Korešpondenčný matematický seminár
XLIII. ročník, 2021/2022
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Riešenia 1. kola zimnej časti

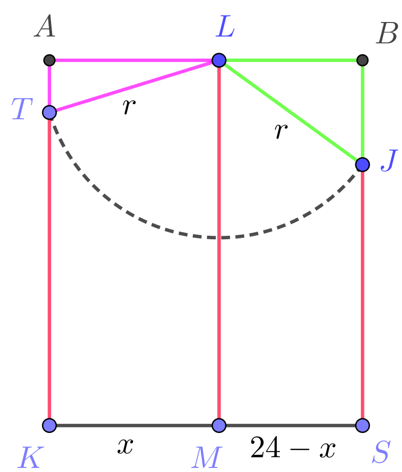
1.1 Kde Mám Snúbenicu ($\kappa \leq 1$)

opravovali **Kubko** a **Filip**

Zadanie. *Tarzan stojí na vrchole stromu vysokého 24 m. Chce sa dostať za svojou snúbenicou Jane na vrchol stromu, ktorý je vysoký 20 m. Pne týchto stromov sú vzdialené od seba 24 m a niekde medzi týmito dvoma stromami stojí tretí, z ktorého vo výške 28 m vychádza liana. Túto lianu drží Tarzan na svojom strome a chcel by sa zhupnúť ku Jane tak, aby sa po liane nemusel šplhať hore ani dolu. V akej vzdialenosti musí byť peň prostredného stromu od pňa Tarzanovho stromu, aby sa to Tarzanovi podarilo?*

Riešenie

Najskôr je dobré nakresliť si ilustračný obrázok.



Body K, M, S postupne reprezentujú kmene 1., 2. a 3. stromu. Bod T je vrchol 1. stromu, na ktorom stojí Tarzan, bod L je miesto, v ktorom je liana upevnená o 2. strom a bod J je vrchol 3. stromu, na ktorom stojí Jane. Keďže zatiaľ nepoznáme presnú polohu bodu L, nakreslíme si do nášho obrázku dva pomocné body A, B, ktoré ohraničujú priestor (úsečku), v ktorom sa bod L môže nachádzať. Tieto body A, B si zvolíme tak, aby nám v obrázku vznikol obdĺžnik $KSBA$. Teraz si môžeme všimnúť, že nám v obrázku vznikli dva pravouhlé trojuholníkyATL, BJL. V týchto trojuholníkoch si vyjadríme všetky dĺžky strán.

$$|TK| = 24, \quad |AK| = |LM| = |BS| = 28, \quad |JS| = 20.$$

$$|AT| = |AK| - |TK| = 28 - 24 = 4,$$

$$|BJ| = |BS| - |JS| = 28 - 20 = 8.$$

$$|KS| = 24, \quad |KM| = x = |AL|, \quad |MS| = 24 - x = |LB|.$$

$$|TL| = r = |JL|.$$

Keď už máme zistené všetky potrebné strany trojuholníkov, tak si môžeme ľahko zapísať Pytagorovu vetu v oboch z nich:

$$|TL|^2 = |TA|^2 + |AL|^2, \qquad |JL|^2 = |JB|^2 + |BL|^2,$$
$$r^2 = 4^2 + x^2, \qquad r^2 = 8^2 + (24 - x)^2.$$

Vidíme, že sa nám rovnajú ľavé strany $r^2 = r^2$, teda sa musia rovnať aj pravé strany rovníc, ktoré dáme do rovnosti a vyriešime rovnicu:

$$4^2 + x^2 = 8^2 + (24 - x)^2,$$
$$16 + x^2 = 64 + (24 - x)^2,$$
$$16 + x^2 = 64 + x^2 - 48x + 24^2 \qquad / - x^2,$$
$$16 = 64 - 48x + 24^2 \qquad / + 48x - 16,$$
$$48x = 64 + 24^2 - 16,$$
$$x = 13.$$

Vieme, že x označuje vzdialenosť medzi bodmi A, L, čo je vzdialenosť medzi Tarzanovým stromom a stromom s lianou, ktorú sme chceli vypočítať, teda výsledná vzdialenosť je 13 metrov.

1.2 Krásnu Máme Svadbu ($\kappa \leq 2$) — opravovali **Mimi** a **Baška**

Zadanie. *Tarzan a snúbenica sa vybrali za kanianskou veštico, aby im poradila so svadbou. Tá im povedala, že ich svadba bude krásna, len ak bude spĺňať veľmi špeciálne podmienky. O počte hostí (h), počte chodov (c) a počte svadobných darov (d) musí platiť:*

$$h + c + d = 47,$$
$$h \cdot c = d,$$

pričom všetky tri čísla sú kladné a celé. Nájdite všetky možné hodnoty (h, c, d) tak, aby Tarzan a snúbenica mali krásnu svadbu.

Riešenie

Jeden zo spôsobov ako riešiť sústavu rovníc je vyjadriť si neznámu z jednej rovnice a dosadiť ju do druhej. Môžeme si všimnúť, že d je v druhej rovnici vyjadrené ako

$$d = h \cdot c.$$

Môžeme ho teda dosadiť do prvej,

$$h + c + d = 47,$$

$$h + c + h \cdot c = 47.$$

Ak zmeníme poradie členov v rovnici, mohlo by nám to začať niečo pripomínať,

$$h \cdot c + h + c = 47.$$

Ak si však ešte stále nie sme istý, čo by sme s tým vedeli robiť, môžeme sa pohrať s členmi rovnice a skúsiť niečo vymyslieť. Na začiatok by sme mohli skúsiť vyňať h:

$$h \cdot (c + 1) + c = 47.$$

Teraz si môžeme všimnúť, že ak by sme na obe strany pripočítali 1, tak by sme mali dve zátvorky $(c + 1)$:

$$h \cdot (c + 1) + c = 47,$$

$$h \cdot (c + 1) + c + 1 = 48.$$

Toto ďalej upravíme na

$$h \cdot (c + 1) + 1 \cdot (c + 1) = 48,$$

$$(h + 1) \cdot (c + 1) = 48.$$

Keďže h, c, d majú byť celé kladné čísla, číslo 48 máme napísané v tvare súčinu dvoch prirodzených čísel. Rozložíme si číslo 48 na jeho všetky možné súčiny:

$$\begin{aligned} 48 &= 1 \cdot 48 \\ &= 2 \cdot 24 \\ &= 3 \cdot 16 \\ &= 4 \cdot 12 \\ &= 6 \cdot 8. \end{aligned}$$

Keďže h a c predstavujú rôzne špeciálne podmienky, možnosti

$$(h + 1, c + 1) = (2, 24) \qquad \text{a} \qquad (h + 1, c + 1) = (24, 2)$$

považujeme za rôzne. Teraz môžeme jednotivé kombinácie čísiel dosadiť za zátvorky a dorátať h, c a d:

$1 \cdot 48 = 48$	$(h + 1) = 1$	$(c + 1) = 48$	$h = 0$	$c = 47$	$d = h \cdot c = 0 \cdot 47 = 0$
	$(h + 1) = 48$	$(c + 1) = 1$	$h = 47$	$c = 0$	$d = h \cdot c = 47 \cdot 0 = 0$

Keďže h, c, d majú byť celé kladné čísla, tak pre $1 \cdot 48 = 48$ neexistuje riešenie, pre ostatné štyri súčiny budeme postupovať analogicky. Výsledkom bude osem trojíc hodnôt pre h, c, d:

h+1	2	24	3	16	4	12	6	8
c+1	24	2	16	3	12	4	8	6
h	1	23	2	15	3	11	5	7
c	23	1	15	2	11	3	7	5
d	23	23	30	30	33	33	35	35

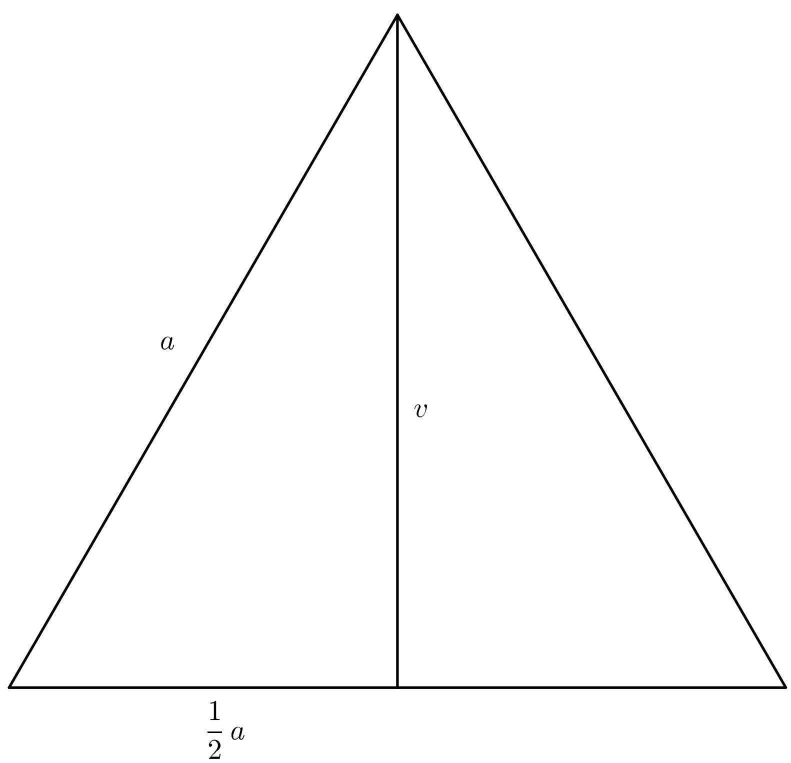
1.3 KaPor Medzipolia Spája ($\kappa \leq 3$)

opravoval **Mišo M.**

Zadanie. *Po krásnej svadbe nasleduje návšteva katastrálneho portálu (KaPor), aby novomanželia úspešne spojili svoje majetky. Tarzan má v rovine pole v tvare rovnostranného trojuholníka s obsahom S_1 a Jane pole v tvare rovnostranného trojuholníka s obsahom S_2. Skonštruujte pomocou pravítka a kružidla[1] pole v tvare rovnostranného trojuholníka, ktorého obsah bude $S_1 + S_2$.*

Riešenie

Na narysovanie rovnostranného trojuholníka by sme ideálne chceli poznať dĺžku jeho strany. My však máme informáciu o jeho obsahu. Na začiatok sa teda pokúsime vyjadriť podmienku zo zadania pomocou strany trojuholníka.



[1] Ak ste sa s podobným typom úloh ešte nestretli, môže vám pomôcť krátky text na stránke: https://kms.sk/ako_riesit/konstrukcne_ulohy/.

Majme teda rovnostranný trojuholník so stranou a. Jeho obsah bude $\frac{1}{2}a \cdot v$, kde v je výška tohto trojuholníka. Keďže je však rovnostranný, jeho výška je zároveň ťažnicou. Dostávame teda pravouhlý trojuholník s odvesnami $\frac{1}{2}a$, v a preponou a. Potom podľa Pytagorovej vety

$$v^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2,$$

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Obsah teraz už ľahko vyjadríme ako

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Teraz prepíšeme podmienku zo zadania pomocou strán. Strany trojuholníkov s obsahom S_1 a S_2 budú postupne a_1 a a_2, stranu trojuholníka, ktorý chceme skonštruovať označíme a_3. Podmienka teda hovorí

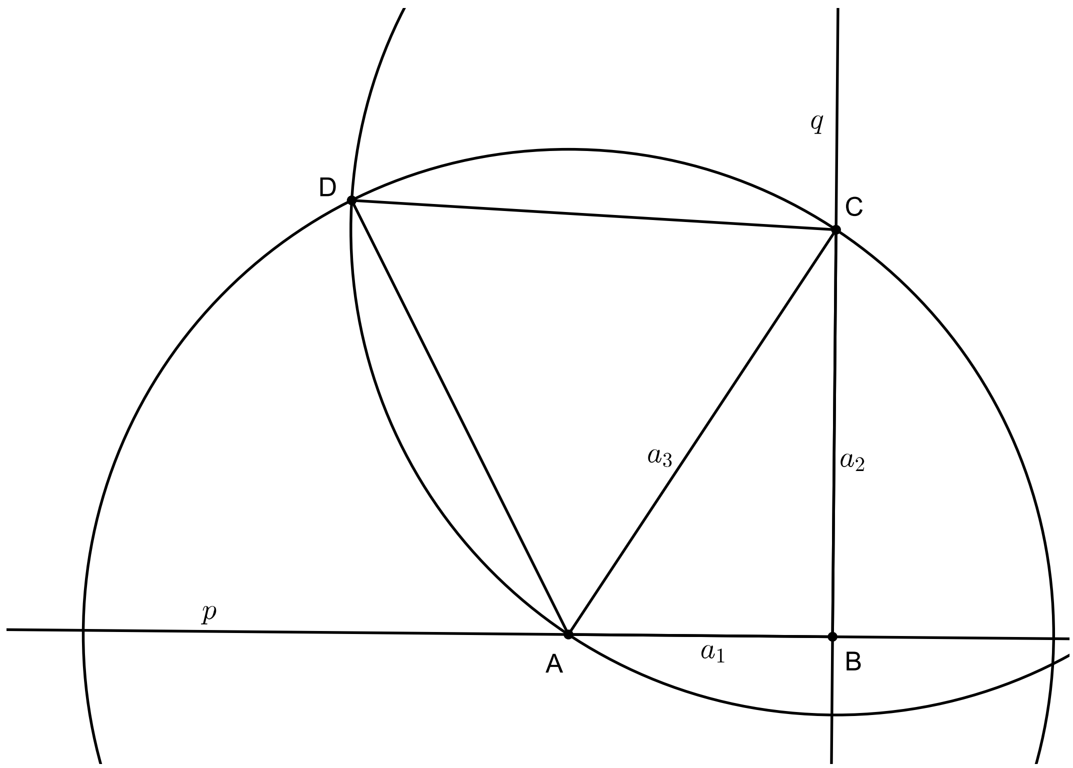
$$\frac{\sqrt{3}}{4}a_1^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}a_2^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a_3^2,$$

$$a_1^2 + a_2^2 = a_3^2.$$

Pri úprave sme celú rovnicu vydelili číslom $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Strany trojuholníkov teda spĺňajú podmienku Pytagorovej vety. Na narysovanie strany a_3 nám stačí skonštruovať pravouhlý trojuholník s odvesnami a_1, a_2. Pustime sa do toho.

Na začiatok si pripomeňme veci, ktoré vieme robiť, a ktoré sa nám zídu. Samozrejme vieme rysovať kružnice, priamkou spojiť dva body, ale aj prenášať dĺžky úsečiek a rysovať kolmice cez nejaký bod.

Ako prvé si teda spravme priamku p a prenesme na ňu dĺžku a_1 - úsečka AB. Teraz spravíme kolmicu na p cez bod B (priamka q). Na ňu prenesieme dĺžku a_2 (úsečka BC) a nový bod C spojíme s bodom A. Teraz sme dostali dĺžku a_3 (úsečka AC). Na nájdenie zvyšného bodu trojuholníka so stranou a_3 spravíme kružnice z krajných bodov úsečky AC s polomerom a_3. Ich priesečník (bod D) bude zvyšným bodom hľadaného trojuholníka s obsahom $S_1 + S_2$. A máme hotovo.



1.4 Keď Motyka Strelí ($\kappa \leq 5$)

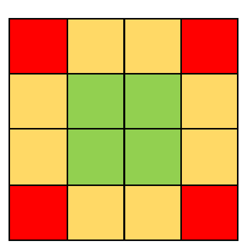
opravovali **Lucy** a **Simona**

Zadanie. *Každý môže súťažiť, no nie každý môže pracovať na poli. Tarzan so snúbenicou potrebovali okopať novovzniknuté pole, no prihlásilo sa im až priveľa algebraikov.*

*Pre pochybenie úradov má pole tvar štvorčekovej mriežky $n \times n$, kde $n \geq 2$. Na niektorých políčkach sú algebraici, **pričom žiadni dvaja nie sú na tom istom políčku**. Každý algebraik kope motykou v jednom políčku, otočený jedným zo štyroch smerov rovnobežných so stranami poľa. Problémom je, že občas motyka vystrelí. Potom letí v smere, ktorým je algebraik otočený, až vyletí z poľa von alebo zasiahne iného algebraika. Koľko najviac algebraikov môžeme na pole umiestniť tak, aby s istotou nikto nebol zasiahnutý, keď motyka strelí? Umiestnením algebraika určujeme aj to, ktorým smerom bude otočený.*

Riešenie

Rozdeľme si pole na rohové políčka (červené), krajné políčka (oranžové) a stredové políčka (zelené).



Uvažujme krajné políčka. Ak v nich je algebraik, môžeme ho bez ujmy na všeobecnosti otočiť smerom von z tabuľky. Teraz uvažujme stredové políčka. Pokiaľ by v takomto políčku mohol byť algebraik, ktorý je otočený zvisle a na nikoho nemieri, môžeme ho namiesto toho umiestniť na krajné políčko v tomto smere a nič tým nepokazíme. Pokiaľ by bolo toto políčko už obsadené, tento algebraik nemohol byť ani v stredovom políčku. Zároveň ho nikto nebude ohrozovať – ani v stĺpci, pretože to by ho ohrozoval už predtým, ani v riadku, pretože predtým sme otočili všetkých algebraikov na krajných políčkach smerom von.

Rovnako vieme presunúť algebraikov na stredových políčkach, ktorý sú otočení vodorovne, na krajné políčka v krajných dvoch stĺpcoch. Ľubovoľné rozmiestnenie spĺňajúce zadanie vieme takýmto spôsobom postupne upraviť tak, že sú všetci na obvode a nové rozmiestnenie stále spĺňa zadanie.

Takto vieme potupne umiestniť najviac $2(n-2)$ algebraikov otočených zvisle na krajných políčkach a $2(n-2)$ otočených vodorovne na krajných políčkach. To je spolu $4n-8$ algebraikov. Jediné políčka, ktoré môžeme ešte obsadiť sú rohové, a tie sú 4. Algebraik na rohovom políčku môže mieriť ľubovoľným z dvoch smerov, smerom von z poľa. Spolu teda vieme umiestniť najviac $4n-4$ algebraikov.

1.5 Krásni, Múdri, Skromní ($\kappa \leq 8$)

opravovali **M&M** a **Lukáš**

Zadanie. *Tarzan a Jane majú deti. Každé dieťa má tri vlastnosti, krásu, múdrosť a skromnosť, a každá z vlastností má nejakú celočíselnú hodnotu. Dieťa, ktorého krása, múdrosť a skromnosť sú postupne rovné k, m a s, nazývame* poslušným*, ak jeho vlastnosti spĺňajú nasledovné podmienky:*

- *k, m, s tvoria rastúcu aritmetickú postupnosť, teda $m-k=s-m>0$,*
- *$k^2+m^2+s^2=m(m-k)(s-m)$.*

Nájdite všetky trojice (k, m, s), ktoré môžu byť vlastnosťami poslušného dieťaťa.

Riešenie

Na začiatok si všimnime, že v úlohe máme tri písmenká k, m, s, o ktorých vieme, že tvoria aritmetickú postupnosť. Aritmetická postupnosť je však jednoznačne určená nejakým svojím členom a diferenciou, čím by sme si vedeli znížiť počet neznámych z troch na dve. Ďalšie zaujímavé pozorovanie je, že k a s sú rovnako vzdialené od m a keby sme ich vymenili v druhej podmienke, nič sa nezmení. Čo znamená, že nám môže pomôcť, keď si túto aritmetickú postupnosť určíme práve jej stredným členom m, pretože sa potom niektoré členy môžu jednoduchšie vykrátiť.

Nech teda čísla zo zadania tvoria aritmetickú postupnosť s diferenciou $d=m-k=s-m>0$. Potom si k a s vzhľadom na m vieme vyjadriť ako $k=m-d$ a $s=m+d$. Poďme sa pozrieť, čo sa nám následne stane s druhou podmienkou:

$$
\begin{aligned}
k^2+m^2+s^2 &= m(m-k)(s-m),\\
(m-d)^2+m^2+(m+d)^2 &= mdd,\\
m^2-2md+d^2+m^2+m^2+2md+d^2 &= md^2,\\
3m^2 &= md^2-2d^2,\\
\frac{3m^2}{m-2} &= d^2, \qquad (1)
\end{aligned}
$$

tu v poslednom kroku delíme výrazom $m-2$, takže nesmie byť 0. Pre $m=2$ však nedostaneme žiadne riešenie rovnice.

Pozrime sa ďalej na najväčšieho spoločného deliteľa čísel m^2 a $m-2$ - to je najväčšie také celé číslo, že aj m^2 aj $m-2$ sú oba násobkom tohto čísla. Označme si ho p. Potom ale existujú čísla a, b také, že $m^2 = pa$ a $m-2 = pb$, kde a, b sú nesúdeliteľné (tzn. nemajú žiadneho spoločného deliteľa). Teraz by sme sa radi dozvedeli niečo o čísle p. Všimnime si, že ak zoberieme nejaký násobok m^2 a pripočítame k nemu (resp. od neho odpočítame) nejaký násobok $m-2$, tak keďže obe čísla m^2 aj $m-2$ sú deliteľné p, musí byť deliteľný p aj výsledný súčet (resp. rozdiel). Zjavne nám takýto postup dá pomerne veľa informácie, ak nájdeme konštantu nezávislú od m, ktorá je deliteľná p. Hľadáme teda také čísla x, $y \in \mathbb{Z}$, že

$$xm^2 + y(m-2)$$

je konštanta vzhľadom na m. Tu si však môžeme spomenúť na vzorec na rozdiel štvorcov, vďaka ktorému $(m-2)(m+2) = m^2 - 4$. Keď teda zvolíme $x = 1$ a $y = -(m+2)$, dostaneme:

$$4 = m^2 - (m-2)(m+2) = pa - pb(m+2) = p[a - b(m+2)],$$

z čoho máme, že $p \mid 4$[2], a teda najväčší spoločný deliteľ m^2 a $m-2$ je 1, 2 alebo 4.

Dosadením $m^2 = pa$ a $m-2 = pb$ do rovnice (1) dostaneme

$$d^2 = \frac{3m^2}{m-2} = \frac{3pa}{pb} = \frac{3a}{b}.$$

No a keďže d^2 je celé číslo, musí byť celé číslo aj zlomok na pravej strane. Nakoľko sú však a, b nesúdeliteľné, vytvára nám to podmienku $b \mid 3$, čo však vieme zapísať aj tak, že existuje celé číslo l také, že $bl = 3$. Dosadením

$$b = \frac{m-2}{p}$$

z toho vieme dostať

$$\frac{(m-2)l}{p} = 3$$

a následne $(m-2)l = 3p$, z čoho vidíme, že $m-2 \mid 3p$. Pre $p \in \{1, 2, 4\}$ z toho dostávame postupne podmienky $m-2 \mid 3$, $m-2 \mid 6$, $m-2 \mid 12$. Delitele trojky sú však aj deliteľmi dvanástky a analogicky delitele šestky sú aj deliteľmi dvanástky, preto stačí preskúmať $m-2 \mid 12$. Zjavne stačí preskúmať kladné delitele, pretože pre záporné delitele by bol menovateľ zlomku na ľavej strane (1) záporný. Potom by bol celý zlomok záporný a nemohli by sme ho odmocniť.

$m-2$	1	2	3	4	6	12
m	3	4	5	6	8	14
d na základe (1)	$3\sqrt{3}$	$2\sqrt{6}$	5	$3\sqrt{3}$	$4\sqrt{2}$	7

Ako vidíme, jediné celočíselné riešenia sú $(m, d) \in \{(5, 5), (14, 7)\}$, a teda $(k, m, s) \in \{(0, 5, 10), (7, 14, 21)\}$.

Poznámka: Skúsený riešiteľ si z (1) môže všimnúť, že $m-2$ má tvar $3 \cdot n^2$, pre nejaké prirodzené číslo n. Preto pri overovaní deliteľov 12 stačí overiť len tie, ktoré majú požadovaný tvar: $3 \cdot 1, 3 \cdot 2^2 = 12$.

[2] Tento zápis hovorí, že p delí 4. Inými slovami, že 4 je deliteľné číslom p bezo zvyšku. Respektíve, že existuje celé číslo k také, že $pk = 4$.

1.6 Konečnosť Matriky Spochybňujem

opravovali **Mišo S.** a **Timka**

Zadanie. *Každý úradník v Kanianke je spoľahlivý alebo nespoľahlivý. Tarzan potrebuje zapísať svoje deti na matrike. Žiaľ, jemu priradený úradník je nespoľahlivý. Navyše každý úradník v Kanianke pošle svojho zákazníka za svojím najobľúbenejším kolegom. Jeden úradník môže byť najobľúbenejší pre viacero svojich kolegov. Názory úradníkov sa v čase nemenia, teda daný úradník má celý život toho istého najobľúbenejšieho kolegu. Pre každé prvočíslo p platí, že po tom, ako bol Tarzan poslaný p-krát za ďalším úradníkom, sa nachádza u spoľahlivého úradníka. Podobne pre každé kladné celé číslo n, ktoré nie je prvočíslom, platí, že po tom, ako bol Tarzan poslaný n-krát za ďalším úradníkom, sa nachádza u nespoľahlivého úradníka. Dokážte, že úradníkov v Kanianke je nekonečne veľa.*

Riešenie

Dokazovať, že niečoho je nekonečne veľa, vyzerá byť tvrdý oriešok. Asi najjednoduchší spôsob, ako niečo také dokázať, je postupovať sporom – predpokladať, že úradníkov je iba konečne veľa a vyvodiť z toho niečo, čo určite nebude platiť. Potom náš predpoklad konečného počtu úradníkov musel byť nesprávny a je ich teda nekonečne veľa.

Prepokladajme teda, že úradníkov je konečne veľa a označme ich počet u. Úradníci si Tarzana posielajú medzi sebou, každý ho pošle vždy za tým istým. Tarzan chodí stále za ďalšími a ďalšími úradníkmi a keďže tých je konečne veľa, časom sa musí nejaký zopakovať – konkrétne po návšteve $u+1$ úradníkov sa už musel nejaký zopakovať, keďže ich je len u rôznych. Keď sa úradník zopakuje, je zrejmé, že Tarzan začne chodiť v kruhu, pretože to, za kým ho úradník pošle, závisí len od toho, pri kom stojí. Čiže keď v dvoch rôznych časoch stojí pri tom istom úradníkovi, celá postupnosť ďalších úradníkov bude rovnaká.

Za jedným úradníkom môže byť Tarzan poslaný od viacerých iných, takže jeho cesta má nejaký začiatok (predperiódu, ktorá môže byť prázdna, ale nemusí) a potom sa začne cykliť.

Vezmime si teraz nejaké prvočíslo $p > u$. Také existuje, pretože prvočísel je nekonečne veľa, ale čísel menších alebo rovných u je len konečne veľa. Po p presunoch Tarzan stojí u spoľahlivého úradníka a zároveň už určite je na cykle, po ktorom bude chodiť donekonečna. Pokúsime sa ukázať, že po vhodnom počte prechodov cyklu bude poradové číslo toho istého úradníka zložené, a teda úradník by mal byť nespoľahlivý. To vytvorí spor, pretože ten istý úradník má byť spoľahlivý aj nespoľahlivý zároveň, čo je očividne nezmysel.

Označme dĺžku cyklu n (počet úradníkov, resp. počet presunov na ňom, je to to isté číslo). Potom k tomuto spoľahlivému úradníkovi príde Tarzan po p, $p+n$, $p+2n$, … krokoch. V tejto postupnosti chceme nájsť zložené číslo. Tu si stačí uvedomiť, že stačí po cykle prejsť p-krát, to bude Tarzan mať za sebou presne $p + pn = p(n+1)$ presunov, čo určite nie je prvočíslo, zapísali sme ho ako súčin dvoch činiteľov väčších ako 1. Mal by teda stáť u nespoľahlivého úradníka, ale tento úradník bol aj p-ty v poradí, a teda spoľahlivý.

Náš predpoklad, že úradníkov je iba konečne veľa, nás doviedol ku sporu. Úradníkov preto musí byť nekonečný počet.

1.7 Koláče Máme Sústredné

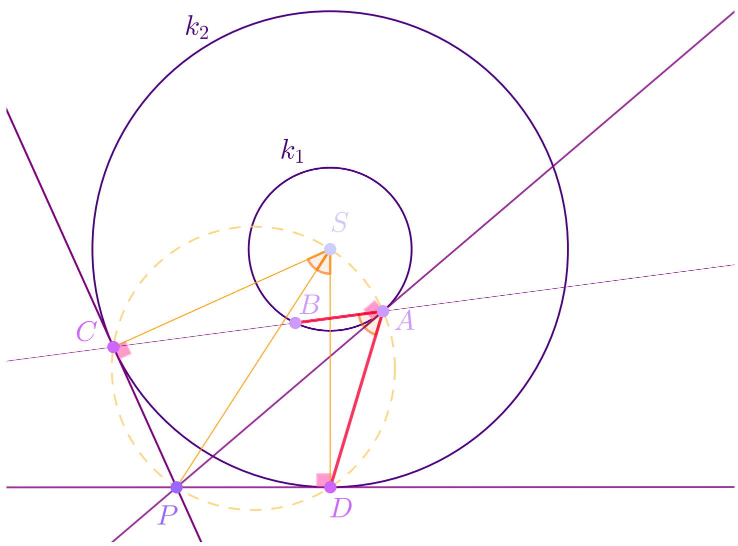
opravovali **Pedro** a **Viki**

Zadanie. *Snúbenica varila obed. Povedala si, že osie hniezda znejú fajn. Osie hniezdo vyzerá ako kružnica k_1, ktorá sa nachádza vnútri kružnice k_2, pričom obe kružnice majú spoločný stred. Na kružnici k_1 ležia dva body A, B tak, že AB nie je priemerom kružnice k_1. Polpriamka AB pretína kružnicu k_2 v bode C. Dotyčnica ku kružnici k_1 v bode A a dotyčnica ku kružnici k_2 v bode C sa pretínajú v bode P. Z bodu P spravíme druhú dotyčnicu ku kružnici k_2, ktorá* *sa jej dotkne v bode D (kde $D \neq C$). Do kuchyne vletela osa Amoska Pichľavá, no deti jej neverili, že je skutočne osa. Dokážte, že AP je osou uhla BAD.*

Riešenie

Jediné, čo k tejto úlohe budeme potrebovať, je nájsť a využiť tetivové štvoruholníky - teda tie štvoruholníky, ktorých vrcholy ležia na jednej kružnici. Ako prvé si však dodefinujme stred kružníc k_1 a k_2 ako S.

Začneme tým, že sa pozrieme na štvoruholník $SCPD$. Je dobre známym faktom, že takýto štvoruholník tvorený dotyčnicami a polomermi je symetrický podľa priamky SP. Môžeme si to však aj ukázať na tom, že $|SC| = |SD|$ (obe sú polomer k_2), $|\sphericalangle SCP| = |\sphericalangle SDP| = 90°$ (medzi polomerom a dotyčnicou) a strana SP je spoločná. Trojuholníky SPD a SPC sú teda zhodné podľa vety *Ssu*. Poznamenajme, že $|\sphericalangle CSP| = |\sphericalangle DSP|$. Takisto si všimnime, že $|\sphericalangle SCP| + |\sphericalangle SDP| = 90° + 90° = 180°$, teda vieme rovno aj povedať, že štvoruholník $SCPD$ je tetivový.



Teraz sa pozrieme aj na štvoruholník $SCPA$. Uhol SAP je takisto pravý (keďže AP leží na dotyčnici), a teda opäť vieme, že $|\sphericalangle SCP| + |\sphericalangle SAP| = 90° + 90° = 180°$, teda aj tieto 4 body sú na kružnici. Už z toho vieme povedať, že všetky body S, C, P, D, A sú na jednej kružnici, keďže ako dobre vieme, kružnicu definujú 3 body – v tomto prípade S, C, P – a už sme ukázali, že na kružnici tvorenej týmito bodmi je aj bod D, aj bod A.

Iná kružnica, ktorú by sme ešte mohli použiť, je napríklad $SPDA$, kde sú oba uhly SAP aj SDP pravé, teda sú obvodové k tetive SP, takže aj body S, P, D a A sú na kružnici.

Teraz, keď už vieme o všetkých bodoch na kružnici, môžeme začať veselo prenášať uhly po obvode. Takže $|\sphericalangle CSP| = |\sphericalangle CAP|$, rovnako $|\sphericalangle PSD| = |\sphericalangle PAD|$, a keďže sme si už na začiatku ukázali, že $|\sphericalangle CSP| = |\sphericalangle DSP|$, tak aj pre prenesené uhly platí $|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle PAD|$. Ešte treba dodať, že keďže bod B leží na úsečke AC, tak $|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle PAD|$, z čoho už vidíme, že AP rozdeľuje uhol BAD na rovnaké časti – teda je jeho osou.

Iný spôsob ako sa odpichnúť od 5 bodov na kružnici je využiť vedomosť o Švrčkovom bode v bode P. Švrčkov bod (alebo aj Švrk) je taký bod na kružnici opísanej ľubovoľnému trojuholníku XYZ, v ktorom sa os strany YZ

tohto trojuholníka pretína s osou uhla pri vrchole X.[3] Je to priesečník 3 čiar (kružnica, os strany, os uhla), no na jeho jasné definovanie nám stačia už ľubovoľné 2 z nich, pričom tretia ním musí tiež prechádzať. V tejto úlohe sa pozrieme na trojuholník CAD. Bod P v ňom jednak leží na osi strany CD (keďže C a D sú symetrické podľa priamky SP) a dvak leží na kružnici tomuto trojuholníku opísanej, teda je jeho Švrkom. Spojnica Švrka P a vrcholu A teda musí byť jedine osou uhlu CAD, a tým pádom aj uhla BAD.

1.8 Kanianske Metro Spojazdnené

opravovali **Jožo** a **Kika**

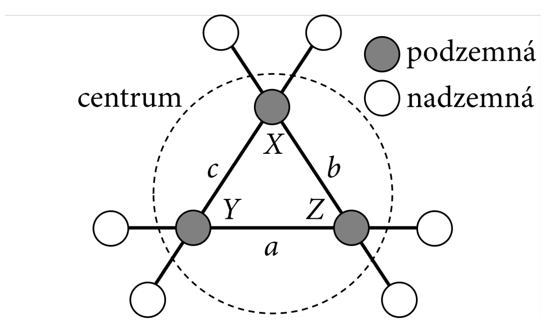
Zadanie. *V Kanianke sa rozhodli zaviesť metro. Každá linka má mať aspoň štyri zastávky a ľubovoľné dve linky majú mať spoločnú práve jednu zastávku. Dokážte, že pre každý taký návrh liniek možno rozdeliť zastávky na podzemné a nadzemné tak, že každá linka bude obsahovať zastávky oboch typov.*

Riešenie

Na začiatok uvažujme prípad, kedy všetky linky majú spoločnú zastávku Z. Vtedy zastávka Z bude nadzemná a zvyšné podzemné, čím zjavne každá linka bude obsahovať zastávky oboch typov.

Teraz predpokladajme, že nemáme zastávku, ktorá je na všetkých linkách. Zjavne v takom prípade máme aspoň tri linky. Uvažujme teda ľubovoľné dve linky a, b a označme si ich spoločnú zastávku ako Z. Vieme, že niektorá linka zastávkou Z neprechádza – označme si ju c. Ďalej si označme spoločnú zastávku liniek a, c ako Y a spoločnú zastávku liniek b, c ako X. Zastávky X, Y a Z budeme spoločne nazývať ako *centrum*.

Naša konštrukcia vyzerá nasledovne: nadzemné zastávky budú práve tie zastávky, ktoré sú na linkách a, b, c a zároveň nie sú v centre. Teraz ukážeme, že táto konštrukcia je správna. Každá z liniek a, b, c má zastávky oboch typov. Zoberme si linku l rôznu od a, b, c. Ak majú linky a, l spoločnú nadzemnú zastávku, tak linka l môže mať najviac dve ďalšie zastávky nadzemné – najviac po jednej na linkách b, c; teda linka l musí mať aj podzemnú zastávku. Ostáva prípad, kedy linky a, l majú spoločnú podzemnú zastávku, bez ujmy na všeobecnosti nech je to zastávka Z. Potom linka l neprechádza zastávkou Y, ani X, lebo s linkou a, ani b, nemôže mať spoločné dve zastávky. Preto spoločná zastávka liniek l, c leží mimo centra, a teda je nadzemná. Linka l teda vo všetkých prípadoch má zastávky oboch typov, čím je náš dôkaz ukončený.



Komentár k riešeniu

Riešenie, ktoré uvádzame, je napísané v čistej forme – teda bez omáčok okolo, ako naň prísť. Preto k nemu na záver povieme nejaké komentáre. Takéto riešenia sa aj ľahko opravujú, lebo v nich pekne vidno dôležité kroky.

[3] Ak sa chceš so Švrkom zoznámiť bližšie, odporúčame https://prase.cz/archive/36/serial.pdf (str. 29).

Riešenia takýchto úloh vyzerajú tak, že opíšeme spôsob, ako rozdelíme zastávky na dva typy a potom ukážeme, že toto naše rozdelenie je správne. Nájsť také rozdelenie vyžaduje zväčša veľa skúmania, hrania sa, kreslenia si, ... a potom všímania súvislostí, pravidelností a systémov. Na začiatok môže pomôcť skúsiť si kresliť linky postupne. Prvé dve sa dajú nakresliť jednoznačne: musia mať spoločnú práve jednu zastávku Z. Tretia môže prechádzať zastávkou Z alebo každú s prvých dvoch liniek môže pretínať v iných zastávkach. Týmto dostávame nejakú štruktúru, ako to musí v našich linkách vyzerať. A na niečom takom vieme založiť riešenie, napr. naše vzorové.

Pri hľadaní konštrukcie v takýchto úlohách sa oplatí mať na pamäti nasledovnú vec. Čím jednoduchšie rozdelenie zastávok vymyslíme, tým ľahšie sa nám bude písať riešenie, a taktiež sa nám môže jednoduchšie ukazovať jeho správnosť. Jednoduchý systém však neznamená ľahko objaviteľný. Často sa za ním skrýva nejaká netriviálna myšlienka, prípadne nejaký trik. No ak sa nastavíme na hľadanie niečoho takého pekného, môže nám to uľahčiť riešenie. Ak si chcete hľadanie jednoduchých opisov vyskúšať, môžete si skúsiť vyriešiť 14. úlohu 2. zimného kola KMS 2007/08 alebo úlohu z celoštátneho kola MO 65-A-III-3.

1.9 Kalkulačkou Manipulujeme Súčiny

opravoval **Tomáš Gianetta**

Zadanie. *Deti našli kalkulačku. Na začiatku naťukajú do kalkulačky číslo* 1. *V každom kroku si náhodne vyberú jedno z čísel* 3, 5, 8, 9 *(každé s rovnakou pravdepodobnosťou) a vynásobia ním číslo v kalkulačke. Tento krok potom opakujú, kým sa nedostanú k číslu, ktoré po delení* 13 *dáva zvyšok* 10 *alebo* 12. *Tarzanko sa stavil, že tento proces skončí na zvyšku* 10*, Janka si zas vybrala zvyšok* 12. *S akou pravdepodobnosťou vyhrá Tarzanko stávku*[4]*?*

Riešenie

Najprv urobíme niekoľko zaujímavých pozorovaní.

- Nezaujíma nás konkrétne číslo na kalkulačke, iba jeho zvyšok po delení 13.
- Nezaujímajú nás čísla, ktoré boli na kalkulačke v minulosti.[5].

Nech p_i, $1 \le i \le 12$ je pravdepodobnosť, že ak sa práve teraz na kalkulačke nachádza číslo so zvyškom i, Tarzanko niekedy v budúcnosti vyhrá. Našou úlohou je nájsť hodnotu p_1.

Zrejme

$$p_{12} = 0, \quad p_{10} = 1.$$

Nasledujúcim spôsobom vieme vyjadriť pravdepodobnosť p_i pomocou pravdepodobností čísel, ktoré sa na kalkulačka môžu objaviť v ďalšom kroku. Keď na kalkulačke je číslo i, v nasledujúcom ťahu sa na kalkulačke môžu objaviť čísla $(3i, 5i, 8i, 9i)$, každé s pravdepodobnosťou jedna štvrtina. To, že Tarzanko vyhrá, sa môže stať jedným z nasledujúcich štyroch spôsobov: (ďalšie číslo na kalkulačke bude $3i$ a Tarzanko vyhrá, ďalšie číslo na kalkulačke bude $5i$ a Tarzanko vyhrá, …). Celková pravdepodobnosť p_i výhry Tarzanka je súčet pravdepodobností týchto štyroch udalostí. Ich pravdepodobnosti sú

$$\left(\frac{1}{4}p_{3i}, \frac{1}{4}p_{5i}, \frac{1}{4}p_{8i}, \frac{1}{4}p_{9i}\right).$$

Napríklad dostaneme

[4] Kalkulačka nemá obmedzený počet cifier, teda dokáže zobraziť ľubovoľne veľké číslo.

[5] Procesy s touto vlastnosťou sa nazývajú Markovove, viac sem: `https://en.wikipedia.org/wiki/Markov_chain`

$$p_1 = \frac{1}{4}(p_3 + p_5 + p_8 + p_9).$$

Podobne

$$p_2 = \frac{1}{4}(p_6 + p_{10} + p_3 + p_5)$$

a analogicky vieme napísať rovnicu pre každé i, $1 \leq i \leq 12$.

Tým dostávame sústavu 10 rovníc o 10 neznámych, ktorú stačí vyriešiť.

Následne zistíme $p_1 = \frac{21}{46} \approx 0.457$.

Bonus

Ešte si ukážeme ako šikovným spôsobom bolo možné znížiť počet neznámych. Hru zo zadania si možno predstaviť ako dvojrozmernú tabuľku na obrázku.

1	5	12	8
9	6	4	7
3	2	10	11

- na začiatku hry sa nachádzame v ľavom hornom rohu
- násobenie číslom 3 znamená krok smerom hore
- násobenie číslom 5 znamená krok smerom vpravo
- násobenie číslom 8 znamená krok smerom vľavo
- násobenie číslom 9 znamená krok smerom dole
- ak by sme mali urobiť krok mimo tabuľky, objavíme sa na opačnom konci tabuľky (ak sa nachádzame na čísle 1 a pôjdeme dohora, objavíme sa na čísle 3)
- ak sa dostaneme na políčko s číslom 10 vyhral Tarzanko, ak na políčko s číslom 12 vyhrala Janka

Ďalej budeme políčka označovať iba číslami.

Pozorovania:

- Rozhodujúce pozície 10, 12 sú symetricky uložené vzhľadom na každú z pozícií označených číslami 9, 6, 4, 7. To znamená $p_9 = p_6 = p_4 = p_7 = \frac{1}{2}$.

- Pozícia rozhodujúcich políčok je voči 1, 3 zrkadlovo otočená (10 má rovnakú pozíciu voči 3 ako 12 voči 1 a naopak). To znamená $p_1 = 1 - p_3$.

- Podobné pozorovanie možno urobiť aj s dvojicami $(5, 2)$, $(8, 11)$, teda $p_5 = 1 - p_2$, $p_8 = 1 - p_{11}$.

Týmto spôsobom je možné znížiť počet neznámych na 3 a stačí vyriešiť sústavu troch rovníc.

1.10 Kultúrny Mirov Seminár

opravoval **Miloš**

Zadanie. *V kultúrnom dome v Kanianke si Miro spravil seminár o funkcionálnych rovniciach. Na začiatku seminára si z batohu víťazoslávne vytiahol papier s pripravenou funkcionálnou rovnicou. Papier sa mu však v batohu pokrčil a nebol viac rovný.*

Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla a, b platí nasledujúca nerovnosť:

$$f(a)f(b) + f(ab) \leq a + b.$$

Riešenie

Pri funkcionálnych rovniciach a nerovnostiach veľmi často býva užitočným prvým krokom dosadiť si za argumenty funkcie nejaké konkrétne čísla a skúsiť z toho odpozorovať niečo zaujímavé. Ako kandidáti na tieto konkrétne argumenty sa ponúkajú najčastejšie čísla 0, 1 alebo −1. Skúsme to využiť aj v tomto prípade.

Ak dosadíme do nerovnosti $a = b = -1$, dostaneme

$$\begin{aligned} f(-1)f(-1) + f(1) &\leq -2, \\ f(-1)^2 + f(1) &\leq -2, \\ f(1) &\leq -2 - f(-1)^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Môžeme si všimnúť, že $-f(-1)^2$ je vždy záporné, a teda táto nerovnica implikuje, že

$$f(1) \leq -2. \tag{2}$$

Podobne môžeme postupovať s $a = b = 1$:

$$\begin{aligned} f(1)f(1) + f(1) &\leq 2, \\ f(1)^2 + f(1) &\leq 2, \\ f(1)^2 + f(1) - 2 &\leq 0, \\ (f(1) - 1)(f(1) + 2) &\leq 0, \\ f(1) &\in \langle -2; 1 \rangle. \end{aligned} \tag{3}$$

Skombinovaním (2) a (3) dostaneme, že $f(1) = -2$. Ak sa vrátime k (1) a dosadíme hodnotu $f(1)$, vieme získať hodnotu pre $f(-1)$:

$$
\begin{aligned}
f(-1)^2 + f(1) &\leq -2,\\
f(-1)^2 - 2 &\leq -2,\\
f(-1)^2 &\leq 0,\\
f(-1) &= 0.
\end{aligned}
$$

Získali sme dosádzaním konkrétnych čísel nejaké informácie o hľadaných funkciách. Pokúsme sa využiť tieto dve hodnoty v náš prospech. Chceli by sme nájsť nejaké informácie o hľadanej funkcii aj pre všeobecné argumenty. Dosaďme teda do nerovnosti $a = x$ a $b = 1$:

$$
\begin{aligned}
f(x)f(1) + f(x) &\leq x + 1,\\
-2f(x) + f(x) &\leq x + 1,\\
-f(x) &\leq x + 1,\\
f(x) &\geq -x - 1. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Podobne postupujme aj pri dosadení $a = -x$ a $b = -1$:

$$
\begin{aligned}
f(-x)f(-1) + f(x) &\leq -x - 1,\\
0f(-x) + f(x) &\leq -x - 1,\\
f(x) &\leq -x - 1. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Skombinovaním (4) a (5) dostávame $-x - 1 \leq f(x) \leq -x - 1$, čiže $f(x) = -x - 1$.

Zistili sme, že $f(x) = -x - 1$ je jedinou funkciou $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takou, že f má potenciál spĺňať nerovnosť zo zadania. Už nám ostáva len overiť, či tú nerovnosť naozaj spĺňa pre všetky argumenty z $\mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
f(a)f(b) + f(ab) &\leq a + b,\\
(-a - 1)(-b - 1) + (-ab - 1) &\leq a + b,\\
ab + a + b + 1 - ab - 1 &\leq a + b,\\
a + b &\leq a + b. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Z (6) jasne vidíme, že nerovnosť platí pre všetky možné hodnoty $a, b \in \mathbb{R}$. Dokázali sme teda, že $f(x) = -x - 1$ je jedinou funkciou, pre ktorú platí nerovnosť zo zadania.