Riešenia 2. kola letnej časti

2.1 Konkretizátor Matrodej Skresáva ($\kappa \leq 1$)

opravovala **Kaja**

Zadanie. *Bolo štvrtého januára, keď sme dorazili ku Bránam Abstrakcie. Teda, buď bolo štvrtého januára, alebo štyritisíceho dodekatóbra, keďže náš kalendár podľahol Abstrakcii ako prvý, a okrem toho sa ani nedalo hovoriť o Bránach – skôr o Nenápadných Dvierkach V Stene Za Ohybom Rieky, Ledva Vysokých Pre Urasteného Školáka. Ani sme sa nenamáhali rozložiť stany, keďže sme vedeli, čo sa s niečím tak zložitým stane po vystavení Abstrakcii, a rovno sme sa pokúsili Dvere otvoriť. Na to potreboval Matrodej Lambzduch uplatniť svoj Konkretizátor, žiaľ, prístroj mu pred očami začal obrastať dokonalými geometrickými útvarmi a Lambzduch musel narýchlo zisťovať, kde končí Konkretizátor a kde začína akési euklidovské čudo.*

V lichobežníku $ABCD$, kde $AB \parallel CD$, platí $|AB| = 2 \cdot |CD|$. Označme K, L postupne stredy strán BC, CD. Vypočítajte obsah trojuholníka AKL, ak obsah $ABCD$ je 12.

Riešenie

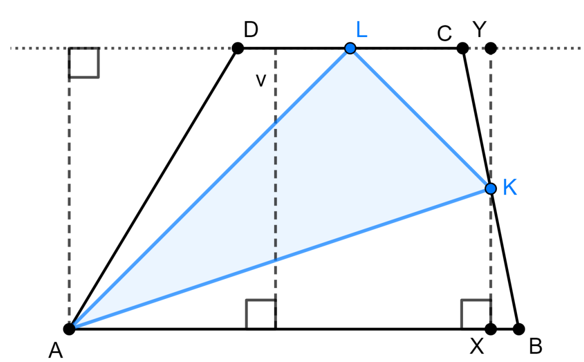
Obsah lichobežníka vieme vypočítať ako

$$\frac{(|AB| + |CD|) \cdot v}{2},$$

kde v je jeho výška. Zo zadania vieme, že $|AB| = 2|CD|$, a že obsah $ABCD$ je 12. Preto musí platiť:

$$\frac{(3|CD|) \cdot v}{2} = 12,$$

teda $|\mathbf{CD}| \cdot \mathbf{v} = \mathbf{8}$.



O obsahu samotného trojuholníka AKL toho zatiaľ nevieme veľa povedať, ale môžeme sa skúsiť pozrieť na trojuholníky LDA, ABK a KCL.

Obsah trojuholníka LDA je $\frac{|LD|\cdot v}{2}$, keďže výška tohto trojuholníka na stranu LD je tiež výškou lichobežníka $ABCD$, a teda jej dĺžka je v. Keďže bod L leží v strede strany CD, tak platí, že $|LD| = \frac{|CD|}{2}$, preto obsah trojuholníka LDA je

$$\frac{\frac{|CD|}{2}\cdot v}{2}.$$

Keďže už vieme, že $|CD|\cdot v = 8$, tak potom

$$\frac{\frac{|CD|}{2}\cdot v}{2} = \frac{8}{4} = 2,$$

teda **obsah trojuholníka LDA je 2**.

Keď si zoberieme pomocnú úsečku XY, ktorá tvorí výšku lichobežníka $ABCD$ a prechádza bodom K, tak zároveň úsečka XK tvorí výšku trojuholníka ABK na stranu AB a úsečka YK tvorí výšku trojuholníka KCL na stranu CL. Ukážeme si, že obe tieto úsečky majú dĺžku $\frac{v}{2}$.

Keďže XY je výškou lichobežníka $ABCD$, tak $|XY| = v$. Platí aj, že $|\sphericalangle BXK| = |\sphericalangle CYK|$ (pravé uhly), $|\sphericalangle BKX| = |\sphericalangle CKY|$ (vrcholové uhly), a teda aj $|\sphericalangle XBK| = |\sphericalangle YCK|$. Okrem tohto ešte vieme, že bod K leží v strede strany BC, teda $|BK| = |CK|$. Preto sú trojuholníky BXK a CYK zhodné, a teda $|XK| = |YK| = \frac{v}{2}$. S týmito informáciami už jednoducho dopočítame aj obsahy trojuholníkov ABK a KCL.

Obsah trojuholníka ABK môžeme vypočítať ako

$$\frac{|AB|\cdot|XK|}{2} = \frac{2|CD|\cdot\frac{v}{2}}{2} = \frac{|CD|\cdot v}{2} = \mathbf{4},$$

keďže $|CD|\cdot v = 8$.

Vieme, že bod L leží v strede strany CD, teda $|CL| = \frac{|CD|}{2}$, preto **obsah trojuholníka KCL** zas môžeme vypočítať ako

$$\frac{|CL|\cdot|YK|}{2} = \frac{\frac{|CD|}{2}\cdot\frac{v}{2}}{2} = \frac{|CD|\cdot v}{8} = \mathbf{1},$$

keďže $|CD|\cdot v = 8$.

Keď už poznáme obsahy trojuholníkov LDA, ABK a KCL, tak obsah trojuholníka AKL ľahko dopočítame, ak od obsahu celého lichobežníka odpočítame obsahy týchto troch trojuholníkov, teda **obsah trojuholníka AKL je 12 − 2 − 4 − 1 = 5**.

2.2 Krutitruľa Morí Smäd ($\kappa \leq 2$)

opravovali **Miro** a **Tomáš G.**

Zadanie. *Po skonkretizovaní sa dvere otvorili a my sme vstúpili dnu. Žiaľ, neviem slovami opísať kráľovstvo Abstrakcie. Bolo veľké, asi, a celé akoby dokrkvané. To nehovorím o ošúchaných stenách, ale o zakrivenom časopriestore. Počet rozmerov sa nedal vyjadriť číslom, ale iba písmenkom. Pred očami nám tancovali obory hodnôt rôznych funkcií a multidimenzionálne dvanásťsteny. Vydali sme sa pokrútenou cestičkou a snažili sme sa vnímať toho čo najmenej, aby nám nevybuchli mozgy. Žiaľ, Abstrakcia začala pôsobiť aj na nás. Keď Krutitruľo vytiahol krabičky džúsu, zhrozene zakrútil ušami. Počet krabičiek sa stal arbitrárnym, a aby sme neumreli od smädu, museli sme ho rýchlo skonkretizovať na niečo rozumné. Konkretizovanie je však ošemetná záležitosť aj s potrebným vybavením, keďže nikdy neviete, aká podmienka alebo pravidlo na vás vyskočí.*

Krutitruľo mal nejaké prirodzené číslo a. Nepáčilo sa mu, tak v ňom poprehadzoval cifry, čím vzniklo číslo b. Rozdiel $a - b = 111\ldots1$ *pozostáva iba z cifier* 1. *Koľko najmenej jednotiek môže číslo a obsahovať?*

Riešenie

Na začiatok, by som zdôraznil, že k správnemu výsledku sa dá dostať veľa spôsobmi. V tomto vzorovom riešení popíšem jednu z podľa môjho názoru intuitívnych ciest na to, ako sa vieme k výsledku dopracovať.

Ako vo väčšine príkladov, tak aj tu sa oplatí začať skúšaním. Po vyskúšaní pár dvojíc a, b zistíme, že nie je ľahké ich zostrojiť tak, aby obsahovali rovnaké cifry a ich rozdiel pozostával iba z jednotiek. Poďme sa preto pozrieť na spôsob ako vznikajú jednotky pri odčítavaní. Najjednoduchší spôsob ako vznikajú je, keď cifra v čísle a je o jeden väčšia ako cifra v čísle b. Druhý spôsob je, keď cifra v čísle a je 0 a cifra v čísle b je 9. Tento prípad je špeciálny, lebo pri odčítavaní pod seba sa nám prenáša zvyšok 1. To znamená, že tam bude dvojica čísel, ktorých rozdiel je 2 namiesto štandardných 1. Môže sa stať aj to, že sa prenáša zvyšok 1 aj dvakrát po sebe, ale to je zbytočne komplikované. Keďže to nie je potrebné k vyriešeniu tejto úlohy, tak sa nad tým nebudeme zamýšľať. V praxi by sme sa nad tým zamysleli až potom, čo by nám nestačilo prenášať cez desiatku jedenkrát.

Dobre, našli sme dva spôsoby, podľa ktorých vieme dostať cifru 1 v rozdiele. Poďme teda vyskúšať zostrojiť čísla a, b. Vyskúšajme ich zostrojiť tak, aby sme nemuseli ani raz pri ich odčítavaní prenášať zvyšok 1. V tom prípade, keď je v čísle a cifra k, tak v čísle b bude na tom istom mieste cifra $k - 1$. Tým pádom bude musieť byť cifra $k - 1$ v čísle a, keďže čísla a, b obsahujú rovnaké cifry. Následne, kvôli tomu, že v čísle a je cifra $k - 1$, tak v čísle b bude cifra $k - 2$. Takýmto spôsobom sa dostaneme k tomu, že v čísle a bude cifra 0, v čísle b by nám vychádzala cifra -1 čo je samozrejme blbosť. Tým pádom bude na danom mieste cifra 9 a budeme musieť prenášať zvyšok 1.

Zistili sme, že musíme prenášať zvyšok 1 cez desiatku, tak tým pádom vieme, že v čísle a bude cifra 0. Pre jednoduchosť si povedzme, že číslo a sa končí na cifru 0 a číslo b sa tým pádom končí na cifru 9. Keďže cifra 0 je v čísle a, tak bude aj v čísle b. Vyskúšajme preto pokračovať v zostrojovaní čísel a, b tak, že a končí na 20, b končí na 09. Týmto sme docielili aj to, že sme preskočili cifru 1 – za normálnych okolností by cifra 1 v čísle a bola spárovaná s cifrou 0 v čísle b. Keďže našou úlohou je zminimalizovať počet jednotiek, tak sa nám to veľmi hodí. Dobre, poďme pokračovať v zostrojovaní našich čísel. Vieme, že cifra 2 je v čísle a, takže preto bude aj v čísle b. Takže dostaneme dvojicu čísel a, b, končiacich na 320 a 209. Rovnakým spôsobom pridáme cifru 3 na miesto tisícok do čísla b, tým pádom cifru 4 do čísla a. Pokračovaním v tomto spôsobe dostaneme $a = 987654320$, $b = 876543209$ a zistíme, že naše riešenie je vyhovujúce, vďaka tomu, že posledná pridaná cifra 9 do čísla a sa už nachádza v čísle b.

Poslednou vecou, ktorú je všeobecne veľmi dôležité spomenúť je dôkaz správnosti nášho riešenia. Našli sme čísla a, b vyhovujúce zadaniu, bez použitia cifry 1. Môžme si byť preto istý, že cifra 1 sa v čísle a nemusí nachádzať. Odpoveďou na otázku v zadaní teda je, že číslo a môže obsahovať najmenej 0 jednotiek.

Poznámka k opravovaniu a riešeniam: riešenia sme najskôr opravili podľa nevhodnej bodovacej schémy – ospravedlňujeme sa vám za to a ďakujeme Uršuli za jej rýchlu reklamáciu poukazujúcu na tento problém. Ku riešeniu na plný počet bodov bolo dostačujúce napísať čísla a, b vyhovujúce zadaniu a zdôvodniť správnosť riešenia – nejako povedať že počet jednotiek v čísle a je nula a teda najmenší možný. Vo viacerých riešeniach ste aj popísali postup ako ste sa k tým číslam dostali. V prípade, že by vaše riešenie bolo zlé, tak vďaka tomu, že ste napísali aj o vašich myšlienkach by ste mohli dostať čiastočné body. Obyčajné riešenie teda nemusí byť takto dlhé a v prípade tohto príkladu je stručné riešenie na pár riadkov dostačujúce.

2.3 Kráľ Mastí Scestovaného ($\kappa \le 3$)

opravovali **Jožo** a **Anežka**

Zadanie. *Napili sme sa a opäť vyrazili na cestu. Po čase t sa však Jubilár Bangle začal sťažovať, že vraj mu Matrodej šliape na päty, tak sme dali Jubilára na posledné miesto v zástupe, nech nás nebrzdí. Po chvíli však opäť vrieskal, že mu niekto šliape na päty. Otočili sme sa a zhrozene sme sledovali, ako na Jubilára zaútočil hrozivý všeobecný trojuholník, kráľ dvojrozmerných planárnych útvarov. Zahnať ho môže iba rýchly dôkaz.*

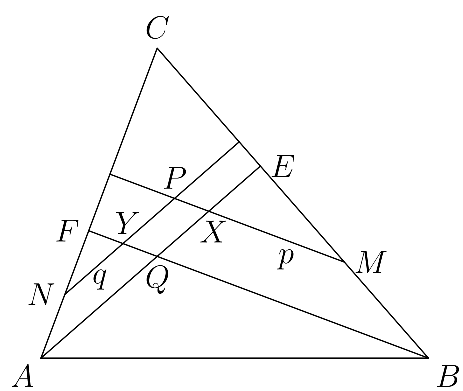
Máme ostrouhlý trojuholník ABC. Označme E, F postupne päty výšok na strany BC a AC. Nech M, N sú postupne stredy úsečiek BE, AF. Cez bod M vedieme priamku p kolmú na AC a cez N priamku q kolmú na BC. Priesečník p a q označíme P. Dokážte, že P je stredom úsečky EF.

Riešenie

Tento vzorák si môžete pozrieť aj vo videopodobe: `https://youtu.be/wO84uneceV4`

V úlohách, kde vystupujú stredy strán sa oplatí hľadať stredné priečky trojuholníkov. (Stredná priečka je úsečka spájajúca stredy dvoch strán trojuholníka a z podobnosti trojuholníkov platí, že je rovnobežná s treťou stranou.) To spravíme aj v tomto riešení. Označme si priesečník výšok AE a BF ako Q, priesečník priamok p a QE ako X a priesečník priamok q a FQ ako Y.

Priamka p je rovnobežná s úsečkou BQ, lebo obe sú kolmé na stranu AC. Navyše priamka p prechádza stredom úsečky BE. Preto MX je stredná priečka trojuholníka BEQ, a tak bod X je v strede úsečky QE. Z rovnakého dôvodu je NY strednou priečkou trojuholníka AFQ a bod Y je stredom úsečky QF. V trojuholníku QEF tiež priamka p prechádza stredom strany QE a je rovnobežná so stranou FQ. Takže priamka p tvorí tiež strednú priečku v trojuholníku QEF a z rovnakého dôvodu aj priamka q. O stredných priečkach vieme, že sa pretínajú v strede tretej strany EF. A keďže priesečník priamok p a q je práve bod P, tak bod P musí byť stredom strany EF. Tým sme ukázali, čo sme mali.



Iné riešenie

Ukážeme si ešte riešenie, ktoré nevyužíva stredné priečky. Obzvlášť, keď máme zadané stredy strán, tak nám vedia pomôcť zhodné, príp. podobné trojuholníky. Preto budeme také hľadať.

Na začiatok ukážeme, že bod X je stredom úsečky QE. Trojuholníky EXM a EQB sú vďaka rovnobežnosti p a QB podobné podľa vety *uu*. Ich koeficient podobnosti je $|EM|/|EB| = 1/2$, preto $|EX| = |EQ|/2$. Z rovnakého dôvodu je aj Y stred FQ.

Z toho, že $p \parallel FB$ a $q \parallel AE$, dostávame vďaka súhlasným uhlom $|\sphericalangle FYP| = |\sphericalangle YQX| = |\sphericalangle PXE|$. Ďalej máme aj to, že $XPYQ$ je rovnobežník. Z toho dostávame $|PX| = |YQ| = |FY|$ a $|YP| = |QX| = |XE|$. Preto sú trojuholníky FYP a PXE zhodné podľa vety *sus*. Tým sme dokázali, že $|FP| = |PE|$. Pozor, ešte nie sme hotoví. Zatiaľ vieme len, že bod P je na osi úsečky EF.

Ešte musíme ukázať, že bod P leží na úsečke EF. Najjednoduchším spôsobom je ukázať, že $|\sphericalangle FPE| = 180°$. Vieme, že $|\sphericalangle YPX| = |\sphericalangle PYF|$ (striedavé uhly) a $|\sphericalangle XPE| = |\sphericalangle YFP|$ (zhodnosť trojuholníkov). Preto dostávame

$$|\sphericalangle FPE| = |\sphericalangle FPY| + |\sphericalangle YPX| + |\sphericalangle XPE| = |\sphericalangle FPY| + |\sphericalangle PYF| + |\sphericalangle YFP| = 180°,$$

čím je náš dôkaz hotový.

Častá chyba pri riešení

Pri riešení takýchto typov úloh sa dá ľahko spraviť závažná chyba. Táto chyba sa vie zrodiť už hneď pri nakreslení obrázka. Je prirodzené si do obrázku nakresliť priamky p, q a úsečku EF – veď o týchto útvaroch máme niečo ukazovať. Ak ich však nakreslíme do obrázku tak, že sa nám všetky pretnú v bode P, tak si koledujeme o chybu. Túto informáciu totiž v zadaní nemáme. O bode P vieme iba to, že je priesečníkom priamok p a q. Na úsečke EF, tak vôbec nemusí ležať. Samotný obrázok ešte nie je chybou, avšak ľahko nás môže k chybe naviesť. Napr. môžeme unáhlene tvrdiť, že trojuholníky MPE a BFE sú podobné podľa vety *uu*, lebo $|\sphericalangle EMP| = |\sphericalangle EBF|$ a $|\sphericalangle EPM| = |\sphericalangle EFB|$. O uhloch EPM a EFB však nevieme na začiatku riešenia povedať, že sú súhlasné, lebo P nemusí ležať na úsečke EF.

Ako správne pristupovať k takýmto úlohám

Ako si teda nakresliť obrázok správne? Obzvlášť v takých úlohách, kde máme ukazovať, že nejaký bod splýva s iným bodom alebo že tri útvary (priamky, kružnice, …) prechádzajú jedným bodom? Dobrým základom je nenakresliť do obrázku to, čo chceme dokazovať. Jeden spôsob je, že by sme si nakreslili bod P mimo úsečky EF a priamky p a q by nám preťali úsečky v dvoch rôznych bodoch, povedzme P_1 a P_2. V riešení by sme mohli napríklad ukázať, že bod P_1 musí ležať v strede úsečky EF (cez stredné priečky alebo cez podobné trojuholníky EP_1M a EFB). Podobne by sme aj o bode P_2 ukázali, že je v strede EF. Tým ukážeme, že oba body sú totožné a sú totožné aj s bodom P.

V našom riešení sme si do náčrtu nenakreslili úsečku EF a hľadali sme vlastnosti bodu P, resp. skôr priamok p, q, ktoré nám prezradia, že bod P bude musieť ležať na úsečke EF. Takýto postup môžeme použiť aj pri veľmi podobných úlohách, kde máme ukázať, že nejaké tri geometrické útvary prechádzajú jedným bodom: Zoberieme priesečník dvoch útvarov, pomenujeme si ho (napr. X) a ukážeme, že ním prechádza aj tretí útvar. Do obrázku si pritom zaznačíme len prvé dva útvary. Príp. ak chceme tretí, tak môžeme si ho dať mimo bod X, no netreba obrázok zahlcovať čiarami.

Správna voľba dvoch útvarov, ktorými definujeme priesečník X vie byť niekedy dôležitá. V niektorých úlohách nám vie výrazne uľahčiť riešenie. Na precvičenie tohto prístupu si môžete dokázať veľmi užitočné tvrdenie: *Dokážte, že v nie rovnoramennom trojuholníku ABC sa os strany AB a os uhla ACB pretínajú na opísanej kružnici.* Jej riešenie môžete nájsť na strane 30 Zbierky KMS.[1]

[1] Zbierku KMS nájdete na `https://kms.sk/zbierka/`.

2.4 Ktorého Moreplavca Splatiť? ($\kappa \leq 5$)

opravovali **Lucy** a **Mišo S.**

Zadanie. *Konečne (ale, ako povedal ešte vždy otrasený Jubilár, vraj neohraničene) sme dorazili na dno Doliny Algebry. Ňou tečie Červená rieka, ktorá nás určite dovedie do Srdca Abstrakcie! Aby sme si však ušetrili cestu, rozhodli sme sa najať si plť aj s pltiarom. Našťastie, pltiarstvo je zamestnanie každého prirodzeného čísla, nie všetky sú ale dôveryhodné. Krutitruľo si našťastie spomenul, podľa čoho spoznať toho najlepšieho pltiara.*

Nájdite najmenšie prirodzené číslo n také, že posledných 5 *cifier čísla* n^2 *je* 00001*. Číslo n nemôže začínať nulou.*

Riešenie

Kľúčovým krokom k riešeniu tejto úlohy bolo uvedomiť si, ako nejak viac matematicky uchopiť posledných 5 cifier nejakého čísla. Posledných 5 cifier čísla predstavuje jeho zvyšok po delení 10^5. Je to vidno napríklad vtedy, keď si vezmeme číslo $12345678 = 123 \cdot 10^5 + 45678$. Zvyšok po delení 10^5 je naozaj jeho 5 posledných cifier.

My teda hľadáme najmenšie číslo n, pre ktoré platí, že n^2 má zvyšok 1 po delení 10^5 (vedúce nuly teraz už písať nemusíme). Rozdiel čísla a jeho zvyšku (aj všeobecne rozdiel dvoch čísel s rovnakým zvyškom) je násobok čísla, ktorým delíme, teda v našom prípade $n^2 - 1$ musí byť násobok 10^5. Toto vieme zapísať aj v tvare $10^5 \mid n^2 - 1$. Tento zápis znamená, že 10^5 *delí* $n^2 - 1$.

S prvočíslami a ich mocninami sa pracuje o niečo lepšie, ako so zloženými číslami (ako 10^5), pretože o nich platia pekné vzťahy. Napríklad ak prvočíslo delí súčin $a \cdot b$, musí deliť aspoň jedného činiteľa (a alebo b), pretože sa nevie „rozdeliť" do oboch.

Ak je číslo deliteľné $10^5 = 5^5 \cdot 2^5$, tak je nutne deliteľné aj samotným 5^5. Výraz $n^2 - 1$ si vieme rozpísať na súčin podľa známeho vzorčeka ako $(n+1)(n-1)$. Teda musí platiť $5^5 \mid (n-1)(n+1)$. Číslo 5 nemôže deliť naraz obe zátvorky, keďže sa líšia o 2. Musí teda platiť $5^5 \mid n-1$ alebo $5^5 \mid n+1$. To nám už dáva celkom silnú podmienku pre n. Číslo 1 nevyhovuje – druhá mocnina nemá dosť cifier, takže ďalšími kandidátmi budú $5^5 - 1$, $5^5 + 1$, $2 \cdot 5^5 - 1$, $2 \cdot 5^5 + 1$, … Mohli by sme ich skúšať zaradom a onedlho by sme sa dostali k výsledku. Skúsme to však o niečo rýchlejšie.

Môžeme si všimnúť, že hľadané n je nepárne, pretože aj jeho druhá mocnina musí byť nepárna. Stačí teda skúmať tie čísla, v ktorých sa 5^5 násobí niečím párnym; po odpočítaní alebo pripočítaní jednotky dostaneme nepárne n. Keď si teraz vypíšeme niekoľko málo možností

$$
\begin{aligned}
2 \cdot 5^5 - 1 = 6249 &\longrightarrow 6249^2 = 39050001,\\
2 \cdot 5^5 + 1 = 6251 &\longrightarrow 6251^2 = 39075001,\\
4 \cdot 5^5 - 1 = 12499 &\longrightarrow 12499^2 = 156225001,\\
4 \cdot 5^5 + 1 = 12501 &\longrightarrow 12501^2 = 156275001,\\
6 \cdot 5^5 - 1 = 18749 &\longrightarrow 18749^2 = 351525001,\\
6 \cdot 5^5 + 1 = 18751 &\longrightarrow 18751^2 = 351600001,
\end{aligned}
$$

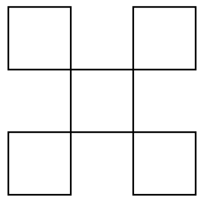
rýchlo nájdeme hľadané najmenšie $n = 6 \cdot 5^5 + 1 = 18751$, ktoré je riešením našej úlohy.

2.5 Kuše Ma Strelia! ($\kappa \leq 8$)

opravovali **Mišo M.** a **Juro R.**

Zadanie. *Plavba bola pohodlná a my sme rýchlo zaspali. Keď však z oblohy zostúpil Stefan-Boltzmannov zákon a namiesto neho sa tam vyhupli Fresnelove rovnice, Jubilár opatrne vstal a šplach! do vody. Preplával na breh Červenej rieky, kde ho čakal zástup Legendrových polynómov vyzbrojených kušami, a ukázal im prstom na našu bezbrannú plť. Polynómy sa zaškerili (teda asi, ja som práve spal, čiže som ich nevidel) a vypustili smrtiacu salvu šípov. Keďže však chcú šetriť muníciou, nakreslili si najskôr plánik toho úseku rieky a zamierili iba na také miesta, aby si boli isté, že našu plť trafia.*

Máme prázdnu tabuľku veľkosti 7×7 štvorčekov. Koľko najmenej políčok musíme vyfarbiť na čierno, aby v tabuľke nebolo 5 prázdnych políčok, ktoré tvoria diagonály štvorca 3×3 (ako na obrázku)?

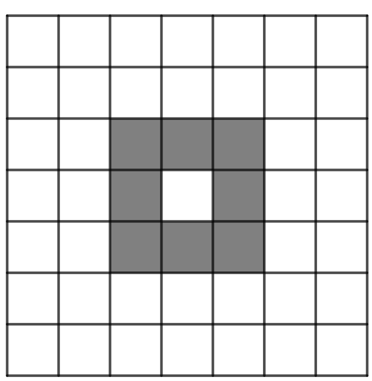


Riešenie

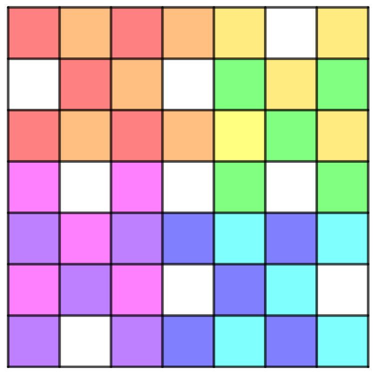
Pre ľahšie vysvetľovanie pomenujme útvar zo zadania ako krížik.

Na to, aby sme mohli povedať, že máme riešenie s najnižším počtom políčok, potrebujeme spraviť dve veci. Jednak sa musíme uistiť, že pre počet vyfarbených štvorčekov platí podmienka zo zadania, a dvak, že ak by sme mali štvorčekov menej, určite by sa dal v tabuľke nájsť biely krížik.

Prvá časť sa dá vyriešiť vcelku jednoducho. Budeme skúšať všakovaké zafarbenia políčok tabuľky 7×7, ktoré spĺňajú zadanie. Skvelá pomoc v tomto prípade je fakt, že krížik má šírku aj výšku 3 políčka. Rovnako tak zaberá všetky rohy štvorca 3×3. Vidíme teda, že sa nevlezie celý do dvoch krajných vrstiev políčok a bez ohľadu na to, ako ho umiestnime, určite bude zaberať aspoň jedno z prostredných 9 políčok. Po ich zafarbení tak máme istotu, že žiadna pätica prázdnych políčok nebude tvoriť krížik. Ľahko si všimneme, že dokonca nemusíme začierniť prostredné a stále bude táto podmienka platiť. Otázka teraz znie, či nestačí aj menej ako 8 políčok.



Jedna z vecí, ktorú si môžeme uvedomiť pri našom ofarbení, je fakt, že nevieme len tak prefarbiť políčko z čierneho na biele bez toho, aby vznikol biely krížik. Avšak rôznych ofarbení 8 políčok môže existovať viac a hľadať ich, aby sme otestovali všetky, môže byť dosť pracné. Lepšie pozorovanie je fakt, že ak nejaké dva krížiky nemajú spoločné políčko, zafarbením len 1 políčka zostane jeden krížik celý biely. Podobne, ak by sme mali viac krížikov, z ktorých žiadne dva nemajú spoločné políčko, museli by sme zafarbiť po jednom políčku z každého z nich. V našom prípade nám teda stačí v štvorci 7×7 nájsť 8 takých krížikov, že žiadna dvojica nemá spoločné políčko. Potom budeme vedieť, že menej ako 8 začiernených políčok nestačí. Príklad takýchto osem krížikov môžeme vidieť na obrázku.



Ukázali sme teda, že 8 štvorčekov nám stačí vyfarbiť, a rovnako aj, že menej ako 8 nestačí, takže máme správne riešenie.

2.6 Krepčíme Mihom Šípky

opravovali **Dvojka** a **Miloš**

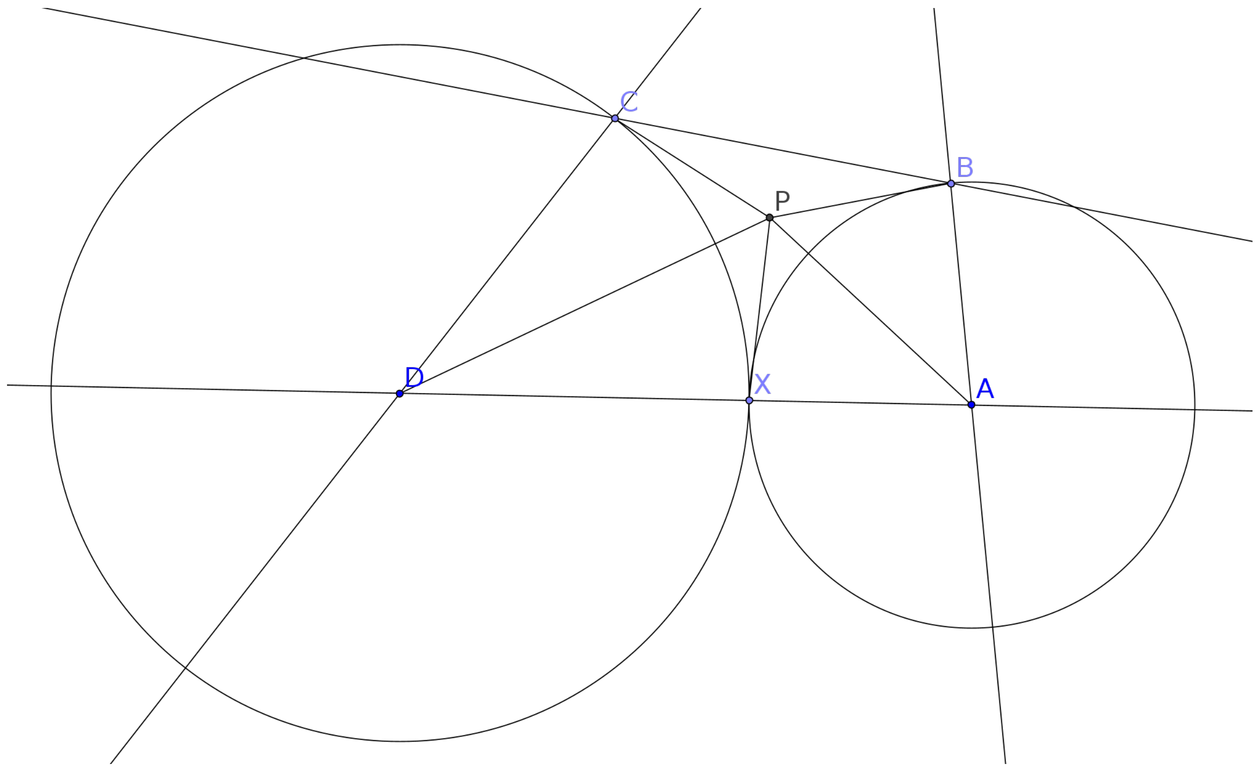
Zadanie. *„Jubilár, ty chrbtobodajúci chrchel!“ zareval som na breh, keď nás zobudila salva šípov. Žiaľ, jeden šíp sa počas letu zabstrahoval na Navier-Stokesove rovnice, ktoré pokrkvali bezbranného Matrodeja ako prázdnu plechovku od gumidžúsu a ešte s ním šmarili niekoľko kilometrov proti prúdu. Videl som, ako mu pri tom vypadol z vrecka Konkretizátor a padol do vody. Schmatol som Krutitruľa za rukáv a vrhol som sa do Červenej rieky, aby som Konkretizátor vylovil, no ako som padal, hladina rieky sa zákerne zabstrahovala na akýsi štvoruholník a ja som musel bleskovo uvažovať.*

V štvoruholníku ABCD platí $|AD| = |AB| + |CD|$. *Osi uhlov BAD a ADC sa pretínajú v bode P. Dokážte, že platí* $|BP| = |CP|$.

Riešenie

Tento vzorák si môžete pozrieť aj vo videopodobe: `https://youtu.be/tK8I4mn9CgI`

Najprv sa zamyslíme, čo nám hovorí vzťah o súčte $|AB| + |CD| = |AD|$, a ako si ho môžme vyjadriť geometricky. Jeden spôsob, ktorý sa hneď preukáže byť veľmi užitočný, je uvedomenie, že na stranu AD môžme umiestniť bod X tak, že $|XA| = |AB|, |XD| = |CD|$. Teraz je načase narysovať si osi uhlov BAD a ADC, nájsť bod P, a narysovať úsečky PC a PB. A ešte si narysujme úsečku PX, lebo sa nám hneď preukáže byť užitočná:



Pozrime sa teraz na trojuholníky APX a APB. Keďže $|AX| = |AB|$, $|\sphericalangle XAP| = |\sphericalangle PAB|$ a stranu AP zdieľajú, vidíme, že sú zhodné. Z toho vidíme, že $|PX| = |PB|$.

Ten istý argument funguje pre trojuholníky DPX a DPC, z ich zhodnosti vidíme, že $|PC| = |PX|$. A keďže $|PC| = |PX| = |PB|$, vidíme, že $|PC| = |PB|$.

2.7 Klameme Mocným Strážcom

opravovali **Juro** a **Jožko**

Zadanie. *„Urghhhhh," zakloktala mi v hrdle voda, ako som sa s Krutitruľom v jednej ruke a Konkretizátorom v druhej škriabal na opačný breh od Jubilára. „Toto nesmieme stratiť," zamával som prístrojom pred papuľou priateľa. „Táto vecička ako jediná dokáže zničiť Srdce Abstrakcie." „Tak sa mi vidí, že sme tak či onak došli," skonštatoval Krutitruľo. „Hlúposť, len prejdeme cez tamtie brány a sme v Citadele. Srdce Abstrakcie je v strede mesta. Uvidíš, zvládneme to." Lenže pred bránami nás čakal zástup vojakov a my sme sa museli napochytre zamaskovať. Hanbím sa za to, čo som urobil – obrátil som batériu v Konkretizátore a zabstrahoval som seba a Krutitruľa na dve reálne čísla. Potom už stačilo dokázať strážcom, že spolu nebudeme zaberať v Citadele priveľa miesta.*

Pre reálne čísla a, b platí

$$a^{2020} + b^{2020} = a^{2022} + b^{2022}.$$

Dokážte, že platí $a + b \leq 2$.

Riešenie

Všimnime si, že stačí počítať s prípadom kedy $a \geq 1 \geq b \geq 0$. Dôvod je nasledovný: po prvé nám stačí počítať s nezápornými možnosťami keďže v zadaní máme iba párne mocniny. Po druhé je zjavné, že nemôžu byť obe

$a, b > 1$ súčasne, pretože inak by pravá strana bola ostro väčšia ako ľavá. Povedzme teda BUNV, že $b \leq 1$. Ďalej rátajme iba s možnosťou že $a \geq 1$, pretože v opačnom prípade nie je čo dokazovať.

Máme teda $a \geq 1 \geq b \geq 0$. Celé riešenie spočíva v jednoduchej úprave

$$a^{2020} + b^{2020} = a^{2022} + b^{2022} \iff a^{2020}(a^2 - 1) = b^{2020}(1 - b^2).$$

Keďže $a \geq 1 \geq b$, tak aj $a^{2020} \geq 1 \geq b^{2020}$, a teda platí $(a^2 - 1) \leq (1 - b^2)$. Toto už vyzerá na jednu známu nerovnosť, nie? No, upravme si to ešte trochu na

$$1 \geq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Tu vieme, že kvadratický priemer je väčší ako aritmetický, t.j.

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2},$$

z čoho dostávame

$$1 \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)^2.$$

Teda sme dokázali aj $1 \geq \frac{a + b}{2}$, čo bolo treba dokázať.

2.8 Kustódi Maraudéra Stíhajú

opravoval **Matúš**

Zadanie. *Vo vnútri Citadely nás čakalo niekoľko prekvapení. To prvé bolo, že vo vnútri Citadely sa nachádzalo celé kráľovstvo Abstrakcie, v plnej veľkosti a sláve. Druhé (ako nás upozornil strážnik House-Dorf) bolo, že vnútro Citadely je nekonečne veľké – presnejšie povedané, je to celá rovina. A tretie bolo, že všetky domy v Citadele stáli na bodoch s celočíselnými súradnicami, a na každom bode s celočíselnými súradnicami stál jeden dom. Chceli sme sa vydať na cestu, no House-Dorf nás najprv požiadal o pomoc: V Citadele vraj práve z basy ušiel nebezpečný zločinec. Basa sa nachádza na celočíselných súradniciach* (x_0, y_0) *a zločinec si najskôr zvolil nejaké celé čísla* a, b *a potom sa každý deň presúva tak, že ak bol ráno na súradniciach* (x, y)*, tak večer bude v bode* $(x + a, y + b)$[2]*. Každú noc takto zločinec trávi v nejakom dome. Strážnici si každú noc vyberú jeden dom a vykonajú v ňom prehliadku.*[3] *Vedia strážnici vždy dolapiť zločinca v konečnom počte krokov, aj keď nepoznajú* x_0, y_0, a, b*?*

Riešenie

Vzorové riešenie sme sa rozhodli napísať iteratívnym spôsobom. Začneme zjednodušenou verziou úlohy a vytvoríme k nej triviálne riešenie. Postupne si budeme úlohu sťažovať a následne naše riešenie upravíme, aby riešilo aj novú úlohu. Rozhodli sme sa vzorové riešenie napísať práve týmto spôsobom, aby bolo pre čitateľa čo najzrozumiteľnejšie. Je dobré si však uvedomiť, že pri takomto štýle spisovania riešenia konáme istú nadprácu.

[2] Zločinec si mohol vybrať aj čísla $a = b = 0$, kedy by vlastne ostal v base.

[3] Pri prehliadke domu vedia zistiť len to, či sa v ňom zločinec nachádza v tú jednu noc.

Triviálne zjednodušenie

Zadanie. Predstavme si najväčšie možné zjednodušenie úlohy tak, aby sa nám zachovala jej pointa. Nech vnútro Citadely je priamka[4] a nech sa väznica nachádza na fixnom bode 0[5]. Zlodej si teda môže vybrať smer, ktorým bude z väznice utekať a vzdialenosť, o ktorú sa každý deň posunie.

Riešenie. Naším cieľom je zaručiť, že nám zlodej nebude vedieť unikať donekonečna. Inak povedané: „Pri našom algoritme vykonávania domových prehliadok si zlodej *nevie* vybrať taký smer a vzdialenosť úniku za jeden deň, že po akomkoľvek počte dní bude stále na slobode."
Domové prehliadky sa rozhodneme vykonávať nasledovným algoritmom. Prvú noc sa pozrieme na súradnicu 0 na priamke. Druhú noc si vypočítame, kam by sa už zlodej dostal, keby sa rozhodol ísť dennou rýchlosťou 1 a v tom dome spravíme prehliadku – čiže v dome so súradnicami 2. Tretiu noc si zase vypočítame, kam by sa zlodej stihol za 3 dni dostať, keby šiel dennou rýchlosťou -1 a spravíme tam prehliadku. Ďalšiu, štvrtú, noc si zase spočítame, v akom dome by sa zlodej nachádzal, keby šiel dennou rýchlosťou 2...
Tento postup domových prehliadok by sme mohli zovšeobecniť, ale my sa rozhodneme tak nespraviť. Jednak by to bolo zbytočne komplikované a vlastne to ani nepotrebujeme. Ako sme si už povedali, na splnenie zadania nám stačí pre každú dennú rýchlosť, ktorú nám dokáže zlodej podstrčiť ukázať, že: „Aha, tu máš nejaký konkrétny deň a od tohto dňa už budeš určite trčať v base, lebo sme ťa nejakú noc predtým chytili pri domovej prehliadke."
Povedzme, že sa teda zlodej vybral po priamke nejakou všeobecnou dennou rýchlosťou v[6]. Lenže my použitím vyššie spomínaného algoritmu za $2\cdot|v|+1$ nocí spravíme niekoľko domových prehliadok. Tieto prehliadky robíme tak, že sa postupne stretne práve raz so zlodejom, ktorý by sa rozhodol ísť rýchlosťou $0, 1, -1, 2, \ldots, v, -v$. Teda sa stretneme aj so zlodejom, ktorý ide dennou rýchlosťou v. Potom od dňa $2 \cdot |v| + 2$ bude zlodej v base, a teda sme vyhrali.

1. iterácia triviálnej úlohy

Zadanie. Zmeňme teraz úlohu tak, že vnútro Citadely je síce už rovina, ale zlodej si vie zvoliť za čísla pohybu a, b iba hodnoty z množiny *nezáporných* celých čísel. Predpokladajme tiež, že väznica sa nachádza na fixnom bode $(0, 0)$.

Riešenie. Budeme musieť nájsť taký algoritmus, že ním postupne prejdeme všetky možné hodnoty (a, b). Skúsme takýto. Najprv vykonáme prehliadky v domoch na súradniciach (a, b) takých, že $a + b = 0$. Až s týmto skončíme, tak potom vykonáme prehliadky v domoch na súradniciach (a, b), takých, že $a + b = 1$ a takto postupujeme ďalej. Teda ak skončíme s vykonaním všetkých domových prehliadok na súradniciach $(a, b), a + b = n$, tak začneme vykonávať prehliadky domov na súradniciach $(a, b), a + b = n + 1$. Samozrejme nenavštevujeme priamo domy na súradniciach (a, b), ale vždy si dopočítavame, že kde by sa práve nachádzal zlodej v daný deň, keby si vybral hodnoty pohybu (a, b). Ostáva nám ešte ukázať, že nech si zlodej vyberie akúkoľvek všeobecnú dvojicu (a, b), tak vieme povedať, že po konečnom počte dní už bude určite v base. Zrejme keď skončíme s prehliadkami všetkých možností $(x, y), x + y = a + b$, tak sa nejakú noc stretneme aj v dome so zlodejom, ktorý si zvolil dvojicu (a, b).[7]. A teda od nasledujúceho dňa už bude zlodej v base, čím sme vyhrali. Poznamenajme ešte, že kým bude zlodej zaručene chytený, tak urobíme prehliadky v domoch $(x, y), x + y \leq a + b$. Urobením hrubého horného odhadu prídeme na to, že takýchto usporiadaných dvojíc nemôže byť viac ako $(a + b + 1)^2$, čo je počet všetkých usporia-

[4] nie rovina, ako sa píše v zadaní

[5] v pôvodnom zadaní môže byť väznica umiestnená na hocijakom mieste

[6] kladnou či zápornou

[7] Pamätajme, že my neprehľadávame jednotlivé domy na pozíciách (x, y) ale si dopočítavame, že kde by dnes zlodej bol, keby si zvolil hodnoty pohybu (x, y)

daných dvojíc, kde aj $x \le a + b$ aj $y \le a + b$. Teda po takomto počte dní bude zlodej už určite chytený a tento počet je konečný.

2. iterácia triviálnej úlohy

Zadanie. Zmeňme teraz úlohu tak, že vnútro Citadely je rovina a zlodej si vie zvoliť za a, b akékoľvek celé čísla. Predpokladajme stále, že väznica sa nachádza na fixnom bode $(0, 0)$.

Riešenie. Na vyriešenie tohto problému nám stačí upraviť predošlý algoritmus tak, že najprv prejdeme postupne všetky možnosti $(a, b), |a| + |b| = n$ také, že a, b sú najprv obe nezáporné, potom a je záporné a b je nezáporné, potom a je nezáporné a b je záporné a na záver a, b sú obe záporné. Potom na dolapenie zlodeja, ktorý si zvolil dvojicu (a, b) potrebujeme vykonať len 4-krát viacej domových prehliadok ako v predošlom prípade, čo je stále konečne veľa.

Posledná iterácia (Skutočná úloha)

Zadanie. Zoberme si už konečne pôvodné zadanie úlohy. Vnútro Citadely je rovina, zlodej si za a, b volí akékoľvek celé čísla a väznica sa môže nachádzať hocikde v priestore.

Riešenie. V skutočnosti táto úloha sa oproti predošlej o moc nelíši. Jediný rozdiel je, že nevieme, kde sa nachádza väznica. Máme však už postup, ako robiť domové prehliadky, aby sme zlodeja na rovine chytili vždy, keď má väznica fixnú pozíciu. Upraviť tento algoritmus tak, aby sme vedeli chytiť zlodeja vždy, aj keď nevieme, kde sa nachádza väznica už vôbec nie je ťažké. Stačí nám si namiesto usporiadanej dvojice (a, b) položiť usporiadanú štvoricu (a, b, x_0, y_0) kde x_0, y_0 sú neznáme pozície väznice. Potom upravíme náš algoritmus nasledovne. Necháme policajtov najprv vykonať[8] všetky domové prehliadky typu (a, b, x_0, y_0) také, že $|a| + |b| + |x_0| + |y_0| = 0$. Potom ak policajti skončia všetky prehliadky typu $|a| + |b| + |x_0| + |y_0| = n$, tak prejdú na prehliadky typu $|a| + |b| + |x_0| + |y_0| = n$. Zrejme pomocou takéhoto postupu sa eventuálne policajti stretnú s akýmkoľvek zlodejom, nech by ten zlodej vyrazil z hocijakej väznice a vybral si akýkoľvek typ pohybu. Ostáva už len overiť, že policajti takto chytia akéhokoľvek zlodeja v počte dní. Využitím myšlienky z predminulej iterácie vieme, že počet usporiadaných štvoríc (a, b, x_0, y_0) takých, že $|a|+|b|+|x_0|+|y_0| \le n$ je menší, nanajvýš rovný počtu usporiadaných štvoríc $(a, b, x_0, y_0), |a| \le n, |b| \le n, x_0 \le n, y_0 \le n$. Tiež vieme, že všetky usporiadané štvorice obsiahnuté v prvej možnosti sú obsiahnuté aj v druhej možnosti a počet usporiadaných štvoríc v druhej možnosti vieme ľahko vypočítať. Analogickou úvahou z predminulej iterácie teda dospejeme k tomu, že počet usporiadaných štvoríc (a, b, x_0, y_0) takých, že $|a| + |b| + |x_0| + |y_0| \le n$ nie je väčší, ako $4n^4$[9]. No a $4n^4$ je konečné číslo, preto nech by si zlodej zvolil akékoľvek celé čísla a, b, x_0, y_0, tak vieme zaručiť, že po $4(|a| + |b| + |x_0| + |y_0|)^4$ dňoch už bude zlodej určite zatknutý.

Posledné slová na záver. Dodajme ešte, že táto úloha je v istom zmysle podobná rozhodovacej úlohe, či majú racionálne čísla rovnakú mohutnosť ako prirodzené čísla – teda, či ich je tiež spočítateľne veľa. Ak ste dostali až sem a neviete o tom, skúste si to sami dokázať prípadne zalovte v hlbinách Internetu. Ukrývajú sa tam zaujímavé poznatky o mohutnosti množín.

[8] Rozumej vypočítať si, kde sa by sa v daný deň zlodej nachádzal, keby utekal z väznice na pozícii (x_0, y_0) smerom (a, b) Čiže ak je dnes deň d, tak vykonajú v noci prehliadku na pozícii $(x_0 + d \cdot a, y_0 + d \cdot b)$

[9] Nenechajte sa zmiasť číslom 4 pred n^4. To sa tam objavilo, pretože teraz už počítame s celou rovinou a nie len kladnými číslami – viď predošlá iterácia

2.9 k-čka Mečmi Sekajú

opravoval **Kubo P.**

Zadanie. *Vybrali sme sa po Hilbertovej štreke smerom do stredu Citadely. Prekročili sme živý plot a putovali sme mnoho dní, len aby sme sa opäť ocitli pred hradbami Citadely. Chcel som zaťať zuby a pokračovať v ceste, no Krutitruľo poklepal strážnika pred bránou po pleci a opýtal sa ho, kde je Kráľ Abstrakcie. Strážnik sa zaškeril a poznamenal, že kráľ sa chystá na vojnu a nemá čas riešiť chudákov. Krutitruľo toho holobriadka prehol na kolene a láskavo mu vysvetlil, že je svetoznámy stratég a kráľovi rád poskytne svoje služby. Tak sme sa ocitli v kráľovskej sále situovanej uprostred hrubých hradieb Citadely, kde nám šťúply mužíček vysvetlil, že proti nemu naraz vyrazili všetky prirodzené čísla a každé si najalo svoju armádu množín, a on sa obáva, či bude vedieť svojich nepriateľov spočítať.*

Dokážte, že pre akékoľvek kladné celé číslo k existuje iba konečne veľa n-tíc po dvoch rôznych prvočísel $p_1, p_2, \ldots, p_n$ takých, že $(p_1 + k)(p_2 + k)\ldots(p_n + k)$ je deliteľné $p_1p_2\ldots p_n$.

Riešenie

Danú úlohu budeme riešiť sporom. Predpokladajme teda, že existuje nejaké kladné celé číslo k také, že pre nekonečne veľa n-tíc po dvoch rôznych prvočísel $p_1, p_2, \ldots, p_n$ platí, že $p_1p_2\ldots p_n \mid (p_1 + k)(p_2 + k)\ldots(p_n + k)$. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že p_1 je najväčšie prvočíslo nejakej n-tice. Ak by sa nám podarilo hodnotu p_1 nejakým spôsobom zhora ohraničiť konkrétnou hodnotou P, tak už máme v podstate vyhraté. Isto totiž existuje iba konečne veľa n-tíc prvočísel menších ako P. Naším cieľom bude teda ďalej ukázať, že ak $p_1p_2\ldots p_n$ delí $(p_1 + k)(p_2 + k)\ldots(p_n + k)$, tak $p_1 \le 2k^2 - k$.

Nech je $p_1 > 2k^2 - k$. Keďže p_1 je prvočíslo, ktoré delí súčin $(p_1 + k)(p_2 + k)\ldots(p_n + k)$, musí deliť niektorú z daných zátvoriek. Prvočíslo p_1 určite nedelí zátvorku $p_1 + k$, lebo $2p_1 > p_1 + k > p_1$, pretože platí $p_1 > k$.

Bez ujmy na všeobecnosti nech p_1 delí zátvorku $(p_2 + k)$. Keďže je však $p_1 > 2k^2 - k$, tak určite $p_1 > k$. Potom zrejme $2p_1 > p_2 + k$, keďže túto nerovnosť vieme získať sčítaním nerovností $p_1 > p_2$ a $p_1 > k$ (Zatiaľ predpokladajme, že $k > 1$. Prípad $k = 1$ potom ľahko doriešime neskôr). Ak má zároveň platiť, že dvojnásobok čísla p_1 je väčší ako $p_2 + k$, ale zároveň p_1 delí $p_2 + k$, tak zrejme $p_1 = p_2 + k$.

Podobnou úvahou zistíme, že prvočíslo p_2 musí deliť niektorú z daných zátvoriek. Prvočíslo p_2 určite nedelí zátvorku $p_1 + k$. Keď je totiž $p_1 > 2k^2 - k$, tak platí, že $2p_2 = 2p_1 - 2k > p_1 + k$, pretože platí $p_1 > 3k$ (zatiaľ predpokladajme, že $k > 2$). Podobným spôsobom vieme zistiť, že p_2 nedelí zátvorku $p_2 + k$.

Za predpokladu $p_1 > 2k^2 - k$ sa vieme podobným spôsobom postupne dopracovať k tomu, že pre prvých k prvočísel platí:

$$p_1 = p_2 + k = p_3 + 2k = \cdots = p_k + (k - 1)k.$$

Aby sme to však len tak neodmávali, overíme si toto naše tušenie indukciou. Náš indukčný predpoklad bude, že prvočíslo p_i vieme zapísať ako $p_i = p_1 - (i - 1)k$ a zároveň pre každé $j \le i$ platí, že $p_j = p_1 - (j - 1)k$, pričom $i \le k$. (prvý indukčný krok je zrejmý: $p_1 = p_1$).

Nech $j \le i$. Ukážeme, že v takom prípade prvočíslo p_i nedelí zátvorku $(p_j + k)$. Keď je totiž $p_1 > 2k^2 - k$, tak platí:

$$p_1 > 2k^2 - k = (2k - 1)k > (2i - j)k = 2(i - 1)k - (j - 1)k + k,$$

$$2p_1 > p_1 + 2(i - 1)k - (j - 1)k + k,$$

$$2p_i = 2(p_1 - (i-1)k) > p_1 - (j-1)k + k = p_j + k,$$

$$2p_i > p_j + k.$$

Vidíme, že dvojnásobok prvočísla p_i je už väčší ako číslo $p_j + k$. Zároveň však ľahko vidíme, že musí platiť $p_i < p_j + k$. To zároveň implikuje, že musí naozaj existovať nejaké ďalšie prvočíslo také, že p_i delí súčet tohto prvočísla s číslom k.

Bez ujmy na všeobecnosti nech teda p_i delí $p_{i+1} + k$. Znovu ľahko ukážeme, že pre $p_1 > 2k^2 - k$ platí (pričom majme stále na pamäti, že $i \leq k$):

$$p_1 > 2k^2 - k > 2ik - k,$$

$$2p_1 > p_{i+1} + 2ik - k,$$

$$2p_1 - 2(i-1)k > p_{i+1} + k,$$

$$2p_i > p_{i+1} + k.$$

Keďže dvojnásobok prvočísla p_i je väčší ako výraz $p_{i+1} + k$ a zároveň p_i delí tento výraz, musí platiť, že $p_i = p_{i+1} + k$, z čoho už ľahko odvodíme:

$$p_{i+1} = p_i - k = p_1 - (i-1)k - k = p_1 - ik,$$

$$p_{i+1} = p_1 - ik.$$

Čím sme našu indukciu úspešne dokončili a máme:

$$p_1 = p_2 + k = p_3 + 2k = \cdots = p_k + (k-1)k.$$

Predpokladajme, že by nejaké dve čísla p_i a p_j z našej k-tice mali rovnaký zvyšok po delení $k-1$. BUNV predpokladajme, že $i \geq j$. Potom platí, že výraz $k-1$ musí deliť $p_j - p_i$,

$$(k-1) \mid p_j - p_i,$$

$$(k-1) \mid p_1 - (j-1)k - p_1 + (i-1)k,$$

$$(k-1) \mid (i-j)k.$$

Čísla $k-1$ a k sú nesúdeliteľné. Potom zrejme výraz $k-1$ musí deliť rozdiel $i-j$. Všimnime si ale, že čísla i, j sú z množiny $1, 2 \ldots k-1$, z čoho jasne vyplýva, že $i = j$. Vidíme, že medzi prvočíslami $p_1, p_2, \ldots p_k$ teda nie sú žiadne dve prvočísla, ktoré by mali rovnaký zvyšok po delení $k-1$. Máme $k-1$ prvočísel a z nich každé má iný zvyšok po delení $k-1$. Niektoré z nich potom musí dávať zvyšok 0 po delení $k-1$. Za predpokladu, že $k > 2$ to však znamená, že dané číslo nie je prvočíslo.

Ostáva nám už len poriešiť prípady, keď $k = 1$, alebo $k = 2$.

Pokiaľ $k = 1$, tak ľahko vidíme, že vyhovuje iba jedna n-tica prvočísel ($p_1 = 3$ a $p_2 = 2$).

Pokiaľ $k = 2$ vyhovuje tiež iba jedna n-tica ($p_1 = 7$, $p_2 = 5$, $p_3 = 3$). Ľahko totiž odvodíme, že musí platiť $p_1 = p_2 + 2 = p_3 + 4$. Rozmyslite si, že práve jedno z týchto troch čísel musí byť deliteľné tromi.

Dokázali sme, že hodnota p_1 nemôže byť väčšia ako $k^2 - k$. Tým pádom je hodnota najväčšieho z prvočísel v danej n-tici ohraničená zhora, z čoho už jasne vyplýva, že nemôže existovať nekonečne veľa takých n-tíc.

2.10 Kodifikácia Multivesmíru Súčasnosti

opravoval **Pedro**

Zadanie. *Kráľ schmatol meč a vyhrnul sa von z dverí. Krutitruľo sa obrátil a zakričal na mňa: „Pozri, tam je napísané: „Tajná chodba do Srdca Abstrakcie“!“ Žiaľ, viac povedať nemohol, lebo vojaci v miestnosti sa zabstrahovali na Lieove grupy a jeden za druhým si naňho políhali, až z neho ostal len mastný fľak. „Za ním!“ zakričal za mnou niekto a mne nebolo treba dva razy hovoriť. Vkĺzol som do dverí, na ktoré ukazoval Krutitruľo, a uháňal som krútiacou sa chodbičkou. Pod mojimi nohami sa otriasali rovnice tuhosti, pri každej zákrute sa sušili nepotrebné dimenzie, ako zábradlia mi slúžili geometricky dokonalé rovnobežky. Konečne som vybehol spoza rohu a ocitol som sa v čudesnej miestnosti s nekonečným povrchom, no len asi dvadsiatimi kubíkmi objemu. Uprostred na podstavci sálalo bledomodré svetlo z obrovského diamantu. Počul som za sebou v diaľke kroky, tak som rýchlo zašmátral po Konkretizátore – a nahmatal som len vzduch. Niekde mi musel vypadnúť z vrecka. Oblial ma pot. Čo teraz? Kroky sa blížili. Prizrel som sa Srdcu lepšie. Bolo nádherné. Jeho povrch sa víril a zakrúcal v slabučkých vzduchových prúdoch, takže vyzeralo, akoby bolo vytesané z dymu. Jeho žiara nebola centralizovaná, ale pochádzala z miliárd malilinkých bodiek... Naklonil som sa bližšie. Galaxie sa mi pred očami krútili, uprostred každej čierna diera. Obzrel som sa po komôrke. Po stenách boli namaľované všemožné fyzikálne a matematické zákony. Všetky smerovali k Srdcu. Komôrka nebola tvarovaná Srdcom – Srdce bolo tvarované komôrkou, a všetkým ostatným v Abstrakcii takisto. Kroky boli pár metrov za mnou. Vykročil som do Srdca. Jedna z jeho galaxií sa volá Mliečna cesta. Tam niekde je môj domov. Ale ešte predtým som prehodil zopár znamienok, aby Fermatova veta v našom vesmíre platila. A nechal som vo fabrike časopriestoru vpísanú jednu úlohu, len pre vás:*

Máme trojuholník ABC, v ktorom $|AC| \neq |BC|$. Kružnica jemu vpísaná má stred v bode I a dotýka sa strán BC, CA, AB postupne v bodoch D, E, F. Stred strany AB je M. Kolmica z bodu I na ťažnicu CM sa pretína s priamkou DE v bode K. Dokážte, že CK a AB sú rovnobežné.

Riešenie

Tento príklad sa dá vyriešiť pomerne jednoducho, ak poznáme a vieme pracovať s fenoménom zvaným harmonický štvorpomer. Ide o súhrn vlastností a tvrdení, ktorý sa často dá veľmi elegatne a efektívne využívať v geometrických úlohách, najmä na vyšších olympiádnych leveloch. Ak ste ešte nikdy o štvorpomere nepočuli, alebo by ste sa v ňom chceli zdokonaliť, či chytiť prax, odporúčam pozrieť [10] a [11].

Predtým, než túto úlohu ušľaháme týmto kladivom si harmonický štvorpomer zadefinujeme a uvedieme si tri tvrdenia z teórie harmonického štvorpomeru, ktoré pri tejto úlohe využijeme.

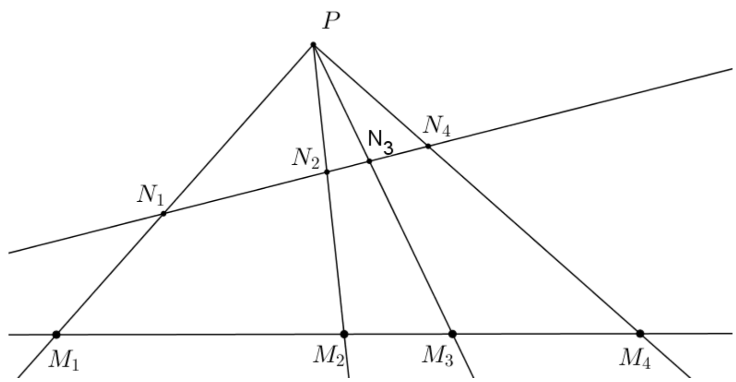
Definícia: Majme body A, C, B, D v tomto poradí na nejakej priamke. Hovoríme, že body A, C, B, D sú v harmonickom štvorpomere, ak platí $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|}$. Navyše, majme bod P a body A, C, B, D tak, že tieto štyri body ležia na

[10] https://prase.cz/library/Harmonicky4PomerTP/Harmonicky4PomerTP.pdf

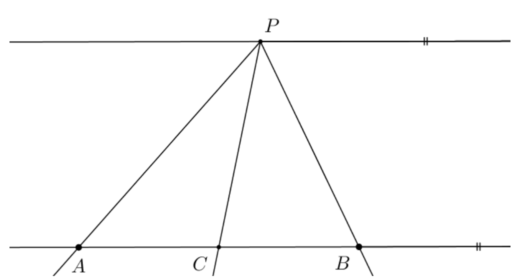
[11] https://prase.cz/library/HarmonickectvericeDH/HarmonickectvericeDH.pdf

priamke v danom poradí a bod P leží mimo tejto priamky. Uvažujme priamky PA, PC, PB a PD. Potom túto štvoricu priamok nazývame harmonický zväzok, pokiaľ body A, C, B, D sú v harmonickom štvorpomere.

Tvrdenie 1: Ak je štvorica priamok pretínajúca sa v bode P harmonickým zväzkom (teda existuje štvorica bodov A, C, B, D ležiacich na samostatnej priamke neprechádzajúcej bodom P, ktorá je v harmonickom štvorpomere), potom priesečníky ľubovoľnej priamky neprechádzajúcej bodom P, s týmto harmonickým zväzkom sú v harmonickom štvorpomere. Ako dôsledok, majúc dve priamky, m a n pretínajúce sa s štvoricou priamok p, q, r, s prechádzajúcou bodom P v štvoriciach bodov postupne M_1, M_2, M_3, M_4 a N_1, N_2, N_3, N_4, potom jedna štvorica bodov je v harmonickom štvorpomere práve vtedy, keď je tá druhá.



Tvrdenie 2: Uvažujme štvoricu priamok v harmonickom zväzku prechádzajúcu spoločným bodom P a uvažujme priamku a neprechádzajúcu P. Nech priamka a pretína prvé tri priamky harmonického zväzku v bodoch A, C, B. Potom C je stredom úsečky AB práve vtedy, keď štvrtá priamka zväzku je rovnobežná s priamkou a.

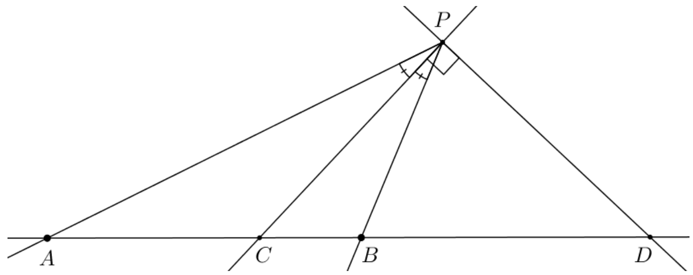


Tvrdenie 3: Majme bod P, z neho vychádzajúce štyri priamky a na týchto priamkách body A, C, B, D ležiace v tomto poradí na ďalšej priamke (neprechádzajúcej P). Potom z nasledujúcich troch tvrdení platnosť ľubovoľných dvoch implikuje platnosť tretieho:

1. Priamka PC je osou uhla APB.

2. Priamky PC a PD sú na seba kolmé.

3. Body A, C, B, D sú v harmonickom štvorpomere.

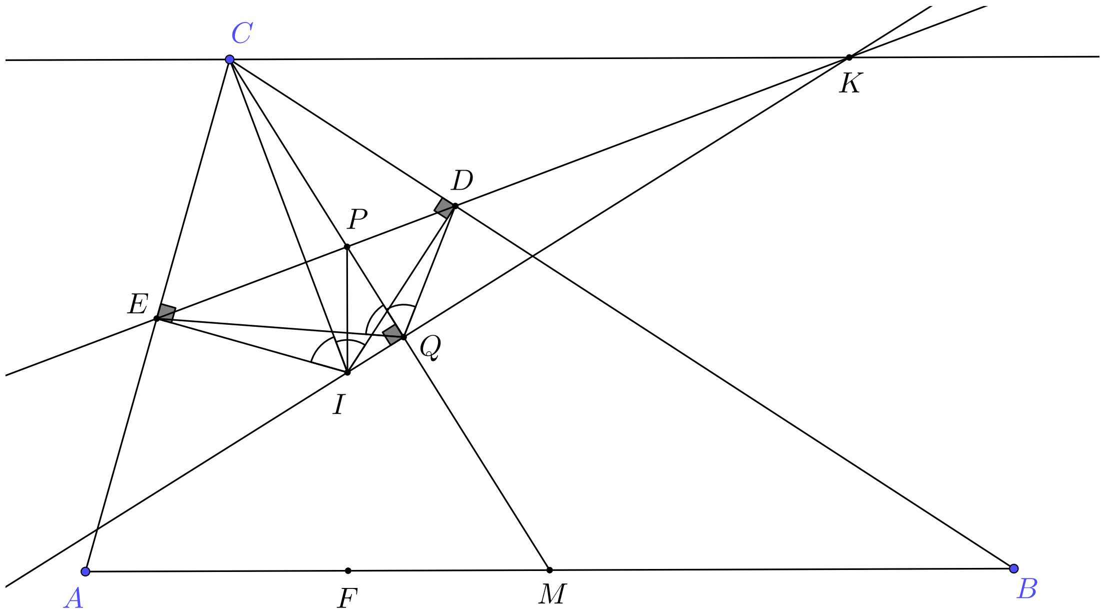


Teraz už vieme dosť na to, aby sme vedeli vyriešiť úlohu za pomoci harmonického štvorpomeru. Ak ste úlohu nevyriešili doteraz, ale chceli by ste tomu ešte dať šancu, teraz máte dobrú príležitosť prestať čítať vzorák a skúsiť úlohu vyriešiť s predošlými tvrdeniami. Každopádne, vzorák bude aj tak pokračovať.

Súc sugestívne vybrané práve tieto tri tvrdenia, chceme ich nejako využiť v tomto príklade. Cieľom je ukázať rovnobežnosť priamok, preto by sme mali využiť tvrdenie 2. Vidíme, že priamky CA, CM, CB a CK sú dobrými kandidátmi na harmonický zväzok, pretože nakoľko M je stredom úsečky AB, majúc, že spomínané štyri priamky sú harmonický zväzok, rovnobežnosť AB a CK by priamo vyplývala z tvrdenia 2.

Na to, aby sme ukázali harmonickosť zväzku by sme potrebovali nájsť takú priamku, že o jej priesečníkoch s priamkami CA, CM, CB a CK by sme vedeli ukázať, že ležia v harmonickom štvorpomere. Potom s využitím tvrdenia 1 a definície by sme vedeli, že tieto štyri priamky sú harmonickým zväzkom a akákoľvek iná priamka, ktorá ich pretína vytvorí z priesečníkov harmonickú štvoricu (hoci v našom prípade je cieľová priamka AB, ktorej prieniky s potenciálnym harmonickým zväzkom budú A, M, B a nekonečno). Máme len dve prirodzené možnosti na takúto priamku - ED alebo IK. Vidíme však, že IK má oveľa viac odveci priesečníky, preto si vyberieme priamku ED.

Označme P priesečník CM a ED. O bodoch E, P, D, K chceme ukázať, že ležia v harmonickom štvorpomere. Mohli by sme využiť tvrdenie 3, avšak na to potrebujeme nájsť vhodný bod mimo priamky ED, ktorý použijeme. Tu máme niekoľko možností. C nám nepomôže, pretože CP a CK rozhodne nie sú vo všeobecnosti kolmé. Podobne I nie je vhodný kandidát, nakoľko os uhla DIE je IC a nie IP ako by sme potrebovali (IC je osou uhla DIE, lebo $CEID$ je známy tetivový deltoid). M nie je vhodný kandidát, lebo jednak MP a MK nie sú vo všeobecnosti kolmé (dá sa všimnúť z obrázka), ale tiež preto, lebo tvrdenie, že MP by malo byť vo všeobecnosti osou uhla DME je príliš absurdné.



Ostáva nám už iba priesečník IK a CM, bod, ktorý si označíme Q. [12]. Kolmosť PQ a QK máme priamo zo zadania, čo je ďalšia motivácia pozerať sa práve na tento bod. Ostáva nám ukázať, že QP je osou uhla DQE. Konečne sa dostaneme k troche uhlenia. Bez ujmy na všeobecnosti, nech konfigurácia je taká, ako na obrázku, teda že I leží v polrovine CMA. V opačnom prípade by bola argumentácia analogická (prípad I leží na CM je vylúčený zo zadania). Nakoľko uhol IQC je pravý, ako aj uhol IEC, štvoruholník $CEIQ$ je tetivový. Potom uhly EIC a EQC majú rovnakú veľkosť vďaka vete o obvodových uhloch.

Podobne, nakoľko CQI a CDI sú oba pravé, vidíme, že $CIQD$ je tetivový. Potom uhly DQC a DIC majú rovnakú veľkosť. Už sme si ale povedali, že CI je osou uhla DIE. Vidíme, že teda aj QP je osou uhla DQE. Teraz využijeme tvrdenie 3 a zisťujeme, že body E, P, D, K ležia v harmonickom štvorpomere, čo je presne to, čo nám ešte chýbalo k vyriešeniu úlohy.

[12] z obrázka sa dá vidieť, že máme malé IQ