Korešpondenčný matematický seminár
XLIII. ročník, 2021/2022
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

# Riešenia 2. kola zimnej časti

## 2.1 Kvantum Máme Šošovice ($\kappa \leq 1$) opravovali **David** a **Baška**

**Zadanie.** *Vedúci išli na nákupy. V Kópe predávajú šošovicu balenú po $p^2 - 1$ zrnkách, kde $p \geq 5$ je prvočíslo. Dokážte, že 24 vedúcich ši vie špravodlivo*[1] *rozdeliť šošovicu bez ohľadu na to, ktoré balenie kúpia.*

### Riešenie

*Vzorové riešenie tejto úlohy si môžeš pozrieť aj ako video na našom YouTube kanáli* `www.youtube.com/KorMatSem`.

Ako prvé si môžeme všimnúť, že $p^2 - 1$ je rozdiel štvorcov, a teda si to vieme upraviť na $(p-1) \cdot (p+1)$. Teda nám stačí ukázať, že $24 \mid (p-1) \cdot (p+1)$. Vieme, že číslo je deliteľné 24 práve vtedy, ak je deliteľné 3 a 8, keďže $3 \cdot 8 = 24$ a zároveň 3 a 8 sú nesúdeliteľné.

Môžeme si všimnúť, že $p - 1$ , $p$ , $p + 1$ sú tri po sebe idúce čísla, a teda práve jedno z nich bude deliteľné 3. Keďže $p$ je prvočíslo ($p \geq 5$), tak nemôže byť deliteľné 3, teda buď $p - 1$ alebo $p + 1$ je deliteľné 3. Takže sme ukázali, že $3 \mid (p-1) \cdot (p+1)$.

Zároveň si môžeme všimnúť, že $p - 1$ a $p + 1$ sú obidve párne čísla, keďže všetky prvočísla ($p \geq 5$) sú nepárne. Tu sa môžeme zamyslieť a skúsiť si k pôvodnej trojici čísiel pripísať ďalšie v rade, teda dostaneme $p-1, p, p+1, p+2$. Teraz máme 4 po sebe idúce čísla, z ktorých práve jedno je deliteľné 4. Vieme, že $p$ a $p + 2$ sú nepárne, teda buď $p - 1$ alebo $p + 1$ je deliteľné 4 a druhé z nich je deliteľné 2. Takže sme ukázali, že $8 \mid (p-1) \cdot (p+1)$.

Z čoho, podľa našej prvej úvahy, vyplýva, že $24 \mid (p-1) \cdot (p+1)$, a teda $24 \mid p^2 - 1$.

## 2.2 Koľko Mušíme Šliapať ($\kappa \leq 2$) opravoval **Tomáš S.**

**Zadanie.** *Mišo a Mišo ša rozhodujú, ako najrýchlejšie zohnať všetko potrebné, tak ša zaštavili pri mape obchodu. Jeden potrebuje prejšť uličku šo zeleninou, druhý uličky š mäšom. Potrebujú overiť, či obaja prejdú rovnakú vzdialenošť.*

*Predajňa Kópu má tvar trojuholníka $ABC$. Tomu vpíšeme kružnicu a označme $Š$ jej štred. Uvažujme rovnobežku šo štranou $AC$ prechádzajúcu bodom $Š$ a označme $M$ jej priešečník šo štranou $AB$. Podobne uvažujme rovnobežku šo štranou $BC$ prechádzajúcu bodom $Š$ a označme $N$ jej priešečník šo štranou $AB$. Dokážte, že obvod trojuholníka $MNŠ$ je rovnaký ako dĺžka štrany $AB$.*

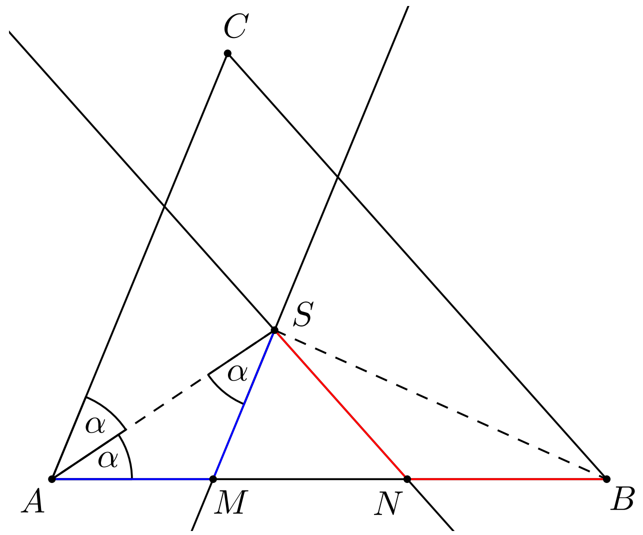
### Riešenie

Ako by sme mohli dokázať, že obvod trojuholníka $SMN$ ($O_{SMN}$) je rovnaký ako dĺžka strany $AB$? Obe sa skladajú z troch úsečiek (trojuholník $SMN$ z úsečiek $SM$, $MN$, $NS$, strana $AB$ z úsečiek $AM$, $MN$, $NB$) a dokonca jednu z nich, úsečku $MN$, majú spoločnú. Môže nám napadnúť, čo keby platilo, že všetky tri úseky obvodu $SMN$ sú rovnako dlhé ako úseky strany $AB$, t. j. čo keby platilo $|AM| = |MS|$ a $|NS| = |NB|$? Toto nemusí byť pravda na to, aby

[1] T. j. každý vedúci dostane rovnako veľa zrniek šošovice.

$|AB| = O_{SMN}$, ale ak by to bola pravda a podarilo by sa nám to dokázať, tak dokážeme aj rovnosť $|AB| = O_{SMN}$. Tak poďme na to.

Stred vpísanej kružnice $S$ je priesečníkom osí uhlov trojuholníka $ABC$, takže $AS$ je os uhla $CAM$. To znamená $|\sphericalangle CAS| = |\sphericalangle SAM|$, označme tieto uhly $\alpha$. Keďže $CA$ a $SM$ sú rovnobežné, využitím striedavých uhlov dostávame, že $|\sphericalangle MSA| = |\sphericalangle SAC| = \alpha$. Vidíme, že uhly $MAS$ a $MSA$ majú rovnakú veľkosť $\alpha$, takže trojuholník $AMS$ je rovnoramenný. Preto jeho ramená majú rovnakú dĺžku, $|AM| = |MS|$.




Analogicky sa dokáže, že trojuholník $SNB$ je rovnoramenný, teda $|SN| = |NB|$. Dokázali sme, že obvod trojuholníka $SMN$ a úsečka $AB$ sa skladajú z troch rovnakých úsekov

$$O_{SMN} = |SM| + |MN| + |NS| = |AM| + |MN| + |NB| = |AB|,$$

a teda majú rovnakú dĺžku.

***Poznámky***

1. Viacerí z vás vo svojom riešení rozpisovali aj dôkaz rovnoramennosti trojuholníka $SNB$, napriek tomu, že je to v podstate presne to isté ako dôkaz rovnoramennosti $AMS$. Samozrejme to nie je chyba, ale prečo si neušetriť robotu, keď sa dá. Dôvod prečo toto netreba rozpisovať je, že trojuholníky $AMS$ a $SNB$ sú symetricky definované vzhľadom na výmenu bodov $A, B$. To znamená, že keby sme označili body $A, B$ naopak, tak trojuholníky $AMS$ a $SNB$ sa vymenia, takže ak je jeden rovnoramenný, tak zo symetrie musí byť aj druhý rovnoramenný.
2. Na dôkaz rovnoramennosti trojuholníka $ASM$ sme potrebovali vyjadriť uhol $ASM$. Iný spôsob ako vyjadriť tento uhol je, že uhly $CAM$ a $SMN$ sú súhlasné, takže $|\sphericalangle SMN| = 2\alpha$, $|\sphericalangle SMA| = 180° - 2\alpha$ a uhol $ASM$ dopočítame z trojuholníka $ASM$, kde súčet vnútorných uhlov musí byť 180°.

## 2.3 Kolmošť Magazínu Šarm ($\kappa \leq 3$)

opravovali **Mišo M.** a **Danko**

**Zadanie.** *Mišo si kúpil časopiš Šarm, v ktorom je úloha nájšť dešať rozdielov medzi obrázkami. Na jednom obrázku je pravouhlý trojuholník, ktorý nemá žiadne dve štrany rovnako dlhé. Druhý obrázok chýba. Mišo si teda povedal,* *že si rozdiely špraví šám. Vzal ši všetky možné (kladné) rozdiely dĺžok štrán a poškladal ši z nich vlaštný. Dokážte, že tento nový trojuholník nie je pravouhlý.*

**Riešenie**

Označme si strany pôvodného trojuholníka $a, b, c$. Keďže vieme, že žiadne dve nie sú rovnako veľké, môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že platí $a < b < c$. Strana $c$ bude teda preponou tohto trojuholníka, aj keď túto vlastnosť napokon nevyužijeme. Keďže $c$ je najdlhšia a $a$ je najkratšia, bude dĺžka najdlhšej strany v novom trojuholníku $(c - a)$. Zvyšné strany sú vďaka predpokladaným nerovnostiam $(c - b)$ a $(b - a)$.

Teraz by sme mohli predpokladať, že nový trojuholník je pravouhlý, a dosadiť dĺžky do Pytagorovej vety. Následné úpravy by viedli ku sporu, napríklad s faktom, že $a, b, c$ sú všetko rôzne dĺžky. V skutočnosti sa to dá ešte o niečo jednoduchšie. Vieme si totiž všimnúť, že platí

$$(c - a) = c - b + b - a = (c - b) + (b - a).$$

Na to, aby z týchto dĺžok bolo možné poskladať trojuholník, musí platiť trojuholníková nerovnosť. V tomto konkrétnom prípade by ľavá strana musela byť ostro menšia ako pravá, čo neplatí. Mišov nový trojuholník tak nie je ani len trojuholníkom, nemôže teda byť pravouhlý.

## 2.4 Krájať Mušeli Šmatlavo ($\kappa \leq 5$) opravovala **Lucy**

**Zadanie.** *Mišovia kúpili chlieb. Keďže ši ho Mišovia nezvládli nakrájať v šupermarkete, tak ši ho mušia teda nakrájať nožom. Nôž je tupý a Mišovia šmatlaví, takže žiadne dva krajce chleba nemajú rovnakú výšku ani rovnakú hrúbku. Nech $n \geq 2$ je celé čížlo označujúce počet krajcov chleba. Mišo ich uložil do chlebníka od najnižšieho po najvyšší zľava doprava. Každú minútu Mišovia vezmú nejaké dva šušedné krajce také, že ľavý krajec je širší a nižší než pravý, a vymenia ich.*

*Mišovia odmietli ješť chlieb, pokým nebude zoradený podľa hrúbky. Dokážte, že bez ohľadu na to, aké ťahy robia Mišovia, po konečnom počte minút nebudú môcť špraviť žiadny ďalší ťah a krajce budú vtedy zoradené vzoštupne podľa hrúbky zľava doprava.*

**Riešenie**

Vieme, že Mišovia budú robiť ťahy, kým budú môcť. Tiež vieme, že máme konečný počet krajcov chleba a konečný počet spôsobov, ako ich usporiadať. Ďalej je isté, že ak sa raz dva chleby vymenia, už nikdy sa nebudú môcť vymeniť nazad (chlieb sa ocitne napravo od krajca, ktorý je vyšší). Preto sa nám nikdy nezopakuje usporiadanie chlebov, a keďže usporiadaní je konečný počet, tak po konečnom počte ťahov Mišovia musia skončiť.

Uvažujme najužší krajec, označme ho $K$. Čo ak by sme nikdy nepohli chlebom $K$? Je len konečný počet výmen, ktoré môžeme urobiť bez toho, aby sme pohli $K$. Pokiaľ $K$ nie je celkom vľavo, určite sa teda dostaneme do situácie, kedy nebudeme môcť pohnúť žiadnym krajcom okrem tohto. V takejto situácii budú určite všetky chleby naľavo od $K$ nižšie (tak boli rozostavené na začiatku) aj širšie (pretože $K$ je najužší). Teda určite vieme posunúť $K$ doľava a je to jediný ťah, ktorý vieme spraviť, takže ním musíme pohnúť. Pokiaľ stále nie je najviac vľavo, ako sa len dá, môžeme túto úvahu zopakovať. Opäť bude možný len konečný počet ťahov bez pohnutia $K$ a potom týmto krajcom určite budeme musieť pohnúť. Pokiaľ sa $K$ dostalo na najľavejšiu pozíciu, tak nám zostáva usporiadať už len $n - 1$ krajcov.

V tomto bode môžeme sledovať pozície nového $K_1$, čo je nový najužší krajec. Tento časom stretne rovnaký osud a niekedy sa bude musieť dostať na druhú najľavejšiu pozíciu. Ak tento postup zopakujeme $n-1$ krát, určite usporiadame všetky krajce podľa hrúbky za konečný počet minút a žiaden ďalší ťah už nebude možné urobiť.

## 2.5 Kofola, Mäšo, Šaláty ($\kappa \le 8$)

opravoval **Matúš**

**Zadanie.** *Počaš chlebovej krízy ši Mišovia zašli na obed do štravovacieho zariadenia. Jedlá a nápoje šú označené prirodzenými číšlami, pričom ponúkajú kofolu (k), mäšo (m) a šaláty (š). V zľave šú však len išté kombinácie.*

*Určte všetky trojice kladných celých čísel* $(k, m, \check{s})$, *pre ktoré platí*

$$km\check{s} = 3(k + m + \check{s}).$$

**Riešenie**

Označme:
$L := km\check{s}$,
$P := 3(k + m + \check{s})$.

**Prvým zjavným pseudoriešením úlohy** je $k = m = \check{s} = 3$. Čo je to však *pseudoriešenie*? Jednoducho ide o jedno správne riešenie našej úlohy, pričom nejaké ďalšie správne riešenia vieme dostať tak, že preusporiadame hodnoty nášho pseudoriešenia. Nejde však o nejak štandardizovaný pojem.

Poďme sporom dokázať, že nesmie súčasne platiť $k > 2 \wedge m > 2 \wedge \check{s} > 2$, okrem prípadu kedy $k = m = \check{s} = 3$. Predpokladajme, že by mohlo platiť $k > 2 \wedge m > 2 \wedge \check{s} > 2$. Dokážeme, že potom $L \neq P$ okrem prípadu, kedy $k = m = \check{s} = 3$. Označme $M :=$ [2]$\max\{k, m, \check{s}\}$. Potom $L \geq 3 \cdot 3 \cdot M = 9M$ a súčasne $P \leq 3(M + M + M) = 9M$. Rovnosť v oboch prípadoch nastáva jedine ak $a = b = c = 3$. Preto nesmie platiť, že $k > 2 \wedge m > 2 \wedge \check{s} > 2$, okrem prípadu kedy $k = m = \check{s} = 3$.

Nech BÚNV $k \leq m \leq \check{s}$. Z predošlého zistenia dostávame, že $k = 1 \vee k = 2$. Rozoberme teraz oba prípady.

1. $k = 1$. Analogickým spôsobom vieme dokázať, že nesmie naraz platiť $m > 6 \wedge \check{s} > 6$. Preto $m \leq 6$. Rozoberme teraz všetky možnosti.
   - $m = 1$. Riešením rovnice s jednou neznámou dostávame, že $\check{s} = -3$, pričom $-3 \notin \mathbb{Z}^+$, preto v tomto prípade nedostávame žiadne nové riešenie úlohy.
   - $m = 2$. Dostávame $\check{s} = -9$, čo opäť nebude riešením úlohy.
   - $m = 3$. Riešením lineárnej rovnice dospejeme k nepravdivému výroku $0 = 12$, čo opäť zrejme nebude riešením úlohy.
   - $m = 4$. Dostávame **druhé pseudoriešenie úlohy** $k = 1, m = 4, \check{s} = 15$.
   - $m = 5$. Dostávame **tretie pseudoriešenie úlohy** $k = 1, m = 5, \check{s} = 9$.
   - $m = 6$. Dostávame **štvrté pseudoriešenie úlohy** $k = 1, m = 6, \check{s} = 7$.

[2] Ak náhodou tento operátor nepoznáte, ide o operátor, ktorý si matematika požičala od svojej dcéry, informatiky. Znamená asi toľko, že symbol na strane pri dvojbodke *je definovaný ako* výraz na druhej strane operátora. Teda v našom prípade značí $M$ je definovavé ako $\max\{k, m, \check{s}\}$. Ak by vás zaujímal rozdiel medzi := a =, môžete sa o tom čo-to dočítať na tejto stránke.

2. $k = 2$. Analogickým spôsobom ako na začiatku riešenia vieme dokázať, že nesmie naraz platiť $m > 3 \wedge \check{s} > 3$. Preto $2 \leq m \leq 3$. Rozoberme teraz všetky možnosti.

   - $m = 2$. Dostávame **piate pseudoriešenie úlohy** $k = 2$, $m = 2$, $\check{s} = 12$.
   - $m = 3$. Dostávame **šieste pseudoriešenie úlohy** $k = 2$, $m = 3$, $\check{s} = 5$.

Riešením úlohy sú potom všetky možné rôzne permutácie hodnôt postupne z každého pseudoriešenia úlohy. Presnejšie, nech $P_1 = \{(3,3,3)\}$,
$P_2 = \{(1, 4, 15), (1, 15, 4), (4, 1, 15), (4, 15, 1), (15, 1, 4), (15, 4, 1)\}$,
$P_3 = \{(1, 5, 9), (1, 9, 5), (5, 1, 9), (5, 9, 1), (9, 1, 5), (9, 5, 1)\}$,
$P_4 = \{(1, 6, 7), (1, 7, 6), (6, 1, 7), (6, 7, 1), (7, 1, 6), (7, 6, 1)\}$,
$P_5 = \{(2, 2, 12), (2, 12, 2), (12, 2, 2)\}$,
$P_6 = \{(2, 3, 5), (2, 5, 3), (3, 2, 5), (3, 5, 2), (5, 2, 3), (5, 3, 2)\}$.

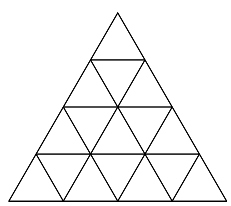
Potom množinou riešení úlohy je množina $A = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5$.

## 2.6 Karé Mierne Šťavnaté

opravovali **Timea** a **Andy**

**Zadanie.** *Mišovia ši objednali pečené kuracie štehná š ryžou a kompótom. Tie ša však už minuli, tak ši Mišovia objednali pomaly pečené bravčové karé. To ša pečie tak pomaly, až ši Mišovia začali krátiť čaš hraním ša šo šervítkami.*

*Šervítok je $n^2$, kde $n > 1$ je prirodzené číšlo, a každá má tvar rovnoštranného trojuholníka šo štranou dĺžky $1$. Navyše má každá z nich jednu z $k$ farieb, kde $1 < k < n^2$. Z každej farby je rovnako veľa šervítok. Mišovia z nich poškladali veľký rovnoštranný trojuholník šo štranou dĺžky $n$. Napr. pre $n = 4$ by veľký trojuholník vyzeral takto:*



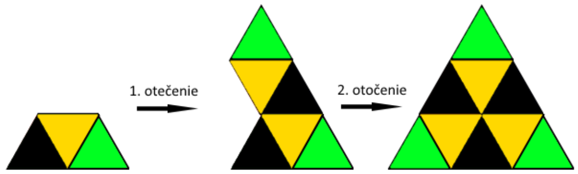
*Keď boli hotoví, zištili, že nech ho ľubovoľne otočia (v rovine, kde trojuholník leží, teda bez zrkadlového preklopenia), pričom bude pokrývať tú ištú oblašť ako pôvodne, zafarbenie trojuholníka bude vyzerať štále rovnako. Určte všetky ušporiadané dvojice číšel $(n,\ k)$, pre ktoré ša taký trojuholník poškladať dá.*

### Riešenie

Zo zadania vieme, že počet servítok $s$ je rovnaký pre každú z $k$ farieb, teda musí platiť, že $k \cdot s = n^2$, teda $k \mid n^2$.

Všetky rotácie pravidelného trojuholníka v rovine (okolo ťažiska) sú práve tri otočenia $\rho$: o $120°$, $240°$ a $360° = id$ čo sa nazýva aj identita, lebo nám to transformuje náš trojuholník do pôvodného stavu.

Poďme konštruovať náš trojuholník nasledovne. Keďže vieme, že trojuholník má vyzerať po každom otočení rovnako, tak vlastne môžeme poskladať jednu jeho tretinu, ktorou otočením o naše rotácie $\rho$ dostaneme celý trojuholník, viď obrázok. Lenže máme dva typy trojuholníkov. Také ktoré majú $3t$ častí, s tými nemáme problém, a také, ktoré majú $3t + 1$ častí.




Lebo keď si rozdelíme všetky prirodzené čísla $n$ podľa zvyškov po delení 3, teda zvyšky 0, 1 a 2, tak dostaneme, že $n^2$ môže mať zvyšky len 0, 1:

$$0^2 = 0, \qquad 1^2 = 1, \qquad 2^2 = 4 \equiv 1.$$

Ak $n^2$ má zvyšok 1 po delení 3, vyfarbime $x$ políčok (pre nejaké $x$) v jednej tretine jednou vybranou farbou, potom v ostatných tretinách musíme tiež vyfarbiť prislúchajúce políčka rovnako, a teda celkovo vyfarbených políčok bude $3x$. Stredové políčko musí tiež byť zafarbené nejakou farbou menom $\phi$. Stredové políčko je jediné, ktoré sa zobrazí samo na seba, takže počet servítok farby $\phi$ bude $3m+1$ (pre $m \in \mathbb{N}$), čo nie je deliteľné 3, takže sa to nemôže rovnať $3x$. Máme dve farby s rôznymi počtami políčok, čo nemôže nastať, takže $n$ musí byť deliteľné 3.

V našej počiatočnej tretine máme teraz presne $\frac{n^2}{3}$ častí. Keďže počet servítok $s$ je rovnaký v celom trojuholníku tak aj v jednej tretine, takže $k \mid \frac{n^2}{3}$.

Naopak ak sú splnené podmienky 3 delí $n$, $n, k > 1$ a $k$ delí $\frac{n^2}{3}$, tak vieme trojuholník zafarbiť tak, aby vyzeral rovnako po každej rotácii. Spravíme to tak, že počiatočnú tretinu zafarbíme ľubovoľne tak, že v nej bude rovnako veľa políčok z každej farby a zvyšné dve tretiny zafarbíme príslušne podľa rotácií prvej tretiny. Teda takéto trojuholníky vieme vytvoriť pre také usporiadané dvojice $(n, k)$, kde platí, že $3 \mid n$, $n, k > 1$ a $k \mid \frac{n^2}{3}$. Príklady: $(3,3)$, $(6,3)$, $(6,4)$, $(6,6)$, $(6,12)$. To sa dá čarovne zapísať ako nižšie uvedená množina, no neľakajte sa jej, je to len iný zápis.

$$\left\{(n,k);\ n,k \in \mathbb{N},\ 3 \mid n,\ n,k > 1,\ k \mid \frac{n^2}{3}\right\}$$

## 2.7 Kartou, Možno Šekom

opravovali **Jožo** a **Kristína**

**Zadanie.** *Mišovia ša chyštajú platiť, no potrebujú ša dohodnúť, či budú platiť všetci špolu alebo každý šám. Kým diškutujú na túto tému, šervírka má čaš zištiť, koľko zaplatia.*

*Nech $V = 9999$. Dokážte, že*[3]

$$\sum_{n=1}^{V} \frac{1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{n+1}\right)} = 9.$$

### Riešenie

*Vzorové riešenie tejto úlohy si môžeš pozrieť aj ako video na našom YouTube kanáli `www.youtube.com/KorMatSem`.*

[3] Šymbol $\sum$ označuje šumu, ak šte ša š ním ešte neštretli, nezúfajte a prečítajte ši viac na Wikipédii.

Keď máme v úlohe zadaný nejaký výraz, tak sa oplatí skúsiť ho nejako zjednodušiť. Jednou z typických úprav výrazov je odstránenie odmocnín z menovateľa. Keď máme v menovateli výraz $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, tak rozšírením zlomku hodnotou $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ dostaneme $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$. Využili sme pritom vzorec $A^2-B^2 = (A+B)\cdot(A-B)$. Výraz zo sumy preto môžeme rozšíriť (zjavne nenulovou) hodnotou $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$:

$$\frac{1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{n+1}\right)} \cdot \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1-n)\left(\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{n+1}\right)} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\left(\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{n+1}\right)}.$$

Dostaneme výraz, v ktorého čitateli znova môžeme použiť vzorec $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$:

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\left(\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{n+1}\right)} = \frac{\left(\sqrt[4]{n+1}\right)^2-\left(\sqrt[4]{n}\right)^2}{\left(\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{n+1}\right)} = \frac{\left(\sqrt[4]{n+1}+\sqrt[4]{n}\right)\left(\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}\right)}{\left(\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{n+1}\right)} = \sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}.$$

Dostali sme zjednodušený výraz, ktorý už lepšie upraviť nevieme. Dosaďme tento výraz naspäť do rovnosti zo zadania:

$$\sum_{n=1}^{V}\left(\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}\right) = 9.$$

Vieme, že ak v sume $\sum_{n=1}^{9999}\sqrt[4]{n}$ bude $n$ nadobúdať hodnoty 1 až 9999, tak v sume $\sum_{n=1}^{9999}\sqrt[4]{n+1}$ bude $n+1$ nadobúdať hodnoty 2 až 10000. Po dosadení čísel by rovnosť vyzerala takto:

$$\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{1}+\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}-\sqrt[4]{3}+\ldots+\sqrt[4]{9999}-\sqrt[4]{9998}+\sqrt[4]{10000}-\sqrt[4]{9999} = 9.$$

Môžeme si všimnúť, že väčšina odmocnín sa najskôr pričíta a v ďalšom kroku sa odčíta.[4] Keď sa takto všetky navzájom odčítajú, zostane nám:

$$-\sqrt[4]{1}+\sqrt[4]{10000} = 9.$$

Odmocnením dostávame $-1+10=9$, a teda $9=9$. Dokázali sme, že platí rovnosť zo zadania.

## 2.8 Kešom Mišo Šibrinkuje

opravovala **Viki**

**Zadanie.** *Keď už šervírka ščítala všetky položky dokopy, Mišom nezoštalo nič iné, ako zaplatiť všetci špolu. Ktorý Mišo však bude platiť?*

*Predša lichobežník MIŠO, v ktorom $MI \parallel ŠO$ a $|\sphericalangle ŠIM| < |\sphericalangle IMO| < 90°$. Nech $R$ je priešečník jeho uhlopriečok $MŠ$ a $IO$ a $A$ je priešečník kružnice opíšanej trojuholníku $RIM$ šo štranou $IŠ$. Priamka $OA$ pretína priamku $MI$ v bode $L$ a priamka $MA$ pretína priamku $OŠ$ v bode $N$. Dokážte, že $NR$ je dotyčnicou kružnice opíšanej trojuholníku $RIM$ práve vtedy, keď je $MR$ dotyčnicou kružnice opíšanej trojuholníku $MAL$.*

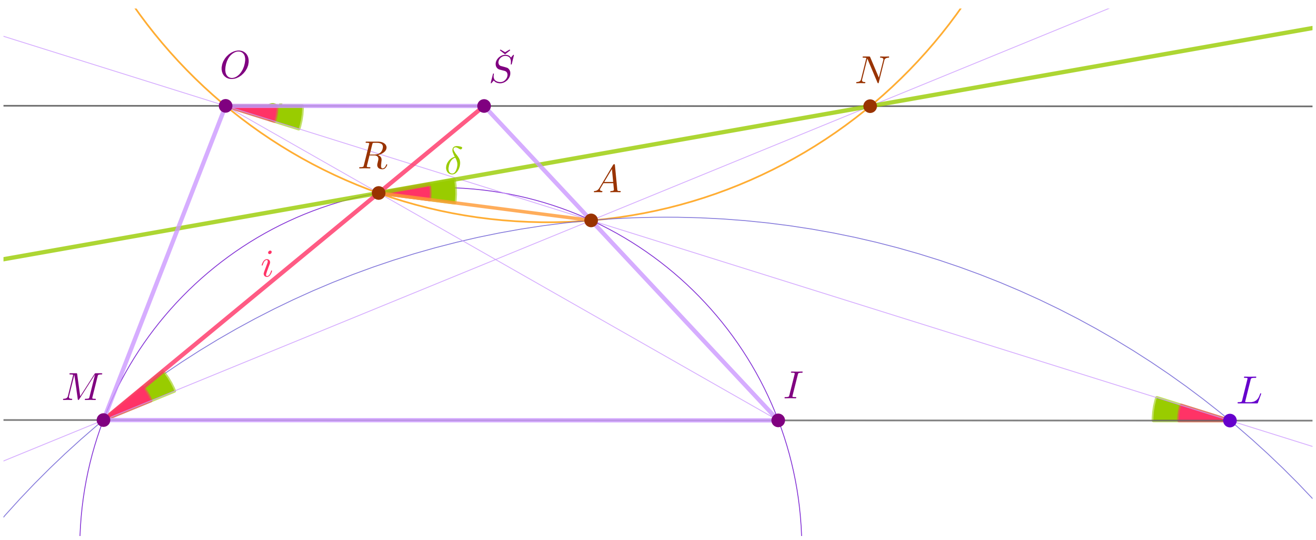
[4] Suma takéhoto typu sa nazýva aj *teleskopická*.

**Riešenie**

*Vzorové riešenie tejto úlohy si môžeš pozrieť aj ako video na našom YouTube kanáli* `www.youtube.com/KorMatSem`.

V zadaní ste si mohli všimnúť netradičnú požiadavku – dokázať, že niečo platí práve vtedy, keď platí niečo iné. Ide o výrok, ktorému sa hovorí ekvivalencia, to znamená že z prvej znalosti vyplýva druhá a z druhej prvá. Ekvivalenciu zo zadania dokážeme dokázaním implikácie oboma smermi, alebo po slovensky, v skutočnosti musíme riešiť dve úlohy – jednu, v ktorej máme zadané, že $MR$ je dotyčnicou kružnice nad trojuholníkom $MAL$ a potrebujeme dokázať dotykovosť $NR$ ku kružnici nad $MRAI$ – a druhú, v ktorej máme zadané že $NR$ je dotyčnicou kružnice nad $MRAI$ a potrebujeme dokázať dotykovosť $MR$ ku kružnici nad $MAL$. Až keď budeme mať dokázané obe úlohy, budeme vedieť povedať, že musia platiť naraz.

Pri úlohe nám opäť budú stačiť len znalosti o tetivových štvoruholníkoch a úsekovom uhle.




Začnime časťou pre obe úlohy rovnakou – štvoruholníkom $ORAN$. Z rovnobežiek $ON$ a $ML$ a striedavosti uhlov vieme, že $|\sphericalangle IMA| = |\sphericalangle ANO|$. Z vety o obvodových uhloch v už známom tetivovom štvoruholníku $MRAI$ vieme, že $|\sphericalangle IMA| = |\sphericalangle IRA|$ $(= |\sphericalangle ANO|)$. Uhol $ORA$ dopočítame ako $180° - |\sphericalangle IRA| = 180° - |\sphericalangle ANO|$. Teraz sa pozrime na súčet protiľahlých vnútorných uhlov v $ORAN$ovi, teda $|\sphericalangle ANO| + |\sphericalangle ORA| = |\sphericalangle ANO| + 180° - |\sphericalangle ANO| = 180°$, teda $ORAN$ je tetivový.

Poďme sa najskôr pozrieť na prvý prípad – chceme dokázať, že $NR$ je dotyčnicou kružnici nad $MRAI$. Vieme, že $MR$ je dotyčnicou ku kružnici nad $MAL$, uhol $RMA$ teda bude úsekovým k obvodovému $MLA$, čiže $|\sphericalangle RMA| = |\sphericalangle MLA| = \alpha$. Z rovnobežnosti $ON$ a $ML$ vidíme, že uhly $MLA$ a $AON$ sú striedavé, čiže $|\sphericalangle MLA| = |\sphericalangle AON| = \alpha$. Už vieme, že $ORAN$ je tetivový, teda uhol $NRA$ je obvodový uhol k uhlu $AON$, čiže $|\sphericalangle AON| = |\sphericalangle NRA| = \alpha$. Keďže $|\sphericalangle RMA| = \alpha$ je obvodovým uhlom nad tetivou $RA$ v štvoruholníku $MRAI$, a keďže $|\sphericalangle RMA| = |\sphericalangle NRA| = \alpha$, uhol $NRA$ je úsekovým uhlom k tomuto obvodovému, a teda $NR$ je dotyčnicou kružnice nad $MRAI$.

Poďme na to teraz druhou stranou, vieme že $NR$ je dotyčnicou kružnice nad $MRAI$ a chceme dokázať, že $MR$ je dotyčnicou kružnici nad $MAL$. Obdobne, využijeme striedavosť uhlov $AON$ a $MLA$, $|\sphericalangle AON| = |\sphericalangle MLA| = \beta$. V tetivovom štvoruholníku $ORAN$ je uhol $NRA$ obvodový k uhlu $AON$, $|\sphericalangle NRA| = |\sphericalangle AON| = \beta$. Keďže $NR$ je dotyčnicou ku kružnici nad $MRAI$, uhol $NRA$ je úsekový k tetive $RA$, teda obvodový $|\sphericalangle RMA| = |\sphericalangle NRA| = \beta$. Keďže $|\sphericalangle MLA| = |\sphericalangle RMA| = \beta$, uhol $RMA$ musí byť úsekový, teda $MR$ je dotyčnicou kružnice nad $MAL$.

Oboma dôkazmi sme teda dokázali ekvivalenciu zo zadania.

## 2.9 Kružilašom Míňame Šamorín opravoval **M&M**

**Zadanie.** *Mišovia idú ceštovať kružilašom, no potrebujú ša dohodnúť na poradí, v ktorom naštúpia. Šú šice očíšlovaní celými číšlami* $1, 2, \dots, n$*, ale to je príliš trápne poradie, tak ši chcú prejšť rôzne možnošti. Koľkými špôšobmi ich môžeme zoradiť do radu tak, aby pre každé celé číšlo k (kde* $1 \leq k \leq n$*) platilo, že číšla prvých k Mišov dávajú po delení číšlom k navzájom rôzne zvyšky?*

### Riešenie

Uvažovať zvyšky po delení všetkými číslami $1 \leq k \leq n-1$ je trochu veľa možností čo naraz uvažovať. Preto sa oplatí uvažovať zvyšky po delení takým číslom, aby tých zvyškov bolo málo. Takým deliteľom je napríklad $k = n - 1$. Zvyšok 1 po delení $k = n - 1$ nadobúda iba 1 a $n$ a každé ďalšie z čísel $2, 3, \dots n - 1$ nadobúda iný zvyšok. Preto je buď 1, alebo $n$ na poslednom mieste, pretože nemôžu byť obe v prvej $(n - 1)$-tici. Počet takých $n$-tíc, kde $n$ je na poslednom mieste, je vlastne úloha pre $n - 1$, a je ich toľko, koľko je takých $(n - 1)$-tíc. A počet možností, kde je 1 na konci, je zatiaľ neznámy. Avšak môžeme tušiť, že po delení $n - 2$ budú potom zase práve dve čísla s rovnakým zvyškom a jedno z nich bude musieť byť na predposlednom mieste. Pre predposledné miesto máme teda možnosti $(\dots, 2, 1), (\dots, n, 1), (\dots, 1, n), (\dots, n - 1, n)$. Tieto pozorovania nám napovedajú, že by sa mohlo jednať o dôkaz indukciou a výsledok by mohol byť $2^{n-1}$. Poďme to teda dokázať indukciou.

Budeme matematickou indukciou zhora dokazovať tvrdenie, že od konca budeme mať postupnosť čísel, kde každé ďalšie číslo je buď najväčšie nepoužité, alebo najmenšie nepoužité číslo. Pričom na výbere nebude záležať a teda budú vždy dve možnosti na $k$-tu pozíciu.

Pre posledné miesto už vieme, že máme dve možnosti 1 a $n$.

Nech od konca máme postupnosť čísel, ktorá spĺňa predpoklad indukcie, kde použijeme čísla $1, 2, \dots, m$ a $n - s + 1, n - s + 2, \dots, n$. Potom nepoužité čísla sú $m + 1, m + 2, \dots, n - s$ a je ich $n - m - s$. Tieto čísla sú po sebe idúce čísla, a teda po delení $n - m - s - 1$ majú čísla $m + 1$ a $n - s$ rovnaké zvyšky. Ostatné čísla musia mať rôzne zvyšky. Preto na $(m + s + 1)$-tom mieste od konca ($(n - m - s)$-tom mieste) musí byť práve jedno z týchto dvoch čísel. Preto máme dve možnosti na $(m + s + 1)$-té číslo od konca a zároveň sme použili buď najväčšie, alebo najmenšie nepoužité číslo.

Táto indukcia pokračuje, až kým nezostane posledné číslo, a to na prvom mieste, budeme mať iba jednu možnosť. Preto je počet možností Mišov $2^{n-1}$.

Ešte musíme overiť, že každá takáto postupnosť naozaj spĺňa podmienky zo zadania. Lenže pri konštrukcií sme uvažovali všetky $k$ od $n - 1$ po 2, a teda takto skonštruovaná postupnosť ozaj spĺňa podmienku zo zadania.

## 2.10 Koniec Mišovho Šušlania opravoval **Miloš**

**Zadanie.** *Cештou okolo Šamorína ša ochladilo, a tak šú okná zahmlené. Mišo ši teda na okno prštom napíšal kladné celé číšlo n. V jednom kroku ši Mišo zvolí ľubovoľné číšlo a na okne, zmaže ho a dopíše všetkých jeho deliteľov okrem číšla a. Na okne ša môže vyškytnúť rovnaké číšlo aj viackrát. Nájdite všetky kladné celé číšla n, pre ktoré vie Mišo po nejakom počte krokov doštať na okne ašpoň* $n^2$ *(nie nutne rôznych) číšel.*

**Riešenie**

Môžeme si všimnúť, že nakoľko každé prirodzené číslo $n$ (okrem 1) má aspoň jedného deliteľa menšieho ako $n$, nahradením $n$ na okne za jeho delitele počet čísel na okne nikdy nezmenšíme. Zmazaním 1 na okne by sme o jedno číslo prišli, preto sa to pri hľadaní maximálneho počtu neoplatí. Taktiež si môžeme premyslieť, že nám nezáleží na poradí, v ktorom čísla na okne mažeme. Keďže na okne sa čísla môžu opakovať, mazanie a dopisovanie deliteľov dvoch čísel sa nijak neovplyvňuje. Ako stratégiu pri hľadaní maximálneho počtu čísel na okne pre určité začiatočné $n$ si môžeme teda určiť to, že pokiaľ číslo na okne nie je 1, zmažeme ho a napíšeme na okno jeho delitele. Tento krok budeme opakovať, až pokým na okne nezostanú iba jednotky.

Označme $f(n)$ maximálny počet čísel na okne, ktorý môžeme dostať, ak začíname s číslom $n$. Zo stratégie, ktorú sme vytvorili, si môžeme odvodiť rekurzívny vzorec

$$f(n) = \sum_{d \in D} f(d), \tag{1}$$

kde $D$ je množina deliteľov čísla $n$, ktoré sú menšie ako $n$. Naším cieľom je nájsť všetky čísla, pre ktoré platí $f(n) \geq n$.

Ak je na okne číslo 1, hneď na začiatku máme na okne $1^2$ čísel. Zmazaním jednotky by sme na okne nedostali žiadne číslo, a zároveň by sme nemohli spraviť žiadny ďalší krok. Je teda zjavné, že $f(1) = 1$. Dostávame, že pre $n = 1$ platí $f(n) \geq n$.

Poďme dokázať, že žiadne iné také $n$ neexistuje, resp. že $f(n) < n^2$ pre všetky $n > 1$. Využijeme na to silnú matematickú indukciu [5]. Ako základ použijeme, že ak je na okne prvočíslo $p$, vieme ho nahradiť iba číslom 1, pre ktoré už vieme, že $f(1) = 1$. Z toho si vieme odvodiť aj hodnotu pre $f(p) = 1 \leq p^2$. Indukčným predpokladom bude, že $f(k) \leq k^2$ platí pre všetky čísla $k$ také, že $1 < k < n$. Chceme dokázať, že $f(n) < n^2$.

Na okne majme zložené číslo $n$. Aby sme sa niekam pohli, musíme nahradiť práve toto číslo jeho deliteľmi (okrem $n$). Označme množinu deliteľov čísla $n$ ako $D := \{d_1, d_2, \ldots, d_i\}$. Keďže $n$ je zložené, vieme povedať, že má aspoň 3 delitele, teda $i \geq 3$. Všetky tieto delitele však vieme zapísať aj ako

$$d_j = \frac{n}{d_{i-j+1}}, \qquad 1 \leq j \leq i.$$

Množina $D$ sa týmto zápisom nezmení, a teda

$$D = \left\{ \frac{n}{d_1}, \frac{n}{d_2}, \ldots, \frac{n}{d_i} \right\}.$$

Pre nás sú však zaujímavé len delitele menšie ako $n$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme povedať, že $d_i = 1$. Množinu deliteľov menších ako $n$ si označme $D'$:

$$D' = \left\{ \frac{n}{d_1}, \frac{n}{d_2}, \ldots, \frac{n}{d_{i-1}} \right\}.$$

[5] Čo to sa o silnej matematickej indukcii viete dozvedieť na anglickej Wikipédii.

Pre deliteľ 1 vieme povedať, že $f(1) = 1$. Voľba $d_i = 1$ nám určuje $d_1 = n$, teda $n/d_1 = 1$ a $f(n/d_1) = 1$. Keďže všetky ostatné delitele sú väčšie ako 1 a menšie ako $n$, z indukčného predpokladu pre ne platí

$$f\left(\frac{n}{d_j}\right) < \frac{n^2}{d_j^2}, \qquad 2 \leq j \leq i-1.$$

Sčítaním týchto nerovností pre všetky $j$ dostávame

$$\sum_{j=2}^{i-1} f\left(\frac{n}{d_j}\right) < \sum_{j=2}^{i-1} \frac{n^2}{d_j^2}.$$

Treba podotknúť, že keďže $i \geq 3$, bude mať táto suma vždy aspoň jeden člen. Použitím rekurzívneho vzorca (1), hodnoty $f(n/d_1) = 1$ a predošlej sumy vieme vyjadriť horný odhad pre $f(n)$:

$$f(n) = \sum_{j=1}^{i-1} f\left(\frac{n}{d_j}\right) = 1 + \sum_{j=2}^{i-1} f\left(\frac{n}{d_j}\right) < 1 + \sum_{j=2}^{i-1} \frac{n^2}{d_j^2} = 1 + n^2 \sum_{j=2}^{i-1} \frac{1}{d_j^2} = n^2 \left(\frac{1}{n^2} + \sum_{j=2}^{i-1} \frac{1}{d_j^2}\right). \tag{2}$$

V tomto bode nám už stačí dokázať, že

$$\frac{1}{n^2} + \sum_{j=2}^{i-1} \frac{1}{d_j^2} \leq 1. \tag{3}$$

Je známe[6], že

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Aby bola táto nekonečná suma pre nás užitočná, odčítajme od oboch strán 1:

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

Keď si porovnáme túto sumu so sumou v našej nerovnosti (3), môžeme si všimnúť, že ľavá strana nerovnosti pozostáva z konečne veľa členov tejto sumy (a žiadny člen sa neopakuje). Ďalej si môžeme všimnúť, že pri žiadnych z týchto členov nie je menovateľ v zlomku rovný 1 (to vysvetľuje, prečo sme v predošlom kroku odčítali 1). Vieme teda povedať, že

$$\frac{1}{n^2} + \sum_{j=2}^{i-1} \frac{1}{d_j^2} < \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1 < 1,$$

čo je to, čo sme potrebovali dokázať. Dosadením tejto hodnoty naspäť do (2) dostávame $f(n) < n^2$ pre $n > 1$, čím je dôkaz ukončený. Jediným číslom, pre ktoré vie Mišo po nejakom počte krokov dostať na okne aspoň $n^2$ (nie nutne rôznych) čísel, je 1.

[6]Viac sa o tomto tvrdení dočítate tu.