Trojsten

Korešpondenčný matematický seminár
XLII. ročník, 2020/2021
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Riešenia 3. kola letnej časti

3.1 Knižôčka Mantavého Spolupracovníka ($\kappa \leq 1$) opravovali **Kaja a Kika**

Zadanie. *Veronika chystá palacinkovú párty pre KMS vedúcich. Matúš prišiel skôr, aby jej pomohol. Je ale tak nešikovný, že ho Veronika posadila do kresla a hodila po ňom zbierku úloh, nech sa chlapec zabáva. Matúša zaujala táto úloha:*

Majme kladné celé čísla a, b a c. Dokážte, že ak súčet týchto čísel nie je deliteľný číslom 3, tak musí byť číslo $(a-b)(b-c)(c-a)$ deliteľné číslom 3.

Riešenie

Zaujíma nás, čo sa bude diať, ak súčet čísel a, b, c nie je deliteľný číslom 3, preto nemusíme riešiť, čo sa bude diať, ak je súčet čísel a, b, c deliteľný číslom 3. Teda napríklad možnosť, že všetky čísla majú rôzne zvyšky po delení číslom 3. Vtedy si čísla a, b, c môžeme zapísať ako: $3k$, $3l+1$, $3m+2$, kde k, l, m sú prirodzené čísla. Ich súčet potom bude: $3(k+l+m+1)$, čiže bude deliteľný číslom 3. Túto možnosť teda môžeme vylúčiť.

O ostatných možnostiach vieme určite povedať, že v každej z nich budú mať aspoň dve z čísel a, b, c rovnaký zvyšok po delení číslom 3 (lebo možnosť, že budú mať všetky 3 čísla rôzne zvyšky sme už vylúčili). Keďže v jednotlivých zátvorkách výrazu $(a-b)(b-c)(c-a)$ máme všetky možné dvojice týchto čísel, tak v niektorej z nich bude musieť byť aj dvojica, ktorá má rovnaký zvyšok po delení číslom 3. Ak ale od seba odčítame dve čísla, ktoré dávajú rovnaký zvyšok po delení číslom 3, tak výsledkom bude číslo deliteľné 3, keďže vtedy si zas môžeme tieto dve čísla zapísať ako: $3k+x$, $3l+x$, kde k a l sú nezáporné celé čísla a x je ich zvyšok po delení číslom 3. Ich rozdiel potom bude $3(k-l)$ alebo $3(l-k)$, čo je v oboch prípadoch násobok čísla 3. Takže ak súčet čísel a, b, c nebude deliteľný 3, musí byť aspoň jedna zo zátvoriek výrazu $(a-b)(b-c)(c-a)$ deliteľná číslom 3, a preto potom aj celý súčin bude deliteľný číslom 3.

3.2 Kokos, Matúš, Stlstneš ($\kappa \leq 2$) opravovala **Veronika**

Zadanie. *Pre každého vedúceho treba nachystať tanier s dvoma palacinkami. Veronika má nachystaných 25 okrúhlych tanierov usporiadaných do štvorca s piatimi riadkami a piatimi stĺpcami. Na začiatku sú všetky taniere prázdne. Veronika spraví naraz dve palacinky a položí ich na dva susedné taniere (na každý tanier jednu). Občas príde Matúš a zje po jednej palacinke z dvoch susedných tanierov. Ak bude Matúš spolupracovať s Veronikou, môže sa im podariť nachystať na každý tanier práve dve palacinky? Dva taniere považujeme za susedné práve vtedy, keď sú v tom istom riadku alebo stĺpci vedľa seba.*

Riešenie

Zafarbime si rozložené taniere šachovnicovo. Čiernych políčok nech je viac, teda 13, bielych 12 (pri opačnom zafarbení vyzerá dôkaz takmer rovnako).

Chceli by sme, aby sa na každom tanieri nachádzali 2 palacinky. Teda chceme, aby sa na čiernych tanieroch dokopy nachádzalo $13 * 2 = 26$ palaciniek a na bielych $12 * 2 = 24$ palaciniek.

Obe zmeny, pridanie, či odobratie palaciniek z 2 susedných tanierov zachovávajú, že počet palaciniek na bielych tanieroch je rovný počtu palaciniek na čiernych tanieroch. Vidíme to z toho, že biely tanier susedí len s čiernymi a čierny len s bielymi taniermi. Preto každá zo zmien pridáva/odoberá rovnaký počet – jednu palacinku z bieleho a jednu z čierneho taniera.

Nazačiatku je na oboch farbách 0 palaciniek. Ale ak žiadna operácia nemôže zmeniť to, že počet palaciniek na čiernych je rovný počtu palaciniek na bielych tanieroch, tak sa nám nikdy nepodarí dostať zároveň na čiernych tanieroch 26 a na bielych tanieroch 24, keďže to nie je rovnaký počet.

A preto nedokážeme, ani keby sme sa akokoľvek snažili, dať na každý tanier po 2 palacinky

3.3 Krása Matematickej Symetrie ($\kappa \leq 3$) opravoval **Mišo M.**

Zadanie. *Všimli ste si, že Aňa je palindróm? Aňa si to všimla a všetkým vedúcim to s radosťou oznámila, keď prišla na párty. Vedúcich to neohúrilo. Avšak inšpirovalo ich to a začali zisťovať, koľko je 6-ciferných palindrómov (nezačínajúcich nulou), ktoré sú deliteľné číslom 7. Zistite to aj vy.*

Poznámka: Palindróm je číslo, ktoré keď prečítame odzadu (teda cifry sú v opačnom poradí), tak je zhodné s pôvodným číslom. Napríklad číslo 1578751 je 7-ciferný palindróm.

Riešenie

Označme si nejaký 6-ciferný palindróm ako $ABCCBA$, pričom A, B, C sú jeho cifry. To si ďalej vieme prepísať nasledovne

$$ABCCBA = 100000 \cdot A + 10000 \cdot B + 1000 \cdot C + 100 \cdot C + 10 \cdot B + A = 100001 \cdot A + 10010 \cdot B + 1100 \cdot C.$$

Pozrime sa, čo pre tieto cifry musí platiť, aby bol výsledný palindróm násobkom 7. Vieme, že ak od tohto výrazu odpočítame alebo pripočítame násobok 7, na jeho deliteľnosti sa nič nezmení. Čísla, ktorými násobíme A, B a C, preto vieme vydeliť 7 a počítať ďalej len s ich zvyškami po delení. Platí, že $100001 = 7 \cdot 14285 + 6$, $10010 = 7 \cdot 1430$, $1100 = 7 \cdot 157 + 1$. Môžeme si napríklad všimnúť, že hodnotu cifry B môžeme zvoliť ľubovoľne – na deliteľnosti palindrómu nič nezmení.

Zostáva nám určiť, pre ktoré dvojice cifier A a C bude číslo $6A + C$ násobkom 7. Tu už vieme jednoducho vyskúšať jednotlivé možnosti pre A a dopočítať C. Ešte si však zjednodušíme prácu.

$$6 \cdot A + C = 7 \cdot A + (C - A).$$

Číslo $7 \cdot A$ je isto násobkom sedmičky, takže potrebujeme, aby rozdiel $C - A$ bol tiež jej násobkom. Keďže sú obe čísla cifry, ich rozdiel musí byť 0 alebo ± 7. Pre $C = A$ dostaneme 9 možností (keďže A nemôže byť 0), pre $C = A + 7$ dve, a pre $C = A - 7$ tri (C môže byť nula).

Dokopy sme našli 14 možností pre dvojicu A, C. K nim môžeme zvoliť cifru B ľubovoľne. Celkový počet šesťciferných palindrómov tak bude $14 \cdot 10 = 140$.

3.4 Kubo Mešká Strápený ($\kappa \leq 5$)

opravoval **Adam**

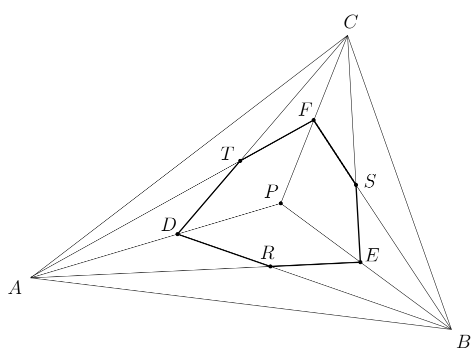
Zadanie. *Kubo na párty meškal a zjavne prišiel absolútne nevyspatý. Lucy sa na neho utrápene pozrela a spýtala sa, čo ho trápi. Kubo akoby naspamäť odverklíkoval:*

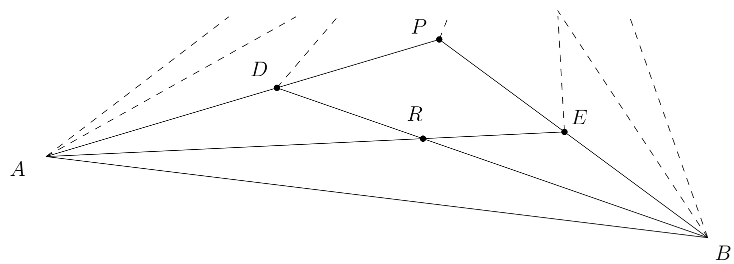
Máme trojuholník ABC a v ňom bod P. Označme postupne D, E a F stredy úsečiek AP, BP a CP. Ďalej označme R priesečník úsečiek AE a BD, označme S priesečník úsečiek BF a CE a označme T priesečník úsečiek CD a AF. Akú časť z obsahu trojuholníka ABC tvorí šesťuholník DRESFT?

Riešenie

Začnime tým, že si zakreslíme náčrt zadania. Vyzerať môže tak ako nižšie na obrázku, pričom našou úlohou je zistiť pomer obsahov zvýrazneného šesťuholníka $DRESFT$ a trojuholníka ABC.

Počítať rovno obsah šesťuholníka je celkom komplikované, poďme si to teda zjednodušiť a zamerajme sa najprv len na nejakú jeho menšiu časť. Trojuholník ABC je spojnicami vrcholov s bodom P rozdelený na tri menšie trojuholníky, pozrime sa teda bližšie na jeden z nich, napríklad trojuholník ABP. Na obrázku máme napravo jeho detail.





Zamyslime sa najprv nad tým, čo zaujímavé platí o čiarach, ktoré už máme zakreslené v obrázku. Úsečky AE a DB spájajú stredy strán trojuholníka ABP s ich protiľahlými vrcholmi, ide teda o jeho ťažnice. Priesečník ťažníc, v tomto prípade bod R, je ťažiskom trojuholníka ABP. O ťažniciach platí, že ich ťažisko rozdeľuje vždy na dve časti v pomere dĺžok 1 ku 2 (dlhšia je časť ťažnice pri vrchole trojuholníka). V tomto prípade teda vieme povedať, že dĺžka RB je dvojnásobná oproti dĺžke DR.

Nás zaujímajú hlavne obsahy útvarov na obrázku, pozrime sa teda na ne. Keďže máme nejakú informáciu o úsečkách RB a DR, mohlo by nám to niečo hovoriť aj o trojuholníkoch, ktoré tieto úsečky tvoria. V súvislosti s počítaním obsahov trojuholníkov sa nám oplatí všimnúť si, že trojuholníky ABR a ARD majú rovnakú výšku na stranu oproti vrcholu A (teda na strany RB a DR). Obsah trojuholníka vypočítame ako polovicu súčinu dĺžok jednej zo strán trojuholníka a výšky trojuholníka na túto stranu. V našom prípade sa pozeráme na trojuholníky ABR a ARD, ktoré majú rovnakú výšku pri vrchole A, a pomer protiľahlých strán je 1 ku 2. Z toho vyplýva, že aj pomer obsahov týchto trojuholníkov bude 1 ku 2.

Toto sme zistili na základe ťažnice DB, rovnaké vzťahy však budú fungovať aj pre ťažnicu AE. Preto aj pomer obsahov trojuholníkov BER a ABR bude 1 ku 2. Tieto pomery vieme vyjadriť aj tak, že si obsah jedného z trojuholníkov označíme neznámou x. Potom bude platiť, že obsah trojuholníka $ARD = x$, obsah $ABR = 2x$ a obsah $BER = x$.

V trojuholníku ABP nám chýba informácia už len o obsahu štvoruholníka $DREP$. Ešte raz sa teda pozrieme na niektorú z ťažníc, napríklad ťažnicu AE. Táto ťažnica delí trojuholník ABP na dva trojuholníky z rovnakými obsahmi (lebo BE a EP majú rovnaké dĺžky a tiež rovnakú výšku na protiľahlý vrchol). Jeden z nich je trojuholník ABE s obsahom $3x$, preto aj trojuholník AEP musí mať obsah $3x$. Keďže trojuholník ARD má obsah x, zostáva štvoruholník $DREP$, ktorého obsah bude rovný $2x$. Obsah celého trojuholníku ABP je tak $6x$ a obsah štvoruholníka $DREP$ je jedna tretina z toho.

Zistili sme aké sú pomery útvarov vo vnútri trojuholníka ABP. Všetko čo sme zistili o tomto trojuholníku zároveň musí platiť aj o zvyšných dvoch trojuholníkoch PBC a APC pretože vznikli rovnakým spôsobom. Šesťuholník $DRESFT$ zo zadania zasahuje do všetkých troch týchto trojuholníkov. Vieme, že v každom z nich zaberá jednu tretinu ich obsahu, bude teda tiež platiť, že obsah $DRESFT$ je jednou tretinou obsahu trojuholníka ABC. A to sme sa snažili zistiť.

3.5 Konvergencia Mysle Števkinej ($\kappa \leq 8$) opravovali **Tomáš** a **Lucka**

Zadanie. *Števka horlivo natierala palacinky malinovým lekvárom. Všimla si, že na jednu palacinku nepoužije celú lyžicu lekváru, a tak sa začala zamýšľať nad desatinnými číslami. Jej myseľ dokonvergovala až k takejto úlohe:*

Symbolom $\{x\}$ označíme desatinnú časť reálneho čísla x. Pokiaľ si označíme $\lfloor x \rfloor$ najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje x, tak možno desatinnú časť čísla x definovať ako $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Koľko existuje kladných reálnych čísel $x \leq 2021$, pre ktoré platí $x \cdot \{x\} = 17$?

Riešenie

Označme si funkciu $f(x) = x \cdot \{x\}$. Pomôže si uvedomiť, že úloha sa nás vlastne pýta, pre koľko čísel x platí $f(x) = 17$, t. j. koľko priesečníkov má graf funkcie $f(x)$ s konštantou 17. Dolná celá časť $\lfloor x \rfloor$ čísla x sa mení skokovito – len keď x nadobudne celočíselnú hodnotu, tak $\lfloor x \rfloor$ sa zväčší o 1. Konkrétne, $\lfloor x \rfloor$ je konštantná funkcia na intervaloch $x \in \langle n,\ n+1)$, kde n je ľubovoľné nezáporné celé číslo.

Pozrime sa na celú funkciu $f(x)$ na intervale $x \in \langle n,\ n+1)$. Zložka x je lineárna rastúca funkcia. Zložka $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ je tiež lineárna funkcia (pretože $\lfloor x \rfloor$ je konštanta) a je tiež rastúca. Keďže $f(x)$ je súčin dvoch spojitých rastúcich funkcií, tak $f(x)$ je spojitá[1] rastúca na každom intervale $x \in \langle n,\ n+1)$.

Zistená vlastnosť nám pomôže, pretože spojitá rastúca funkcia $f(x)$ môže pretnúť konštantu 17 najviac raz na každom intervale $x \in \langle n,\ n+1)$. Zistime, pre ktoré n nastane toto pretnutie, a pre ktoré nie.

Ak $x = n$, tak desatinná časť $\{x\}=0$, čiže $f(x) = 0$. Na každom intervale $\langle n,\ n+1)$ teda hodnota funkcie $f(x)$ začína na 0 a ďalej rastie. Otázka je, či nadobudne alebo prekročí hodnotu 17. Keď sa x blíži k $n+1$, tak $\{x\}$ sa blíži k 1, takže celý výraz $f(x) = x \cdot \{x\}$ sa blíži[2] ľubovoľne blízko k $n+1$, hoci túto hodnotu nikdy nedosiahne. Na intervale $\langle n,\ n+1)$ nadobudne $f(x)$ všetky hodnoty $0 \leq f(x) < n+1$. To znamená, že $f(x) = 17$ nastane práve vtedy, keď $17 < n+1$, t.j. pre $n \geq 17$.

Nakoniec zoberieme do úvahy obmedzenie zo zadania $x \leq 2021$. Posledný celý obsiahnutý interval je $x \in \langle 2020, 2021)$, čiže $n = 2020$. Pre $n = 2021$ je v definičnom obore už len jeden bod $x = 2021$, pre ktorý $f(x) = 0$, čiže nenastane rovnosť. Intervaly, v ktorých nastane $f(x) = 17$, sú pre $17 \leq n \leq 2020$. Takýchto n je $2020 - 16 = 2004$. Dostávame, že $x \cdot \{x\} = 17$ platí pre 2004 rôznych x.

[1] Spojitosť je vlastnosť funkcie, ktorá má presnú definíciu. Avšak keďže tu využívame len známe základné vlastnosti spojitej funkcie, stačí nám predstava, že graf funkcie vieme nakresliť jedným ťahom ceruzky. Pre odvážnejších, skúste si rozmyslieť, ako by ste spojitosť definovali matematicky.

[2] Úplne formálne matematicky by sa naše blíženie sa muselo vyjadriť pomocou limít, ale nebojte sa, ak ste sa s limitami ešte nestretli. V našom prípade je dostatočná základná intuícia za pojmom blíženia sa, vzhľadom na jednoduchosť a názornosť tohto použitia.

Iné riešenie

Ak si náhodou neuvedomíme fintu o pretínaní rastúcich funkcií s predchádzajúceho riešenia, ale zato sa nám chce počítať, tak budeme postupovať nasledovne.

Pri počítaní s celými a desatinnými číslami sa často hodí zápis čísla x ako $x = \lfloor x \rfloor + \{x\} = d + c$, kde $d = \lfloor x \rfloor$ a $c = \{x\}$. Naopak ak máme dané celé číslo d a číslo $0 \le c < 1$, tak je tým jednoznačne určené číslo $x = d + c$. Prepíšeme zadanie v nových premenných:

$$x \cdot \{x\} = (d + c)c = 17$$

a dostávame kvadratickú rovnicu

$$c^2 + dc - 17 = 0.$$

Vyjadrovať d-čko z tejto rovnice nemá veľmi zmysel, lebo c môže byť ľubovoľné reálne číslo a potom by aj d vychádzalo vo veľa prípadoch desatinné, nevedeli by sme ľahko zabezpečiť, aby d bolo celé. Preto vyjadríme c-čko,

$$c = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 + 4 \cdot 17}}{2}.$$

Musí platiť $0 \le c < 1$. Menší koreň je však vždy záporný, takže ostáva nám podmienka

$$0 \le \frac{-d + \sqrt{d^2 + 68}}{2} < 1.$$

Označme $D = d^2 + 68$. Vidíme, že $D > d^2$, takže $\sqrt{D} > d$, čiže c je určite kladné. Ostala len jedna podmienka

$$\begin{aligned}
\frac{-d + \sqrt{d^2 + 68}}{2} &< 1,\\
-d + \sqrt{d^2 + 68} &< 2,\\
\sqrt{d^2 + 68} &< d + 2,\\
d^2 + 68 &< (d + 2)^2 = d^2 + 4d + 4,\\
68 &< 4d + 4,\\
4d &> 64,\\
d &> 16.
\end{aligned}$$

Všimnite si, že umocnenie na druhú je v tomto prípade ekvivalentná úprava, pretože na oboch stranách máme kladné čísla.

Pre každé $d > 16$ vieme dopočítať vhodné c zo vzťahu

$$c = \frac{-d + \sqrt{d^2 + 4 \cdot 17}}{2}$$

a tým máme jednoznačne dané $x = d + c$, ktoré spĺňa $x \cdot \{x\} = 17$, keďže sme robili len ekvivalentné úpravy. Každé x je teda dané celým číslom d, pre ktoré platí $16 < d \leq 2020$ ($d = 2021$ by už nesedelo, lebo c je kladné a $d + c > 2021$). Takýchto čísel je 2004, čo je riešením úlohy.

3.6 Krtko Modeluje Systémy

opravoval **Jožtek**

Zadanie. *Krtko sa hral s tabuľkou, pretože vedel, že tabuľka je relácia a relácie sú veľmi dôležité v databázových systémoch. Síce táto úloha veľmi s databázami nesúvisí, ale zdala sa mu pekná, tak sa o ňu s vami podelil.*

Máme tabuľku 10×10*, v ktorej sú v nejakom poradí čísla od* 1 *do* 100*, každé práve raz. V jednom ťahu môžeme vymeniť ľubovoľné dve (nie nutne susediace) čísla kdekoľvek v tabuľke. Dokážte, že za najviac* 35 *ťahov sa vieme dostať do stavu, kedy je súčet každých dvoch hranou susedných čísel zložené číslo (t. j. nie prvočíslo ani číslo* 1*).*

Riešenie

Priamočiarym prístupom v takejto úlohe je opísať, ako máme čísla povymieňať, aby sme najviac po 35 výmenách dostali požadovaný stav. Ako zariadime, aby súčty susedných čísel boli zložené čísla? Pri takýchto úlohách sa nám oplatí zamyslieť nad nejakou jednoduchou postačujúcou podmienkou, ktorá nám to zaručí. Napr. môžeme sa snažiť o to, aby skúmané súčty boli deliteľné nejakým číslom. Najmenším kandidátom je číslo 2. Musíme si však dať pozor na to, že nie všetky čísla, ktoré sú deliteľné dvomi, sú aj zložené. Neplatí to pre dvojku samotnú. To je však v poriadku, lebo súčet dvoch čísel je aspoň $1 + 2 = 3$, tak číslo 2 ako súčet v tabuľke nikdy nedostaneme. Preto ak máme v tabuľke párny súčet susedov, tak ide o zložené číslo.

Súčet dvoch čísel je párny, ak sú obe čísla párne alebo obe nepárne. Preto by sme párne a nepárne čísla chceli dostať čo najviac k sebe. To vieme celkom pekne spraviť. Rozdeľme si tabuľku na dve polovice rozmerov 5×10. Zoberme si tú polovicu, v ktorej je menej nepárnych čísel (ak ich je rovnako veľa, tak ľubovoľnú). Bez ujmy na všeobecnosti nech je to horná polovica. Keďže máme medzi číslami od 1 do 100 presne 50 nepárnych, tak v hornej polovici ich je najviac 25. Tiež platí, že ich počet je rovnaký ako počet párnych čísel v dolnej polovici. Preto môžeme každé nepárne číslo z hornej polovice vymeniť s párnym číslom z dolnej polovice. Tak spravíme najviac 25 ťahov a dostaneme sa do stavu, kedy máme v hornej polovici iba párne čísla a v dolnej polovici len nepárne. Preto súčet dvojíc v rovnakej polovici je vždy párny (a rôzny od 2), a teda to je zložené číslo.

Jediné dvojice, ktoré nám dávajú nepárny súčet, sú tie, ktoré obsahujú jedno číslo z hornej polovice a druhé z dolnej. Takých je celkom 10. To je dobrá správa, lebo nám ostalo ešte 10 ťahov. Tie využijeme na to, aby sme v nich zabezpečili súčty ako zložené čísla. Keď nám tam deliteľnosť dvomi nevychádza, tak môžeme skúsiť ďalšie číslo, a to deliteľnosť tromi.

V každom stĺpci s vykonáme nasledovný ťah: Označme si číslo v piatom riadku ako a (teda to párne, najnižšie v hornej polovici) a číslo pod ním ako b (teda najvyššie nepárne). Označme si zvyšok čísla b po delení tromi ako z. Číslo a chceme vymeniť s číslom, ktoré má zvyšok $3 - z$ po delení tromi. V hornej polovici máme 50 párnych čísel, z nich z každého zvyšku máme aspoň 16 čísel (rozmyslite si to). Nechceme si z nich vybrať číslo 2, aby sme náhodou nedostali súčet 3 (jediný súčet, ktorý je deliteľný tromi a nie je to zložené číslo). Taktiež nechceme vyberať číslo z piateho riadku, aby sme si náhodou nepokazili súčet niekde inde. Každopádne, ostalo nám aspoň

16 − 1 − 10 = 5 čísel, ktoré majú zvyšok $3 - z$. Vyberieme si ľubovoľné číslo z nich a vymeníme ho s číslom a. Tak dostaneme v stĺpci s na hranici piateho a šiesteho riadku súčet čísel deliteľný tromi a zároveň väčší ako tri, a to je zložené číslo. Hornú polovicu sme si nepokazili, lebo v nej máme stále iba párne čísla. Celá tabuľka nám teda sedí a stačilo nám na to najviac 25 + 10 = 35 výmen.

Iné riešenie

Opíšeme ešte jeden spôsob, ako zaručiť na rozhraní dvoch polovíc súčty, ktoré sú zložené čísla. Tento spôsob pochádza z riešenia *Uršule Márie Kossaczkej*. Zakladá sa na tom, že pre každé párne číslo si predpíšeme práve jedno jedinečné nepárne číslo, ktoré s ním dá v súčte zložené číslo. V každom stĺpci spravíme nasledovné: označíme si (párne) číslo v piatom riadku ako y a (nepárne) číslo v šiestom riadku ako x. Číslo y vymeníme s párnym číslom podľa nasledovnej tabuľky.

x	1	3	5	7	9	11	13	x, $15 \le x \le 99$
za čo vymeniť y	8	6	4	2	12	10	14	$115 - x$
nový súčet	9	9	9	9	21	21	27	115

Tak vždy dostaneme v súčte na rozhraní piateho a šiesteho riadku zložené číslo. Jeho výhodou je, že nemusíme riešiť, či nám náhodou nevyjde súčet zrovna 3, alebo či si svojím ťahom nepokazíme nejaký predchádzajúci súčet.

3.7 Kecy o Mojovi na Sústredení

opravoval **Marek**

Zadanie. *Pamätáte si ešte, ako sme vám na sústredeniach vždy hovorili, že príde Mojo a bude Náboj? Hádam hej, veď to už celkom zľudovelo. Skúsme to teraz trochu pozmeniť. Namiesto Náboja budeme mať nekonečne veľa konečných postupností núl a jednotiek, ktoré označíme $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Začneme s $a_1 = 0$. Príde Mojo a postupne bude vytvárať ďalšie členy tejto postupnosti, a to tak, že si na papier napíše poslednú zatiaľ vytvorenú postupnosť, a_i, dvakrát za sebou, ale keď ju bude písať druhýkrát, tak namiesto núl bude písať jednotky a namiesto jednotiek nuly. Takto dostane postupnosť a_{i+1} a tak isto postupuje ďalej. Prvé štyri členy teda budú*

$$a_1 = 0,\ a_2 = 01,\ a_3 = 0110,\ a_4 = 01101001.$$

Keď Mojo bude opakovať tento proces donekonečna, dostane postupnosť $a = 0110100110010110\ldots$ Dokážte, že desatinné číslo $0.a$ nie je racionálne.[3]

Poznámka: Zápis $0.a$ znamená, že nalepíme a ako desatinnú časť čísla za 0.

Riešenie

Podľa Martina Kopčányho (upravené)

Dokázať, že niečo je racionálne číslo, je ekvivalentné s nájdením periódy v desatinnom rozvoji. Dokázanie, že niečo nie je racionálne, je ekvivalentné s dokázaním, že taká perióda neexistuje. Dokážeme, že žiadna taká perióda nemôže existovať.

[3] https://sk.wikipedia.org/wiki/Racionálne_č%C3%ADslo

Uvažujme nasledujúce dve operácie a dva pojmy. Nech p je číslo zložené z núl a jednotiek. Operácia p^s predstavuje číslo p napísané odzadu. Číslo p je symetrické (t. j. palindróm[4]), ak platí $p^s = p$. Operáciou p^i dostaneme inverzné číslo k číslu p, to je také, ktoré sa napíše z čísla p vymenením 0 za 1 a naopak. Antisymetrické číslo je také, pre ktoré platí $p^{is} = p$. Na poradí operátorov i a s nezáleží. Znakom | označíme spojenie čísel za seba. Rozmyslime si, že $(a|b)^i = a^i|b^i$, $(a|b)^s = b^s|a^s$.

Všimnime si, že číslo a_2 je antisymetrické číslo, a_3 je symetrické číslo a a_4 je antisymetrické číslo. Pre indukciu predpokladajme, že a_{2k-1} je symetrické číslo a a_{2k-2} je antisymetrické číslo, potom

$$(a_{2k})^{is} = (a_{2k-1}|a^i_{2k-1})^{is} = (a^i_{2k-1}|a_{2k-1})^s = a^s_{2k-1}|a^{is}_{2k-1} = a_{2k-1}|a^i_{2k-1} = a_{2k},$$

čiže a_{2k} je antisymetrické číslo za využitého predpokladu, že a_{2k-1} je symetrické. Ak a_{2k} je antisymetrické číslo, potom

$$a^s_{2k+1} = (a_{2k}|a^i_{2k})^s = a^{is}_{2k}|a^s_{2k} = a_{2k}|a^i_{2k} = a_{2k+1},$$

tak a_{2k+1} je symetrické číslo za využitia antisymetrickosti $a^{is}_{2k} = a_{2k}$, resp. $a^s_{2k} = a^i_{2k}$.

Označme p periódu dĺžky d. Taktiež vieme, že ak perióda existuje, musí niekde začať a jej začiatok si môžeme definovať na ľubovoľný iný neskorší člen postupnosti. Pre názornú ukážku $0.\overline{17} = 0.1\overline{71}$.

Môžeme predpokladať, že existuje a_{2i-1} také, že $a_{2i-1} = 0110\ldots p$. Potom $a_{2i} = 0110\ldots p|p\ldots = a_{2i-1}|p\ldots$. Keďže $a^s_{2i-1} = a_{2i-1}$ je symetrické, taktiež vieme, že číslo

$$a_{2i} = a_{2i-1}|a^i_{2i-1} = a_{2i-1}|a^{si}_{2i-1} = a_{2i-1}|(0110\ldots p)^{si} = a_{2i-1}|(p^s\ldots 0110)^i = a_{2i-1}|p^{si}\ldots 1001.$$

Za a_{2i-1} nasleduje p^{si}, ale zároveň to musí byť rovné p, takže $p = p^{si}$ je antisymetrické číslo.

Ak je dĺžka čísla p nepárna, t. j. $d = 2k + 1$, tak stredná cifra čísla p a p^{is} sú rôzne, a keďže musí platiť $p = p^{is}$, tak dostávame spor.

Ak je dĺžka párna, uvažujme následujúcu postupnosť $A = 01$, $B = 10$ a $b_2 = AB$, $b_3 = ABBA$ a tak ďalej. Číslo b_n má rovnaký tvar ako a_n, len namiesto 0, 1 máme A, B. Keď však dosadíme $A = 01$, $B = 10$, dostaneme $b_n = a_{n+1}$. Dôkaz indukciou, pre $n = 1$ platí $b_1 = A = 01 = a_2$. Ďalej

$$b_n = b_{n-1}|b^i_{n-1} = a_n|a^i_n = a^{n+1}.$$

Označme desatinné číslo $0.b$, ktoré má za desatinnou čiarkou znaky A, B namiesto 0, 1. Perióda p je zvolená tak, že začína na nepárnej pozícii. Preto pozostáva z úsekov dĺžky 2, ktoré sú A alebo B. To znamená, že $0.b$ je periodické s dĺžkou periódy $d/2$. Lenže $0.b$ je zároveň len prepísané $0.a$, kde píšeme A, B namiesto 0, 1. Takže $0.a$ je periodické aj s periódou dĺžky $d/2$. Avšak periódu p sme si mohli zvoliť najkratšiu možnú, a dostali sme kratšiu periódu ako p dĺžky $d/2$, čo je spor.

Preto taká perióda nemôže existovať a číslo $0.a$ nie je racionálne.

3.8 Krtko a Malý Snár

opravoval **Miloš**

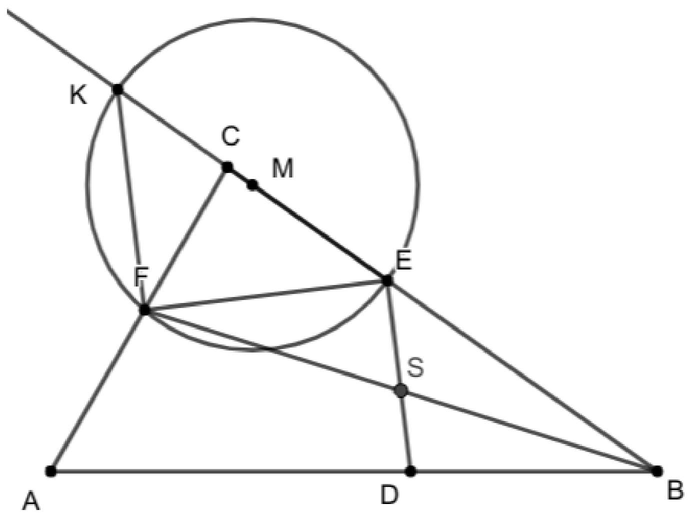
Zadanie. *Adam mal snár. V snári boli odpovede. Odpovedali na otázky. Na otázky typu „Aký význam má to, čo sa mi práve snívalo?“ Krtko mal sen. Snívalo sa mu o trojuholníku. Trojuholník však v snári nebol. Preto bol Krtko*

[4] *Známymi palindrómami sú napríklad kobyla ma malý bok, Alomomola, aktivitka.*

smutný, keď mu Adam povedal: „Prepáč Krtko, teraz budeš smutný, lebo trojuholník v mojom snári nie je.“ A tak bol Krtko smutný. Ale nemusel by byť. Pomôžte vyriešiť Krtkov sen, aby bol šťastný.

Je daný trojuholník ABC s bodom E na strane BC tak, že $|BE| > |EC|$. Zostrojte[5] *body D a F postupne na stranách AB a AC tak, aby uhol DEF bol pravý a zároveň aby úsečka DE delila úsečku BF na polovicu.*

Riešenie



Pozorovania

Predtým, ako popíšeme ako takéto body zostrojiť, pozrime sa na vlastnosti finálnej konštrukcie, ktorá vyplýva zo zadania. Vytvorme si bod K na polpriamke EC taký, že $|BE| = |EK|$. Zo zadania vieme, že $|BE| > |EC|$, z čoho vieme usúdiť, že bod K bude ležať mimo strany BC.

Označme si S priesečník DE a BF. Zo zadania vieme, že S je stredom úsečky BF. Keďže zároveň je bod E stredom úsečky BK, tak ES je strednou priečkou v trojuholníku FBK. O stredných priečkach vieme, že sú rovnobežné s treťou stranou trojuholníka, a teda $ES \parallel KF$.

Priamka EF pretína rovnobežné priamky ES a KF, z čoho vyplýva, že uhly DEF a EFK sú striedavé, majú teda rovnakú veľkosť. Keďže zo zadania máme $|\sphericalangle DEF| = 90°$, platí tiež $|\sphericalangle EFK| = 90°$. Preto bod F musí ležať na Tálesovej kružnici nad úsečkou EK.

Konštrukcia

Teraz keď už vieme čo to o vlastnostiach daného trojuholníka, môžeme popísať, ako by sme body D a F mohli skonštruovať.

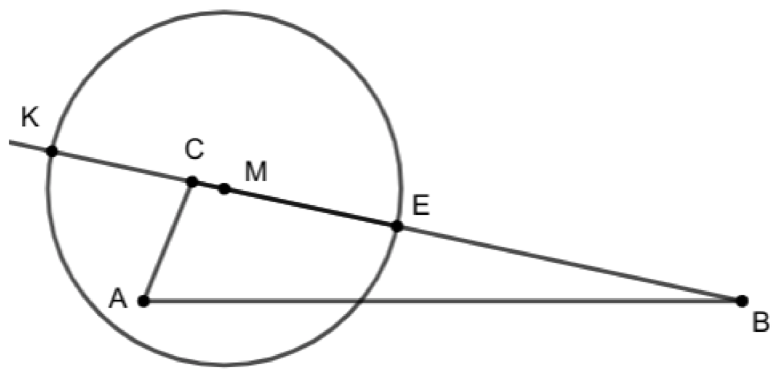
1. Vytvorme polpriamku EC a na nej bod K taký, že $|BE| = |EK|$.
2. Nájdime stred úsečky EK a označme ho M. Skonštruujme kružnicu k so stredom v M a polomerom $|MK|$.
3. Priesečník kružnice k a strany AC je hľadaný bod F.

[5] Ak ste sa s podobným typom úloh ešte nestretli, môže vám pomôcť krátky text na stránke: https://kms.sk/ako_riesit/konstrukcne_ulohy/

4. Skonštruujeme úsečku FE a na ňu kolmú priamku prechádzajúcu bodom E. Priesečník tejto priamky a strany AB je hľadaný bod D.

Je známe, že pomocou pravítka a kružidla vieme skonštruovať priamky, kružnice, stredy strán a kolmice. V našej konštrukcii sa nič iné nevyužíva, a teda sme schopný body D a F skonštruovať. V prvej časti riešenia sme zistili, že ak nejaké body D, F majú spĺňať podmienky zo zadania, tak to musia byť presne takto skonštruované body. To, že D, F skutočne spĺňajú podmienky zo zadania sa overí obráteným postupom. Keďže uhly KFE a FED sú pravé, tak KF a ED sú rovnobežné. Spolu s tým, že E je stred BK to znamená, že ES je stredná priečka v FBK, teda S je stred BF.

Čo sa môže pokaziť



Pri takejto konštrukcii však môže nastať problém. V bode 3 predpokladáme, že priesečník kružnice k a strany AC existuje. Ak však nastane situácia, kedy body A a C ležia oba vnútri kružnice k (inak povedané, platí $|EM| > |AM|$), tak tento priesečník neexistuje. Z pozorovaní však vieme, že bod F musí určite ležať na kružnici k kvôli tomu, aby bol uhol FED pravý. Preto vieme povedať, že pre takúto kombináciu trojuholníka ABC a bodu E nie je možné skonštruovať body D a F.

Podobne by sme mohli uvažovať v bode 4, či sa kolmica na FE vždy pretne so stranou AB. O uhle CED však vieme, že jeho veľkosť je menej ako 180°. Je to preto, lebo uhol FED má byť pravý a FEK je pravouhlý trojuholník, čiže uhol FEK je vždy menší ako 90°, čiže $|\sphericalangle CED| < 180°$. Preto bod D nebude mimo úsečky AB za bodom B. Keďže ED je rovnobežné s KF, tak $|\sphericalangle DEB| = |\sphericalangle FKE| < |\sphericalangle FCE|$, takže bod D nebude mimo úsečky AB ani za bodom A. Tým vieme usúdiť, že priesečník kolmice na FE prechádzajúcej bodom E a priamky AB bude vždy ležať medzi bodmi A a B.

3.9 Koriander, Majoránka, Škorica

opravoval **Peťo**

Zadanie. *Nech $n \geq 1$ a $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sú kladné reálne čísla, ktoré pre každé $k = 1, 2, \ldots, n$ spĺňajú nerovnosť $a_k \geq a_{k-1} + 1$. Dokážte, že*

$$1 + \frac{1}{a_0}\left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2 - a_0}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{a_n - a_0}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{a_n}\right).$$

Riešenie

Podľa Martina Kopčányho (mierne upravené)

Úlohu dokážeme indukciou pre k, kde naše k bude n zo zadania.

Základný prípad $k = 1$

Vtedy máme dokázať, že $1 + \frac{1}{a_0}\left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0}\right) \le \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)\left(1 + \frac{1}{a_1}\right)$.

Táto nerovnosť je ekvivalentná s nerovnosťami

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{a_0}\left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0}\right) &\le \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)\left(1 + \frac{1}{a_1}\right), \\
1 + \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_0(a_1 - a_0)} &\le 1 + \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_0 a_1}, \\
\frac{1}{a_0(a_1 - a_0)} &\le \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_0 a_1}, \\
a_1 &\le a_0(a_1 - a_0) + (a_1 - a_0), \\
a_1 &\le a_0 a_1 - a_0^2 + a_1 - a_0, \\
a_0 &\le a_0 a_1 - a_0^2, \\
1 &\le a_1 - a_0.
\end{aligned}$$

Posledná nerovnosť zo zadania platí. Všimnite si, že sme násobili $a_0,\ a_1 - a_0,\ a_1$, ale tieto hodnoty sú podľa zadania kladné, a preto sú nerovnosti ekvivalentné.

Týmto sme dokázali základný prípad pre $k = 1$.

Indukčný krok

Predpokladajme teda, že nerovnosť platí pre nejaké k. Vieme teda, že platí

$$\left(1 + \frac{1}{a_0}\right)\left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{a_k}\right) \ge 1 + \frac{1}{a_0}\left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{a_k - a_0}\right).$$

Označme si teraz $V = \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)\left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{a_k}\right)$ a $1 + M = 1 + \frac{1}{a_0}\left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{a_k - a_0}\right)$.

Vieme teda, že $V \ge 1 + M$.

Treba nám dokázať

$$\left(1 + \frac{1}{a_0}\right)\left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{a_k}\right)\left(1 + \frac{1}{a_{k+1}}\right) \ge 1 + \frac{1}{a_0}\left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{a_k - a_0}\right)\left(1 + \frac{1}{a_{k+1} - a_0}\right).$$

Po dosadení M a V:

$$V\left(1+\frac{1}{a_{k+1}}\right) \geq 1 + M\left(1+\frac{1}{a_{k+1}-a_0}\right).$$

Vynásobením indukčného predpokladu (kladným) výrazom $\left(1+\frac{1}{a_{k+1}}\right)$ dostaneme:

$$V\left(1+\frac{1}{a_{k+1}}\right) \geq (1+M)\left(1+\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

Na to aby sme dokázali indukčný krok, nám teda stačí ukázať, že $(1+M)\left(1+\frac{1}{a_{k+1}}\right) \geq 1 + M\left(1+\frac{1}{a_{k+1}-a_0}\right)$.

To je ekvivalentné s

$$\begin{aligned}
(1+M)\left(1+\frac{1}{a_{k+1}}\right) &\geq 1+M\left(1+\frac{1}{a_{k+1}-a_0}\right),\\
1+M+\frac{1}{a_{k+1}}+\frac{M}{a_{k+1}} &\geq 1+M+\frac{M}{a_{k+1}-a_0},\\
\frac{1}{a_{k+1}}+\frac{M}{a_{k+1}} &\geq \frac{M}{a_{k+1}-a_0},\\
(a_{k+1}-a_0)+M(a_{k+1}-a_0) &\geq Ma_{k+1},\\
(a_{k+1}-a_0) &\geq Ma_0.
\end{aligned}$$

Na ďalšie riešenie si miniindukciou ukážeme, že $a_l \geq l + a_0$. Pre základný prípad $l = 0$ to platí. Pri dokazovaní indukčného kroku vieme, že $a_l \geq l + a_0$, a teda $a_{l+1} \geq 1 + a_l \geq (l+1) + a_0$, čo bolo treba dokázať.

Pozrime sa na výraz Ma_0. Vieme, že

$$\begin{aligned}
Ma_0 &= a_0\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\dots\left(1+\frac{1}{a_k-a_0}\right)\\
&= \left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\dots\left(1+\frac{1}{a_k-a_0}\right).
\end{aligned}$$

Pre každé $i > 0$ vieme:

$$
\begin{aligned}
a_i - a_0 &\geq i > 0, \\
\frac{1}{i} &\geq \frac{1}{a_i - a_0} > 0, \\
\frac{i+1}{i} &\geq \left(1 + \frac{1}{a_i - a_0}\right) > 0, \\
\frac{2}{1}\frac{3}{2}\cdots\frac{k+1}{k} &\geq \left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{a_k - a_0}\right) = Ma_0, \\
\frac{k+1}{1} &\geq Ma_0.
\end{aligned}
$$

Preto $k + 1 \geq Ma_0$. Keďže už vieme, že $a_{k+1} - a_0 \geq k + 1$, tak máme $a_{k+1} - a_0 \geq Ma_0$, čo bolo treba na dokázanie indukčného kroku.

Krátke zhrnutie v postupnom (induktívnom) poradí:

- Dokážeme úlohu pre $k = 1$.
- Indukčný krok:
  - Miniindukciou dokážeme, že $a_l \geq l + a_0$.
  - Z toho dokážeme, že $Ma_0 \leq k + 1 \leq a_{k+1} - a_0$.
  - Ďalej nám z toho po úpravách vyplynie, že $(1 + M)\left(1 + \frac{1}{a_{k+1}}\right) \geq 1 + M\left(1 + \frac{1}{a_{k+1} - a_0}\right)$.
  - Z indukčného predpokladu dostaneme: $V\left(1 + \frac{1}{a_{k+1}}\right) \geq (1 + M)\left(1 + \frac{1}{a_{k+1}}\right) \geq 1 + M\left(1 + \frac{1}{a_{k+1} - a_0}\right)$.
  - Z čoho nám vyplynie, dôkaz indukčného kroku: $V\left(1 + \frac{1}{a_{k+1}}\right) \geq 1 + M\left(1 + \frac{1}{a_{k+1} - a_0}\right)$

3.10 Kategória Mocných Symbolov

opravoval **Juro**

Zadanie. *Racionálne číslo r nazvývame* mocné a powerful*, ak ho vieme vyjadriť v tvare*

$$\frac{p^k}{q}$$

pre nejaké nesúdeliteľné kladné celé čísla p, q a nejaké celé číslo $k > 1$. Nech a, b, c sú kladné racionálne čísla, pre ktoré platí $abc = 1$. Predpokladajme, že existujú kladné celé čísla x, y, z také, že $a^x + b^y + c^z$ je celé číslo. Dokážte, že každé z čísel a, b, c je mocné a powerful.

Riešenie

Na začiatok by som iba rád poznamenal, že táto úloha bola asi najťažšia úloha KMS za celý rok (odovzdali ju iba 4 ľudia). Bola veľmi technická a iba ťažko sa človek nestratí v značeniach.

Značenia:

- $a = \frac{a_1}{b_1}, \quad b = \frac{a_2}{b_2}, \quad c = \frac{a_3}{b_3}$, kde a_i, b_i sú nesúdeliteľné (t. j. zlomok je v základom tvare),
- $a_1 = p_1^{\alpha_1} \dots p_l^{\alpha_l}$ pre nejaké prvočísla p_i a prirodzené α_i.

Chceme dokázať, že $\mathrm{nsn}(\alpha_1, \dots, \alpha_l) > 1$. Potom sa a_1 dá vyjadriť ako mocnina vyššia ako 1, a teda a je mocné a powerful. Zo symetrie potom plynie že aj b, c sú mocné a powerful. Predpokladajme tiež $a_1 > 1$, ináč sa a_1 dá napísať triviálne ako k-ta mocnina 1. Teda a_1 naozaj obsahuje prvočíslo p_1 v svojom rozklade.

Pozorovanie 1 $a_1 a_2 a_3 = b_1 b_2 b_3$.

Dôkaz: To plynie z predpokladu $abc = 1$.

Pozorovanie 2 $b_1^x \mid b_2^y b_3^z, \quad b_2^y \mid b_1^x b_3^z, \quad b_3^z \mid b_1^x b_2^y$.

Dôkaz: Dokážeme iba prvé z nich, zvyšné sú symetrické. Zo zadania vieme, že

$$a^x + b^y + c^z = \frac{a_1^x b_2^y b_3^z + b_1^x a_2^y b_3^z + b_1^x b_2^y a_3^z}{b_1^x b_2^y b_3^z}$$

je celé číslo. Nutne teda b_1^x musí deliť celý čitateľ, $b_1^x \mid a_1^x b_2^y b_3^z + b_1^x a_2^y b_3^z + b_1^x b_2^y a_3^z$. No ale keďže b_1^x zjavne delí druhý a tretí člen a b_1^x je nesúdeliteľné s a_1^x, tak z toho toto pozorovanie plynie.

Pozorovanie 3 $p_1 \mid a_1, b_2, b_3$, *taktiež* $p_1 \nmid b_1, a_2, a_3$.

Dôkaz: To, že $p_1 \mid a_1$ plynie z definície čísla p_1. Celá časť $p_1 \nmid b_1, a_2, a_3$ plynie z nesúdeliteľnosti dvojíc a_i, b_i. Stačí teda dokázať $p_1 \mid b_2, b_3$. Keďže $a_1 a_2 a_3 = b_1 b_2 b_3$ a p_1 delí ľavú stranu, nutne $p_1 \mid b_2 b_3$. Ale z druhého pozorovania plynie, že ak $p_1 \mid b_2$, musí nutne deliť aj $b_1^x b_3^z$, no p_1 je nesúdeliteľné s b_1, a teda nutne musí deliť aj b_3. Analogicky ak $p_1 \mid b_3$, tak delí aj b_2. Keďže P_1 delí aspoň jedno z b_2, b_3, tak delí obe.

Pre tých čo nepoznajú p-adické značenie, tak $v_p(n)$ je najväčšia mocnina čísla p deliaca n. Napríklad $v_3(54) = 3$ pretože $3^3 \mid 54$ ale $3^4 \nmid 54$.

Pozorovanie 4 $v_{p_1}(b_2) \cdot y = v_{p_1}(b_3) \cdot z$.

Dôkaz: Keďže $b_2^y \mid b_1^x b_3^z$ no a p_1, b_1 sú nesúdeliteľné, tak nutne $p_1^{(v_{p_1}(b_2)y)} \mid p_1^{(v_{p_1}(b_3)z)}$. Teda $v_{p_1}(b_2)y \le v_{p_1}(b_3)z$. Opačne, z tretieho vzťahu $b_3^z \mid b_1^x b_2^y$ symetricky dostaneme, že $v_{p_1}(b_3)z \le v_{p_1}(b_2)y$.

To isté platí aj pre zvyšné prvočísla p_i pre všetky $i = 1, \dots, l : v_{p_i}(b_2) \cdot y = v_{p_i}(b_3) \cdot z$.

Pozorovanie 5 $\alpha_i = v_{p_i}(b_2) + v_{p_i}(b_3)$ *pre každé* $i \le l$.

Dôkaz: To je kombinácia prvého a tretieho pozorovania. Platí, že p_1 sa nachádza v ľavej strane rovnice $a_1 a_2 a_3 = b_1 b_2 b_3$ iba v čísle a_1, a to práve α_i krát. Opačne, na pravej strane rovnice sa nachádza v číslach b_2, b_3, a to práve $v_{p_i}(b_2)$ a $v_{p_i}(b_3)$ krát.

Finish: Zo štvrtého pozorovania plynie

$$\frac{y}{z} = \frac{v_{p_1}(b_3)}{v_{p_1}(b_2)} = \frac{v_{p_2}(b_3)}{v_{p_2}(b_2)} = \cdots = \frac{v_{p_l}(b_3)}{v_{p_l}(b_2)}.$$

Značenie:

- $k_i = \mathrm{NSD}[v_{p_i}(b_3), v_{p_i}(b_2)]$,
- Dole prepíš $d_i = \frac{v_{p_1}(b_2)}{k_i}$, hore prepíš $h_i = \frac{v_{p_1}(b_3)}{k_i}$. Teda $\frac{h_i}{d_i}$ je zlomok $\frac{v_{p_i}(b_3)}{v_{p_i}(b_2)}$ v základnom tvare.
- $\frac{y}{z} = \frac{h}{d}$ pre nejaké nesúdeliteľné $h, d \geq 1$.

Potom

$$h + d = h_i + d_i = \frac{v_{p_i}(b_2) + v_{p_i}(b_3)}{k_i}.$$

Nutne teda $h + d \mid v_{p_i}(b_2) + v_{p_i}(b_3)$ pre každé $i \leq l$. Z piateho pozorovania ale máme $\alpha_i = v_{p_i}(b_2) + v_{p_i}(b_3)$, teda aj $1 < h + d \mid \alpha_i$. To je ale to, čo sme chceli dokázať. Našli sme číslo väčšie ako jedna ktoré delí všetky alfy, a teda $\mathrm{nsn}(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) > 1$, číslo a je mocné a powerful.