geq a - 1.$$

Tie platia, pretože $a^4 - a^3 - a + 1 = (a^3 - 1)(a - 1) = (a - 1)^2(a^2 + a + 1)$, čo je zjavne nezáporné (rovnako pre b, c). Ich sčítaním a použitím klasického AG získame, čo chceme:

$$a^4 + b^3 + c^2 - a^3 - b^2 - c \geq a + b + c - 3 \geq 3\sqrt[3]{abc} - 3 \geq 3\sqrt[3]{1} - 3 = 0.$$

1.10 Kúzlo Mága Šuma

opravoval **Tomáš S.**

Zadanie. *Keď prišiel Sheriff Sgt. Pepper spolu s Mocným Sysľom do indiánskej osady, zbadal komančského šamana, známeho Bieleho Šuma, ako so svojím šarmantným Bizónom predvádza kúzlo. Na začiatku Biely Šum odíde z javiska. Bizón uloží na stôl do radu $k \geq 2$ identických kariet, bielych z oboch strán. Následne Bizón zavolá dobrovoľníka z publika a požiada ho, aby na každú kartu napísal číslo od 1 do 2021 vrátane. Čísla sa môžu aj opakovať. Bizón potom všetky karty otočí číslom nadol až na jednu kartu, ktorú ponechá číslom nahor. Poradie kariet meniť nesmie. Potom sa vráti na scénu šaman Biely Šum a pozrie sa na karty na stole. Následne ukáže na jednu kartu a povie číslo, ktoré sa nachádza na jej spodnej strane. Nakoniec kartu víťazoslávne otočí a zožne obrovský potlesk, keďže sa to číslo na karte naozaj nachádza.*

Určte najmenšie celé číslo $k \geq 2$, pre ktoré si šaman Biely Šum vie so svojím Bizónom dohodnúť stratégiu, ktorá im zaručí úspešný priebeh kúzla.

Riešenie

Najskôr si ujasníme, čo od nás vlastne chce zadanie a zavedieme si pár pojmov na jednoduchší popis. Počiatočná konfigurácia kariet je určená tým, aké číslo je na každej karte. Spolu máme 2021 možností pre každú z k kariet, teda 2021^k konfigurácií. Biely Šum uvidí karty po tom, čo Bizón nechal otočenú len jednu z nich. Takúto situáciu budeme volať náhľad (a, x), keď jediná viditeľná karta je na pozícii a a má číslo x. Šum si v takejto situácii musí byť istý, aké číslo má nejaká iná karta. Ak by si bol istý viacerými inými kartami, môže si dopredu vrámci stratégie určiť pre každý náhľad len jednu takúto kartu, ktorú víťazoslávne otočí. Takže Šum sa riadi pravidlami $(a, x) \to (b, y)$, čo znamená, že pri náhľade (a, x) otočí kartu na pozícii b a tá má číslo y. Z vyššie uvedeného vyplýva, že pre každý náhľad máme len jedno pravidlo. Súbor všetkých týchto pravidiel budeme volať stratégia. Stratégia je úspešná, keď pre každú konfiguráciu dokáže Bizón pripraviť taký náhľad, aby Šumovo pravidlo fungovalo, to znamená, že každá konfigurácia obsahuje dvojicu kariet $(a, x), (b, y)$ takú, že $(a, x) \to (b, y)$ je pravidlo z našej stratégie.

Rozdeľme si konfigurácie do skupín podľa toho, ktoré pravidlo v každej z nich môžeme použiť. Pre každý náhľad máme jedno pravidlo a počet možných náhľadov je $2021k$, takže najviac $2021k$ pravidiel, a teda aj toľko skupín. Koľko je konfigurácií v jednej skupine, ktorá je daná pravidlom $(a, x) \to (b, y)$? Na pozícii a musí byť číslo x a na pozícii b číslo y. Na ostatných $k-2$ pozíciách môže byť ľubovoľné číslo, čo dáva 2021^{k-2} možností. Vo všetkých skupinách spolu máme najviac $2021k \cdot 2021^{k-2}$ konfigurácií, ale aby bola stratégia úspešná, každá konfigurácia musí byť v niektorej skupine, takže

$$2021k \cdot 2021^{k-2} \geq 2021^k, \qquad (1)$$

$$k \geq 2021.$$

Dostali sme, že $k \geq 2021$, takže pre menšie k nemôže existovať úspešná stratégia. Po chvíľke skúšania a hrania sa objavíme, že pre $k \geq 2022$ existuje pekná jednoduchá stratégia. Bizón si len pozrie číslo 2022. karty, ktoré bude chcieť prezradiť Šumovi. Následne ho zakóduje pomocou prvých 2021 kariet, a to tak, že nechá otočenú toľkú kartu, aké číslo je na 2022. karte. V reči pravidiel nám stačia pravidlá $(a, *) \to (2022, a)$, pre každú pozíciu a, pričom $*$ môže byť hocijaké číslo. Šum uhádne, že na 2022. karte je číslo a.

Prípad $k = 2021$ vyzerá ťažšie. V dokázanej nerovnosti (1) by musela nastať rovnosť. V takomto prípade sa oplatí uvažovať aké podmienky a obmedzenia by musela spĺňať naša stratégia, aby mohla nastať rovnosť. Pri takomto postupe buď zistíme, že všetky obmedzenia sa nedajú splniť a prídeme k sporu, alebo nám obmedzenia povedia ako bude vyzerať výsledná stratégia.

Rovnosť v (1) nastane len vtedy, keď každá konfigurácia bude v niektorej skupine, a keď sme každú konfiguráciu započítali len raz, teda každá konfigurácia musí byť v práve jednej skupine. Ešte raz to isté v zelenom, žiadna konfigurácia nie je v dvoch skupinách, teda na žiadnu konfiguráciu sa nedajú použiť dve pravidlá.

V prvom rade si uvedomme, že v pravidle $(a,x) \to (b,y)$ sú pozície a, b rôzne, lebo Šum nemôže otočiť kartu, ktorá už je otočená. Urobíme zopár pozorovaní.

a) Nemôžeme mať dve pravidlá $(a,x) \to (b,y)$ a $(c,z) \to (d,w)$, kde všetky pozície a,b,c,d sú navzájom rôzne. Ak by sme mali, tak existuje konfigurácia, ktorá obsahuje na všetkých štyroch pozíciách príslušné karty $(a,x),(b,y),(c,z),(d,w)$ a spĺňa obe pravidlá.

b) Nemôžeme mať pravidlá $(a,x) \to (b,y)$ a $(b,y) \to (c,z)$, kde pozície a, c sú rôzne. V opačnom prípade máme konfiguráciu s kartami $(a,x),(b,y),(c,z)$ spĺňajúcu obe pravidlá.

c) Nemôžeme mať pravidlá $(a,x) \to (c,z)$ a $(b,y) \to (c,z)$, kde pozície a, b sú rôzne. Zdôvodnenie je rovnaké ako v predchádzajúcom bode.

d) Nemôžeme mať pravidlá $(a,x) \to (b,y)$ a $(b,y) \to (a,x)$. Znovu existuje konfigurácia, ktorá spĺňa obe pravidlá.

Aby nastala v (1) rovnosť, pre každý možný vstup (a,x) musíme mať nejaké pravidlo. BUNV [6] predpokladajme, že pre vstup $(1,1)$ máme pravidlo $P = (1,1) \to (2,1)$. Podľa $a)$ musí pravidlo pre každý vstup $(a,*), a \geq 3$ ukazovať na pozíciu 1 alebo 2, aby sme nemali 4 rôzne pozície. Povedzme nech to je pre vstup $(3,1)$ pozícia 1, máme pravidlo $Q = (3,1) \to (1,*)$. Teraz pre ľubovoľný vstup $(a,*), a \geq 4$ musí mať výstup pozíciu 1 alebo 2 kvôli P a zároveň pozíciu 1 alebo 3 kvôli Q, takže jedine pozíciu 1.

Pozrime sa, ktoré pravidlá môžu mať výstup $(1,x)$ pre každé x od 1 do 2021. Podľa $c)$ musia mať všetky takéto pravidlá rovnakú pozíciu na vstupe. Povieme, že táto pozícia na vstupe zaberá číslo x na výstupe. Uvažujeme pozície na vstupe od 4 do 2021, ktorých je 2018, aby pozícia na výstupe bola určite 1. Niektorá pozícia p zaberá najviac 1 výstup $(1,y)$, lebo pozícií je 2018 a výstupov najviac 2021. To znamená, že pre každý vstup $(p,*)$ máme pravidlo $(p,*) \to (1,y)$.

Nech pre vstup $(1,y)$ máme pravidlo $(1,y) \to (b,z)$. Podľa $b)$ platí $b = p$. Teraz máme dve pravidlá

$$(1,y) \to (p,z),$$

$$(p,z) \to (1,y),$$

čo je spor s $d)$. Takže pre $k = 2021$ neexistuje úspešná stratégia. Najmenšie vyhovujúce k je 2022.

[6] Bez ujmy na všeobecnosti