Riešenia 3. kola zimnej časti

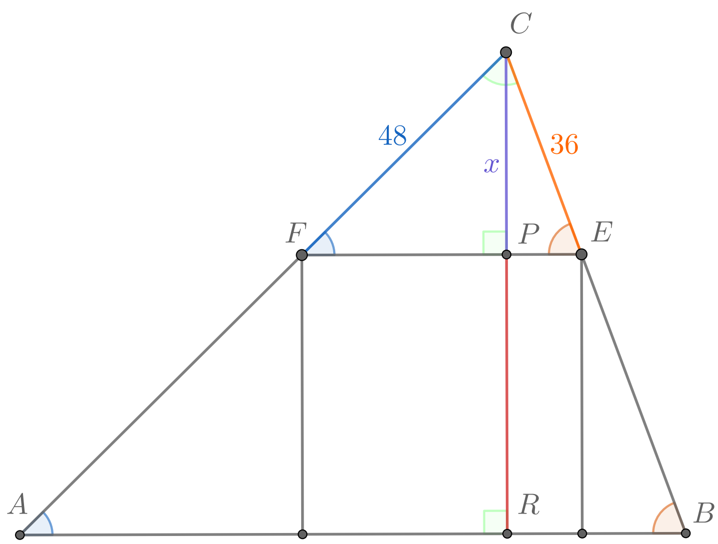
3.1 Krtko Ma Štve ($\kappa \leq 1$)

Zadanie. *Maťko našiel na svojej záhradke kôpky hliny, a preto si začal myslieť, že mu tam behá krtko. Ihneď začal premeriavať svoju trojuholníkovú záhradku a zisťovať, koľko tunelov musel krtko vykopať.*

Uvažujme pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C. Vpíšme doň štvorec tak, aby jedna jeho strana ležala na prepone trojuholníka ABC. Jeho vrcholy ležiace na stranách BC a CA označme postupne E a F. Nech úsečka CE je dlhá 36 cm a úsečka CF je dlhá 48 cm. Vypočítajte dĺžku strany AB.

Riešenie. opravuje **Teri** (tereza.skublova@trojsten.sk)

Na obrázku môžeme vidieť situáciu zo zadania – pravouhlý trojuholník a v ňom vpísaný štvorec s jednou stranou ležiacou na prepone *AB*.



Ako prvé si môžeme všimnúť rovnobežnosť úsečiek *AB* a *FE*, ktorá vyplýva z rovnobežnosti protiľahlých strán v štvorci. Táto rovnobežnosť je veľmi podstatná, lebo obsahuje kľúč k riešeniu našej úlohy. Hovorí nám totiž o podobnosti dvoch trojuholníkov – podobnosti trojuholníka *ABC* s trojuholníkom *FEC*. Tieto dva trojuholníky sú podobné kvôli zhodnosti zodpovedajúcich si uhlov. Uhol *ACB* (*FCE*) majú spoločný. Uhol *CFE* v trojuholníku *FEC* má zhodnú veľkosť ako uhol *CAB* v trojuholníku *ABC*, lebo ich ramená *FC* a *AC* ležia na jednej priamke a ich ramená *FE* a *AB* sú rovnobežné, a preto tieto dva uhly sú súhlasné a majú rovnakú veľkosť. Podobnú úvahu vieme spraviť aj pre dvojicu uhlov *CEF* a *CBA*. Ich ramená *EC* a *BC* ležia na jednej priamke a ich ramená *EF* a *BA* sú rovnobežné, takže sa opäť jedná o súhlasné uhly, vďaka čomu uhly CEF a CBA majú zhodnú veľkosť. Dostávame tak zhodnosť v troch zodpovedajúcich si dvojiciach uhlov, a teda tieto dva trojuholníky sú podobné [1].

Vieme teda, že trojuholníky ABC a FEC sú podobné. To nám dáva nástroj na výpočet dĺžky prepony AB. Kvôli podobnosti trojuholníkov sú totiž pomery medzi dĺžkami zodpovedajúcich si strán rovnako veľké. Takže nám stačí zistiť dĺžku strany FE v trojuholníku FEC a dĺžky výšok v obidvoch trojuholníkoch.

Trojuholník FEC je pravouhlý, a preto vieme využiť Pytagorovu vetu na výpočet dĺžky jeho prepony FE.

$$
\begin{aligned}
|FE|^2 &= |CF|^2 + |CE|^2,\\
&= 48^2 + 36^2,\\
&= 12^2 \cdot (4^2 + 3^2),\\
&= 12^2 \cdot 5^2,\\
|FE| &= 60.
\end{aligned}
$$

Obsah pravouhlých trojuholníkov vieme vypočítať viacerými spôsobmi. Keď takto vypočítame obsah dvomi spôsobmi, tak musíme dostať rovnaký výsledok. Preto

$$
\begin{aligned}
\frac{|FE| \cdot x}{2} &= \frac{|CF| \cdot |CE|}{2},\\
x &= \frac{|CF| \cdot |CE|}{|FE|},\\
x &= \frac{48 \cdot 36}{60},\\
x &= \frac{144}{5}.
\end{aligned}
$$

[1] Úplne by stačila len zhodnosť v dvoch dvojiciach zodpovedajúcich si uhlov, aby boli dané dva trojuholníky podobné, keďže tretí uhol v trojuholníku je jasne určený z veľkostí zvyšných dvoch uhlov. Avšak pre precvičenie si hľadania súhlasných uhlov, ktoré majú zhodnú veľkosť, sme uviedli aj zhodnosť medzi treťou dvojicou zodpovedajúcich si uhlov.

Teraz vieme dopočítať aj výšku v trojuholníku ABC, ktorá je zjavne o 60 dlhšia ako výška v trojuholníku FEC, lebo $|PR|$ je rovnaká ako dĺžka strany vpísaného štvorca, čo je $|FE|$. Tým pádom už vieme určiť dĺžku prepony AB.

$$\frac{|AB|}{|FE|} = \frac{|CR|}{|CP|},$$

$$|AB| = \frac{|CR| \cdot |FE|}{|CP|},$$

$$|AB| = \frac{\left(\frac{144}{5} + 60\right) \cdot 60}{\frac{144}{5}},$$

$$|AB| = 185.$$

3.2 Kus Maťkovej Sústavy ($\kappa \leq 2$)

Zadanie. *V jednej kôpke hliny našiel Maťko starý roztrhnutý kus papiera, na ktorom bola napísaná sústava rovníc. Maťko ju rýchlo išiel ukázať svojim kamarátom, ale tí mu tvrdili, že určite nemá žiadne riešenie.*

Ukážte, že Maťkovi len tlačia kaleráby do hlavy a nájdite všetky dvojice reálnych čísel x, y, ktoré zároveň spĺňajú

$$4y^2 - x^2 = 2y + x,$$
$$x^2 - 2xy + 2y - x = 0.$$

Riešenie. opravujú **David** (david.belobrad@trojsten.sk) a **Baška** (barbora.javorova@trojsten.sk)

K tejto úlohe ponúkame 2 vzorové riešenia. Začnime prvým z nich:

Keď **M**áme **S**ústavu zo zadania, tak si môžeme všimnúť možnosť úpravy prvej rovnice do nasledujúcej podoby:

$$4y^2 - x^2 = (2y - x) \cdot (2y + x) = 2y + x.$$

Všimnime si, že obe strany možno vydeliť výrazom $2y + x$. Avšak najprv treba ošetriť situáciu, kedy $2y + x = 0$, keďže nulou deliť nemožno. Za tohto predpokladu bude zároveň prvá rovnica určite splnená, pretože obe strany budú nulové. Danú situáciu možno prepísať do tvaru $x = -2y$ a dosadiť do druhej rovnice:

$$x^2 - 2xy + 2y - x = (-2y)^2 - 2y \cdot (-2y) + 2y - (-2y) =$$
$$= 4y^2 + 4y^2 + 2y + 2y = 8y^2 + 4y = 4y \cdot (2y + 1) = 0.$$

Z tejto rovnice vidno, že vyhovujúce hodnoty y sú $-\frac{1}{2}$ a 0. Ak $y = -\frac{1}{2}$, tak potom $x = 1$. Ak $y = 0$, tak $x = 0$. Teraz, keď sme ošetrili delenie 0, tak môžeme rovnicu $(2y - x) \cdot (2y + x) = 2y + x$ vydeliť výrazom $2y + x$ a dostaneme $2y - x = 1$, z čoho po úprave dostaneme $x = 2y - 1$ a môžeme opätovne dosadiť do druhej rovnice:

$$x^2 - 2xy + 2y - x = (2y - 1)^2 - 2y \cdot (2y - 1) + 2y - (2y - 1) =$$
$$= 4y^2 - 4y + 1 - 4y^2 + 2y + 2y - 2y + 1 = -2y + 2 = 2 \cdot (1 - y) = 0.$$

Odtiaľto vidno, že $y = 1$, a teda $x = 1$. Keďže sme robili len ekvivalentné úpravy, tak skúška správnosti nie je potrebná, a teda sme ukázali, že Maťkovi skutočne len kamaráti tlačia kaleráby do hlavy a našli sme všetky 3 riešenia sústavy vyššie.

2. riešenie

Keď **M**áme **S**ústavu zo zadania, tak si môžeme všimnúť možnosť úpravy druhej rovnice do nasledujúcej podoby:

$$2y - x = 2xy - x^2 = x \cdot (2y - x).$$[2]

Všimnime si, že obe strany možno vydeliť výrazom $2y - x$. Avšak najprv treba ošetriť situáciu, kedy $2y - x = 0$, keďže nulou deliť nemožno. Danú situáciu možno prepísať do tvaru $x = 2y$ a dosadiť do prvej rovnice:

$$4y^2 - (2y)^2 = 4y^2 - 4y^2 = 0 = 2y + 2y = 4y.$$

Z tejto rovnice vidno, že vyhovuje $y = 0$. Ak $y = 0$, tak potom $x = 0$. Teraz, keď sme ošetrili delenie 0, tak môžeme rovnicu $2y - x = x \cdot (2y - x)$ vydeliť výrazom $2y - x$ a dostaneme $x = 1$ a môžeme opätovne dosadiť do prvej rovnice:

$$\begin{aligned} 4y^2 - 1 &= 2y + 1, \\ 4y^2 - 2y - 2 &= 0, \\ 2y^2 - y - 1 &= 0, \\ 2 \cdot \left(y + \frac{1}{2}\right) \cdot (y - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Odtiaľto vidno, že $y = 1$ alebo $y = -\frac{1}{2}$. Keďže sme robili len ekvivalentné úpravy, tak skúška správnosti nie je potrebná, a teda sme ukázali, že Maťkovi skutočne len kamaráti tlačia kaleráby do hlavy a našli sme všetky 3 riešenia sústavy vyššie.

3.3 Kôš Môjho Šťastia ($\kappa \leq 3$)

Zadanie. *Po objavení papiera so sústavou sa Maťko snažil v jamách na záhrade nájsť aj poklad, ale neúspešne. Povedal si, že aspoň skúsi šťastie v lotérii Kôš Môjho Šťastia.*

Lotéria Kôš Môjho Šťastia funguje tak, že je v koši desať loptičiek, pričom každá z nich má rovnomerne napísané čísla od 1 do 10 vrátane. Šarmantná asistentka poriadne zamieša košom, ktorý následne položí na zem. Loptičky sa usadia do jamiek a na každej padne nejaké číslo (každé s rovnakou pravdepodobnosťou). Počas posledného kola lotérie KMŠ sa ale stalo, že na prvú loptičku padol prach a nebolo na ňu vidno. Šarmantná asistentka ale povedala, že číslo na prvej loptičke bolo (ostro) menšie ako práve šesť zo zvyšných deviatich loptičiek. Iba z tejto informácie (teda za predpokladu, že neviete, čo padlo na zvyšných loptičkách), aké číslo má najväčšiu pravdepodobnosť, že padlo na prvej loptičke?

Riešenie. opravujú **Lucy** (lucia.tothova@trojsten.sk) a **Simi** (simona.pecserke@trojsten.sk)

[2]Všimnite si, že jemne iný postup vyriešenia tejto rovnice by bol presunúť všetky členy na jednu stranu a rozložiť na súčin zátvoriek $(2y - x)(x - 1) = 0$, kde jedna zo zátvoriek musí byť 0. Ide síce o mierne inú myšlienku, ale uvidíme, že vedie k rozobratiu presne tých istých prípadov ako delenie oboch strán rovnice nenulovým výrazom. Zamyslite sa nad touto súvislosťou.

Keď sa zamyslíme nad úlohou, po tom, čo sa vyplašíme zo slova pravdepodobnosť a množstva možností, ktoré nám prebehnú pred očami, nám isto napadne, že budeme potrebovať porovnať pravdepodobnosti pre všetky možné čísla, ktoré nám môžu padnúť na prvej loptičke. Aby sme sa neupočítali k smrti, budeme hľadať všeobecný vzorec, do ktorého len dané čísla nakoniec dosadíme.

Označme si teda číslo, ktoré nám padne na prvej loptičke k. Zo zadania vieme, že všetky čísla $k \in \{1, 10\}$ padajú s rovnakou pravdepodobnosťou.

Teda pravdepodobnosť, že nám na prvej loptičke padlo k je $\frac{1}{10}$. Potom pravdepodobnosť, že na loptičke padne číslo väčšie ako k je $\frac{10-k}{10}$ a pravdepodobnosť, že na loptičke padlo číslo menšie alebo rovné k je $\frac{k}{10}$. (Keďže pravdepodobnosť počítam ako počet vhodných možností deleno počet všetkých možností.)

Taktiež potrebujeme počítať s tým, že loptičky môžu byť rôzne usporiadané a nechceme eliminovať možnosti, ktoré majú iba rôzne poradie. Teda počet rôznych usporiadaní je $\binom{9}{6}$, pretože mám deväť miest, na ktoré chcem umiestniť šesť loptičiek s číslom väčším ako k. Na zvyšné tri miesta budú umiestnené loptičky s číslom menším alebo rovným k. (Pozn.: $\binom{9}{6} = \binom{9}{3}$).

Tieto pravdepodobnosti sú nezávislé, a teda ich môžem násobiť. Čiže pravdepodobnosť, že prvé číslo je k a dostanem šesť čísel väčších ako k, a tri čísla menšie alebo rovné k, je

$$\frac{1}{10} \cdot \binom{9}{6} \cdot \left(\frac{10-k}{10}\right)^6 \cdot \left(\frac{k}{10}\right)^3$$

Keďže k môže mať desať rôznych hodnôt, asi najjednoduchší spôsob, ako zistiť, ktorá z nich má najväčšiu pravdepodobnosť, je vypočítať každú zvlášť. S použitím tohto vzorca teda zistíme, že najväčšiu pravdepodobnosť má hodnota $k = 3$, a to približne $0,0267$. [3]

3.4 Kužele Ma Smädia ($\kappa \leq 5$)

Zadanie.

Maťko úplne vysmädol a zmocnila sa ho ohromná túžba napiť sa. Zobral svoje nádoby a posnažil sa nabrať do nich čo najviac vodičky. Maťkove nádoby však majú veľmi neobvyklý tvar, takže to nebolo vôbec jednoduché.

Máme dva kužele s polomerom podstavy 3 *a výškou* 8. *Ich osi symetrie zvierajú pravý uhol a pretínajú sa v bode, ktorý leží vnútri oboch kužeľov vo vzdialenosti* 3 *od základne každého kužeľu. Guľa s polomerom r leží vnútri oboch kužeľov. Nájdite najväčšiu možnú hodnotu r.*

Riešenie. opravujú **Palko** (pavol.simkovic@trojsten.sk) a **Mati** (matus.zelko@trojsten.sk)

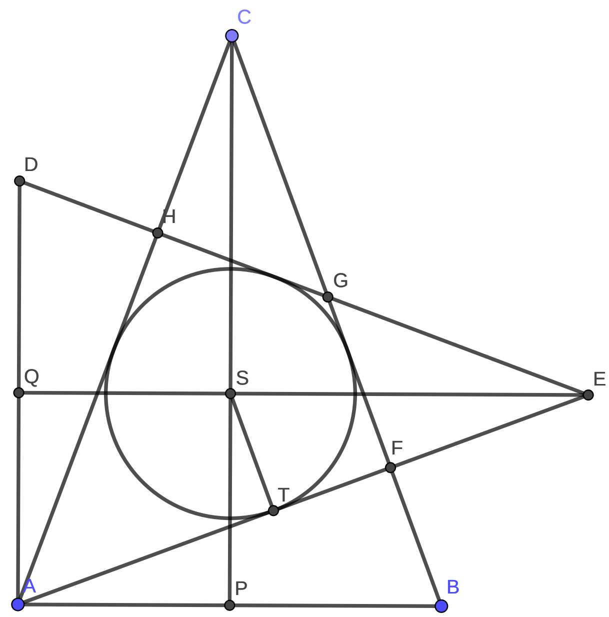
V zadaní na nás čakala trojrozmerná dvojhlavá chmára. My sa jej však nezľakneme. Môžeme si rýchlo všimnúť, že veľa jej častí je rotačne súmerných, čo s výhodou využijeme v náš prospech. S trojrozmernými chmárami sa zapasí vcelku ťažko, tak by sme ju radi dostali na papier. Pamätajúc na jej súmernosti si zvoľme rovinu, v ktorej sa nachádzajú obe osi súmernosti kužeľov, a porazme chmáru v nej. Takže sa nám kužele zmenili na trojuholníky, ktorých podstavy sú na seba kolmé a zdieľajú jediný bod (lebo osi súmernosti kužeľov boli na seba kolmé a ich

[3] Pokiaľ sa chcete dozvedieť viac o kombinatorike, pravdepodobnosti a o tom, ako s nimi počítať, skúste sa pozrieť napríklad na
https://prase.cz/library/PravdepodobnostAStatistikaPS/PravdepodobnostAStatistikaPS.pdf
https://prase.cz/library/PocitaniVKombinatoriceAPravdepodobnostiSS/PocitaniVKombinatoriceAPravdepodobnostiSS.pdf
https://prase.cz/library/library.php?categ=3&supcats=

priesečník bol vzdialený od podstáv 3, čo je aj polomer podstavy). Označme ho A. Teraz sa môžeme pustiť do poriadneho boja.

Najväčšia kružnica bude mať stred na priesečníku osí

Najprv najväčšia kružnica, ktorá sa dá vpísať chmáre do brucha (oblasti, ktorá patrí obom jej kužeľom) má stred v priesečníku osí súmernosti E, čo si ukážeme nižšie.



Keď chmáre zmeriame brucho, zistíme, že to je deltoid[4] ($AFGH$). Je to pekne vidieť zo súmernosti podľa osi AG, vďaka tomu $|AF| = |AH|$ a $|FG| = |HG|$. Deltoidu vieme vpísať práve jednu kružnicu, lebo je dotyčnicový ($|AF| + |GH| = |AH| + |FG|$, každý štvoruholník, ktorého súčty protiľahlých strán sú rovnaké, je dotyčnicový, skúste si to sami rozmyslieť).

Začnime s jednoduchšou situáciou – budeme sa tváriť, že nemáme stranu GH. Ostal nám trojuholník AFC, pre ktorý chceme nájsť najväčšiu kružnicu, ktorá sa do neho zmestí. Je známe, že pre trojuholník to je kružnica vpísaná. Keď máme vpísanú kružnicu, vráťme späť stranu GH. Dostali sme deltoid, ktorý je menší ako pôvodný trojuholník, teda nebude sa mu dať vpísať väčšia kružnica. Nakoniec ak sa kružnica už dotýka troch strán deltoidu, (AF, FG, AH), tak jej stred leží na osiach uhlov AFG a FAH. Na nich leží aj stred kružnice deltoidu vpísanej. Obe kružnice majú teda rovnaký stred a zároveň sa dotýkajú rovnakej strany AH, tak to už nemôže dopadnúť inak, ako že budú zhodné.

Teraz už ľahko nahliadneme, že vďaka tomu, že naša kružnica sa dotýka úsečky GF, tak sa dotýka aj úsečky BC a vďaka tomu, že sa dotýka úsečky AH, tak sa bude primykať aj k úsečke AC. Vzdialenosť stredu od oboch priamok je vďaka tomu rovnaká a stred bude na osi uhla ACB. Analogicky pre uhol DEA. Yes, tak sme sa chmáre konečne dostali pod kožu.

[4] https://sk.wikipedia.org/wiki/Deltoid

To už sa dáko ubije

Keď teraz vieme, že vpisujeme kružnicu do prieniku rovnoramenných trojuholníkov, a ešte k tomu, že jej stred je v priesečníku ich osí súmernosti, stačí nám chmáru nejak dorátať do úspešného konca. Existuje na to viacero spôsobov, tu si ukážeme výpočet cez podobnosť trojuholníkov a Pytagorovu vetu (čo je, technicky vzaté, tiež len podobnosť trojuholníkov).

Označme si trojuholníky a kružnicu tak ako na obrázku, T je bod dotyku kružnice so stranou AE a S je stred kružnice. Priamka QE je os súmernosti trojuholníka ADE, a teda je kolmá na stranu AD. Pozrime sa na trojuholníky AEQ a SET. Majú spoločný uhol pri vrchole E a tiež každý má jeden pravý uhol – väčší trojuholník ho má pri vrchole Q a menší pri vrchole T (to je bod dotyku kružnice s AE, a teda AE je kolmá na polomer ST). Na základe toho vieme povedať, že sú podobné. Teraz využijeme známe vzdialenosti a dorátame z nich polomer kružnice. Zo zadania vieme, že

$$|AQ| = |QS| = 3,$$

$$|QE| = 8,$$

$$|SE| = |QE| - |QS| = 8 - 3 = 5.$$

Teraz nám stačí si vybrať správne rovnosti z tých, ktoré nám ponúka podobnosť trojuholníkov. Zvoľme napríklad

$$\frac{|ST|}{|SE|} = \frac{|AQ|}{|AE|}.$$

Odkiaľ môžeme vyjadriť polomer kružnice ST ako

$$r = |ST| = |SE| \cdot \frac{|AQ|}{|AE|}$$

a máme hotovo. ...ojha! Chýba nám veľkosť strany AE. Tú ale vieme veľmi ľahko zrátať, keďže trojuholník AQE je pravouhlý a poznáme jeho obe odvesny. Máme teda

$$|AE| = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73}.$$

Dosadíme do vzťahu pre r a máme výsledok

$$r = 5 \cdot \frac{3}{\sqrt{73}} = \frac{15}{\sqrt{73}}.$$

Našli sme najväčšiu kružnicu, ktorá sa zmestí do brucha dvojrozmernej chmáry. Ako nám to pomôže s chmárou trojrozmernou? Roztočme jeden trojuholník podľa jeho osi. Dostali sme kužeľ s guľou vnútri. Táto guľa určite z neho nevytŕča, pretože v každom momente otáčania kružnica z trojuholníka nevytŕčala. V tomto kuželi guľa nie je najväčšia možná, je však najväčšia možná spomedzi tých, ktoré sa zmestia do kužeľa a rovnoramenného trojuholníka, ktorý sme ešte nezrotovali. Ostáva nám ešte zistiť, či nám nevytŕča z druhého kužeľa. Ajhľa, keď zrotujeme druhý kužeľ okolo jeho osi, v každom momente sa bude gule dotýkať, takže z nej nikde trčať nebude. Dostali sme presne to, čo sme chceli – skrotili sme chmáru.

3.5 Kopce Majú Stanice ($\kappa \leq 8$)

Zadanie. *Maťkovi sa podarilo v Koši Môjho Šťastia vyhrať* 2021 *eur, a tak sa vybral na dovolenku do Vysokých Tatier. Lenže vodička taxíka zablúdila a zaviezla ho namiesto toho do pohoria Vysoké Taury. Maťko si povzdychol a povedal si, že keď tu už je, tak si aspoň pocestuje lanovkami vo Vysokých Taurách.*

Vo Vyskoých Taurách sa nachádza až $n \geq 3$ staníc, medzi ktorými premávajú lanovky, medzi každou dvojicou staníc vždy najviac jedna (obojsmerná). Maťko je veľký cestovateľ, no nie až tak moc. Preto chce navštíviť len nejakú trojicu navzájom rôznych staníc A, B, C, v tomto poradí. Zistil, že nech si trojicu A, B, C vyberie ľubovoľne, vie sa medzi nimi presunúť lanovkami na najviac 2 *prestupy. T. j. na ceste z A do B a z B do C využije dohromady najviac* 3 *lanovky (nie nutne rôzne; ak niektorú využije* 2*-krát, budeme to považovať za použitie dvoch lanoviek), bez ohľadu na to, ktoré stanice označí ako A, B, C. V závislosti od n určte najmenší možný počet lanoviek vo Vysokých Taurách.*

Riešenie. opravujú **Danko** (daniel.teplan@trojsten.sk) a **Mišo M.** (michal.molnar@trojsten.sk)

Pozrime sa najprv na možnosti, ktoré máme. Lanovka môže byť medzi každou dvojicou staníc, teda z každej z n staníc vychádza lanovka do všetkých $n-1$ ostatných staníc. Avšak lanovka vychádzajúca z A do B je tá istá, ako lanovka z B do A, čo platí pre všetky lanovky, a preto maximálny počet lanoviek je $\frac{n(n-1)}{2}$.

Mohli by sme skúsiť na nejakom príklade postupne tieto lanovky pridávať, kým nebude splnená podmienka zo zadania, no bude ich treba celkom veľa. Určite musíme pospájať všetky stanice, keďže Maťko si na svoju cestu môže vybrať ktorúkoľvek z nich, a nie len tak akýmkoľvek spôsobom. Môže sa nám stať, že pridáme skoro všetky, ale nejaká stanica bude voči ostatným „v nepriaznivej pozícii“. Skúsme sa zamyslieť, čo by také niečo mohlo znamenať. Problém nastane, ak na presun medzi nejakými dvomi stanicami potrebujeme najmenej dva prestupy, pretože ak vyberieme tieto dve a ešte tretiu, dokopy použijeme 3 prestupy. Podobný problém nastane, ak z nejakej stanice vieme ísť do dvoch iných najmenej jedným prestupom. Ak si Maťko vyberie túto stanicu ako strednú zastávku medzi zvyšnými dvomi, tiež bude potrebovať 3 prestupy.

Toto už vyzerá ako celkom obmedzujúca podmienka, lebo v podstate hovorí, že z každej stanice sa nevieme priamo dostať najviac do jednej inej. Zároveň sa v takomto prípade do nej určite vieme dostať na 1 prestup, pretože obe tieto stanice sú spojené priamo so všetkými ostatnými stanicami. A to stačí ako záruka podmienky zo zadania, keďže nemôže nastať ani predošlý problém.

Koľko najviac vieme teda lanoviek ušetriť oproti maximu? Spomedzi všetkých staníc môžeme bez ujmy na všeobecnosti vybrať dvojicu a nemať medzi nimi lanovku. Potom vieme, že z nich do ostatných bude viesť lanovka. Zvyšné stanice sú teda všetky ekvivalentné a môžeme vytvoriť ďalšiu dvojicu. Takto teda dosiahneme, že lanoviek bude od maximálneho počtu menej o toľko, koľko dvojíc medzi stanicami vieme vytvoriť. Vo Vysokých Taurách je teda najmenej $\frac{n(n-1)}{2} - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ lanoviek.

3.6 Kubko, Maťko na Salaši

Zadanie. *Z dovolenky sa Maťko vybral za svojím kamarátom bačom Kubkom. Kubko bol veľmi šikovný – dokázal strihať ovce, podojiť ich, zahnať ich do košiara, ale s jedným problémom si Maťko ani Kubko nevedeli rady. Pomôžte im.*

Nájdite všetky kladné celé čísla a, b, c, pre ktoré platí

$$2^{a!} + 2^{b!} = c^3.$$

Riešenie. opravujú **Tomáš S.** (tomas.sasik@trojsten.sk) a **Lucka** (lucka.krajcoviechova@trojsten.sk)

Pri riešení úloh takéhoto typu nám môže pomôcť pozrieť sa na zvyšky po delení nejakým číslom. V rovnici sa nám vyskytuje tretia mocnina, pozrime sa teda, aké zvyšky môže dávať c^3 po delení 7[5]:

$$
\begin{aligned}
0^3 &\equiv 0 \pmod 7,\\
1^3 \equiv 2^3 \equiv 4^3 &\equiv 1 \pmod 7,\\
3^3 \equiv 5^3 \equiv 6^3 &\equiv 6 \pmod 7.
\end{aligned}
$$

Sú to teda len tri zvyšky, a to $0, 1, 6$. Navyše $2^{a!}$ môže po delení 7 dávať len zvyšky $2, 4, 1$, keďže pre $a \geq 3$ platí $3 \mid a!$, a preto

$$2^{a!} = \left(2^3\right)^{\frac{a!}{3}} \equiv 1 \pmod 7.$$

Podobne aj $2^{b!}$ dáva po delení 7 zvyšok $2, 4$ alebo 1. Potrebujeme teda nájsť dve (nie nutne rôzne) čísla z množiny $\{1, 2, 4\}$ tak, aby ich súčet dával po delení 7 zvyšok z množiny $\{0, 1, 6\}$. Jednoducho overíme, že to spĺňajú len dvojice $(2, 4), (4, 2), (4, 4)$, z čoho dostaneme, že (a, b) musí byť spomedzi $(1, 2), (2, 1), (2, 2)$. Avšak

$$2^{1!} + 2^{2!} = 2^{2!} + 2^{1!} = 6$$

nie je tretia mocnina prirodzeného čísla, takže ostáva len prípad $a = b = 2$ a vtedy platí

$$2^{2!} + 2^{2!} = 8 = 2^3,$$

takže úloha má práve jedno riešenie, a tým je $a = b = c = 2$.

Iné riešenie

Ukážeme si ešte jedno riešenie, ktoré využíva inú myšlienku. BUNV[6] môžeme predpokladať $a \leq b$. Potom rovnicu prepíšeme do tvaru

$$2^{a!} \cdot \left(1 + 2^{b!-a!}\right) = c^3.$$

Ak $a < b$, tak v zátvorke je nepárne číslo a pred ňou je mocnina dvojky, takže tieto dve čísla sú nesúdeliteľné. Na to, aby bol ich súčin treťou mocninou, tak musí každé z nich byť treťou mocninou prirodzeného čísla, takže

$$1 + 2^{b!-a!} = d^3$$

pre nejaké prirodzené d. Odčítaním 1 z oboch strán a úpravou na súčin dostaneme

$$2^{b!-a!} = d^3 - 1 = (d-1)\left(d^2 + d + 1\right).$$

Čísla d a d^2 majú rovnakú paritu, takže $d^2 + d$ je párne, ale potom $d^2 + d + 1$ je nepárne číslo väčšie ako 1, ktoré delí mocninu dvojky, čo je spor, takže úloha nemá riešenie, v ktorom $a < b$.

[5] Číslo 7 môže vyzerať trochu náhodne, no vybrali sme si ho preto, lebo tretie mocniny majú pekné zvyšky po delení 7. Podobne sa často používa, že druhé mocniny majú pekné zvyšky po delení číslami 3 a 8, no aj iné čísla nám môžu niekedy povedať o našej úlohe niečo viac.

[6] bez ujmy na všeobecnosti

Ostáva nám už teda iba prípad $a = b$, kedy

$$2 \cdot 2^{a!} = c^3,$$

čiže $2^{1+a!}$ má byť treťou mocninou, čo sa stane práve vtedy, keď $1 + a!$ je deliteľné tromi, a to je práve pre $a = 2$. Ľavá strana rovnice v zadaní má vtedy hodnotu 8, čo je 2^3, takže opäť dostaneme jediné riešenie $a = b = c = 2$.

3.7 Kopu Mincí Sústredím

Zadanie. *Za odmenu sa Kubko ponúkol, že Maťkovi navarí polievku. Avšak na nákup surovín sú potrebné peniaze, preto najskôr museli pozbierať všetky mince. A to nie len tak hocijakým spôsobom.*

V rovine leží $n \geq 2$ mincí (ktoré považujeme za body). V každom kroku môžeme vziať dvojicu mincí, z ktorých jedna leží v bode A a druhá v bode B a obe ich preniesť do stredu úsečky AB. Určte, pre ktoré n sa dajú všetky mince v konečnom počte krokov presunúť do jedného bodu bez ohľadu na to, ako boli rozložené na začiatku.

Riešenie. opravujú **Andy** (martin.andricik@gmail.com) a **Noro Micheľ** ()

Je dobré si všimnúť jednoduchú vlastnosť, ktorú „strednutie“ dvojice mincí nezmení. Je to poloha ťažiska dvojice mincí, a teda aj ťažiska celku. Nasleduje obkec, ktorý túto myšlienku zapíše.

Pre dvojicu mincí M a N, ktoré majú v (kartézskych) osiach x a y súradnice $[M_x,\ M_y]$, $[N_x,\ N_y]$, máme dvojicu súčtov $M_x + N_x$; $M_Y + N_y$, ktorú môžeme značiť skrátene $M + N$ (teda ide o nezávislé sčítanie dvoch dvojíc čísiel). Prečo má každá dvojica mincí (mincami myslíme súradnice ich stredov, čo je jediná relevantná informácia o nich) pred strednutím a po strednutí rovnaký súčet? To je preto, že stred M a N sa nachádza v priemere x-ových, ako aj y-ových súradníc M, N (ak neveríte, je to ľahké cvičenie na podobné trojuholníky), teda podľa našej konvecnie je to $M' = N' = \frac{M+N}{2}$, takže súčet $M' + N'$ aj po strednutí ostane rovnaký. Skúsme preto dobre definovať ťažisko T, ktoré by sa, intuitívne, tiež nemalo meniť. Nech je to

$$T = \frac{M_1 + M_2 + \cdots + M_n}{n},$$

kde $M_1, M_2, \ldots, M_n$ značí súradnice všetkých n mincí. No a keďže súčet $M_1 + M_2 + \cdots + M_n$ je invariantný, počet mincí tiež, tak aj T je invariantné. Ťažisko T je však na konci zároveň polohou každej mince v tomto momente.

Všimnime si cestu jednej mince. Pri každom spojení s inou mincou sa jej príspevok predelí dvomi. Táto minca prispieva do polohy ťažiska $\frac{1}{n}$-tinou svojej pôvodnej polohy a poloha ťažiska je zároveň jej konečná poloha. To by mohlo znieť nádejne na zabránenie preusporiadania niektorých pozícií do jedného bodu, totiž v tejto chvíli vidíme súvislosť medzi tým, ako sa môže minca hýbať, a tým, kde (v závislosti na n) má skončiť. Povedzme, že ak by bol príspevok jednej mince nejako unikátny (napríklad $\sqrt{2}$, alebo by to bola jediná minca s nenulovými súradnicami), tak by sa dalo ľahko povedať, aký príspevok môže a musí táto minca mať na ťažisko T. Konštrukcií je mnoho, ukážeme si jednu.

Konštrukcia pozícií, ktoré sa nedajú strednúť do jedného bodu

Nech $n - 1$ mincí má obe súradnice 0, minca M_n bude na mieste $[0, 1]$. Teda každá M_i musí skončiť po konečnom počte krokov na pozícii $T = \frac{1}{n}$. Mincu M_i po strednutí, ktorého sa zúčastnila, značme M_i'. Dokážeme, že ak je každá M_i zapísateľná ako $[0, \frac{p}{q}]$, kde p, q sú nesúdeliteľné, q je mocnina dvojky (ďalej už budeme, ak dovolíte, písať len $\frac{p}{q}$, lebo prvá súradnica je stále 0), tak to isté platí aj pre M_i'. To na začiatku platí, keďže všetky mince majú celočíselné súradnice.

Nazačiatku je $M_i = 0 = \frac{0}{2^0}$ pre $i < n$ a $M_n = 1 = \frac{1}{2^0}$. Ďalej použijeme indukciu. Nech sa M_i, M_j chystajú stredniť. $M_i = \frac{p}{2^k}$, $M_j = \frac{r}{2^l}$. Potom

$$M_i' = M_j' = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{2^k} + \frac{r}{2^l}\right) = \frac{p.2^l + l.2^k}{2^{k+l+1}}.$$

V čitateli má tento výraz prirodzené číslo, v menovateli mocninu dvojky, vykrátime prebytočné dvojky a je v požadovanom tvare.

A čo ťažisko? To je $1/n$, a keďže každá minca je vždy $[0, \frac{p}{2^x}]$, $x \in \mathbb{N}$, čo chceme, aby bolo $[0, \frac{1}{n}]$, tak n je mocninou dvojky, v opačnom prípade sa všetky mince nedajú strednúť do jedného bodu.

Strednutie pre vyhovujúce n

Tým máme ťažšiu časť hotovú a ostáva vymyslieť algoritmus pre dostanie $n = 2^x$ mincí do jedného bodu, t. j. prípad, keď n je mocninou dvojky. Ak vieme skonštruovať sekvenciu strednutí pre ľubovoľnú konšteláciu $n = 2^x$ mincí, tak popárovaním (nejaké isto existuje) $n = 2^{x+1}$ mincí a následným interpretovaním každej dvojice mincí v jednom bode ako 1 mincu máme $n = 2^x$ mincí, čím sme, spolu s triviálnym indukčným predpokladom pre $n = 2$, hotoví.

3.8 Kilá Maťko Skúša

Zadanie. *Keď boli mince vytiahnuté, išiel Maťko do obchodu kúpiť kaleráb. Aby ho nebolo málo ani veľa, vzal si so sebou sadu závaží, ale nevedel nič o ich hmotnostiach. Rád by čo najrýchlejšie našiel najľahšie a najťažšie z nich.*

Maťko má 42 závaží (s kladnými reálnymi hmotnosťami), z ktorých žiadne dve nemajú rovnakú hmotnosť. Má aj rovnoramenné váhy, na ktoré dokáže umiestniť na každú stranu jedno závažie a váhy ukážu, ktoré z nich je ťažšie (nie však o koľko). Rád by zistil, ktoré z jeho závaží je najľahšie, a ktoré najťažšie. Určte najmenšie v také, že sa to Maťkovi podarí na v vážení bez ohľadu na hmotnosti jednotlivých závaží.

Riešenie. opravuje **Jožo** (jozef.rajnik@trojsten.sk)

Skúsme sa na začiatok zamyslieť nad jednoduchšou úlohou. Čo ak by Maťko chcel nájsť len najťažšie závažie? Možno ste sa s takouto úlohou stretli. Po nejakom čase rozmýšľania nie je náročné prísť na to, že to Maťko zvládne na 41 vážení. Napr. môže porovnávať vždy doposiaľ najťažšie závažie. Dokázať, že na menší počet vážení to nejde, je o niečo náročnejšie. Môžeme využiť, že každé závažie sa musí niekedy vážiť. To nám dá však len príliš slabý odhad, lebo na to nám stačí len 21 vážení. Pre dokázanie správneho odhadu si môžete každé závažie predstaviť vo vlastnej skupinke. Pri každom porovnaní závaží ich skupinky spojíme. Pre určenie najťažšieho závažia potrebujeme dostať len jednu skupinku. Detaily riešenia tejto úlohy nechávame na vás.

Čo ale ak chceme nájsť aj najťažšie, aj najľahšie závažie? Asi dosť rýchlo nám napadne, že môžeme na 41 vážení nájsť najťažšie závažie a potom spomedzi zvyšných 41 závaží vieme na 40 vážení nájsť najľahšie. Je to ale najlepšie, čo vieme? Musíme najťažšie a najľahšie hľadať takto separovane? Nevieme to nejako skombinovať? Môžeme nad tým pouvažovať. Alebo sa môžeme pustiť do dokazovania, prečo je toto optimálny počet vážení. Vtedy zistíme, že nám to moc nejde dokázať. Predsa len vieme nejaké váženia ušetriť, ak toto skombinujeme.

Opis správneho spôsobu váženia

Kľúčovou myšlienkou je správna deľba práce. Najskôr si rozdeľme závažia do 21 dvojíc a každú dvojicu odvážme. Dostaneme tak 21 závaží, ktoré z vážení vyšli ako ťažšie – niekde medzi nimi sa musí nachádzať aj najťažšie. Zoberme si ľubovoľné z nich ako *favorita* a postupne pre každé zo zvyšných 20 závaží spravíme nasledovné: závažie porovnáme s aktuálnym favoritom a ak bude ťažšie ako favorit, tak ním nahradíme doterajšieho favorita. Takto po 20 váženiach bude favoritom určite najťažšie závažie. Podobne, medzi zvyšnými 21 závažiami, ktoré vyšli z prvých vážení ako ľahšie, sa musí nachádzať najľahšie závažie. Podobným spôsobom vieme nájsť aj to na 20 vážení. Týmto spôsobom sme našli najľahšie a najťažšie závažie na $21 + 20 + 20 = 61$ vážení.

Ako dokázať, že to lepšie nejde?

Pri úlohách toho typu to zvykne bývať tá ťažšia časť. No napriek tomu sa k tomu dá pristúpiť hravo. Môžeme sa vžiť do role Maťkovho nepriateľa. V tomto prípade si za jeho nepriateľom môžeme predstaviť váhu alebo osud. Ako Maťkov nepriateľ môžeme voliť také situácie, aby sme mu čo najviac znepríjemnili život. Môžeme si to predstaviť tak, že na začiatok určíme hmotnosti závaží. Keď nám to bude vyhovovať, tak môžeme nejakému závažiu zmeniť hmotnosť, pokiaľ tým nenarušíme žiaden predošlý výsledok váženia. Totiž pri týchto nových hmotnostiach závaží by Maťko postupoval presne rovnako, lebo by dostával rovnaké výsledky vážení. Takúto zmenu hmotnosti nemá ako rozlíšiť. Tento prístup využijeme aj my.

Najskôr však sa zamyslime nad niečím, čo nám ponúkne správny pohľad na to, čo presne sa v tejto úlohe deje. Pozrime sa, čo sa dozvieme z jedného váženia. Jedno závažie bude ľahšie a druhé ťažšie. O tom ľahšom vieme povedať, že rozhodne nebude najťažším. Podobne, ťažšie závažie isto nebude najľahším. Preto si po každom vážení na ťažšie závažie napíšeme znak T a na ľahšie závažie znak L. Keď na 41 závažiach budeme mať znak L, tak vieme, že jediné zostávajúce závažie musí byť najťažšie. (Vyskúšajte si to na našej stratégii opísanej vyššie, príp. na iných stratégiách.) Dôležité však je, že to platí aj opačne, čo si teraz ukážeme.

Označme si najťažšie závažie M (to isto nemá znak L). Čo ak okrem neho nejaké závažie A tiež nemá znak L? Ak zvýšime hmotnosť závažia A nad hmotnosť závažia M, tak sa A stane najťažším závažím. Zjavne sme tým žiaden výsledok váženia neporušili, lebo závažie A vyšlo z každého váženia ako ťažšie (lebo nemá znak L) a ostatné váženia touto zmenou neovplyvníme. V takejto situácii teda môže byť závažie A rovnako dobre najťažším, preto Maťko nevie určiť, ktoré to je. Teda na určenie najťažšieho závažia Maťko potrebuje, aby 41 závaží malo znak L. Analogicky, na určenie najľahšieho závažia Maťko potrebuje, aby 41 závaží malo znak T. Teda celkovo Maťko potrebuje 82 znakov.

Pozrime sa, koľko znakov môže Maťkovi pribudnúť, keď odváži závažia A a B:

1. A aj B sú neoznačené. Potom vždy dostane jedno znak T a druhé L. Maťkovi pribudnú dva znaky.

2. A má znak T (príp. T a L) a B je neoznačené. Keďže B je neoznačené, nebolo ani vážené. Preto môžeme zmeniť jeho hmotnosť tak, aby bolo ľahšie ako A. Váha tak Maťkovi povie, že B je ľahšie, čím mu pribudne len jeden znak L na závažie B.

3. A má znak L a B je neoznačené. Podobne ako vyššie zariadime, nech je B je ťažšie. Maťkovi pribudne jeden znak.

4. A má znak T a B má znak L. Ako sme už ukázali, závažie A bez symbolu L môžeme zmeniť na závažie s najvyššou hmotnosťou. Vtedy sa Maťko dozvie, že A je ťažšie ako B a žiaden nový znak tým nezíska.

5. Vo všetkých ostatných prípadoch majú závažia A, B aspoň tri znaky. Preto bez ohľadu na výsledok váženia Maťkovi pribudne najviac jeden znak.

Vo všetkých prípadoch okrem prvého pribudne Maťkovi najviac jeden znak. Avšak každý prírastok dvoch nových znakov (1. prípad) stojí Maťka dve neoznačené závažia. Preto dva znaky nám môžu pribudnúť najviac pri $42/2 = 21$ váženiach. Vo zvyšných váženiach vie Maťko získať len jeden. Aby získal 82 znakov, tak potrebuje spraviť ešte aspoň $82 - 2 \cdot 21 = 40$ vážení. Tým sme dokázali, že na nájdenie najťažšieho a najľahšieho závažia Maťko potrebuje aspoň $21 + 40 = 61$ závaží. Tým je naše riešenie úplné.

Pohľad na úlohu cez teóriu grafov

V niektorých úlohách o vážení a porovnávaní vie prísť vhod predstaviť si situáciu pomocou orientovaného grafu. Závažia budú vrcholy grafu. Zakaždým, keď zistíme, že závažie A je ťažšie ako závažie B, tak do grafu pridáme orientovanú hranu z vrcholu A do vrchola B. Ak ste sa s grafmi ešte nestretli, ide o matematický pojem, ktorý priamo zodpovedá mnohým našim náčrtom. Závažia si vieme kresliť ako body (vrcholy) na papier. Nakresliť hranu z A do B znamená nakresliť šípku z A do B.

Na dokazovanie, že menej ako 61 vážení Maťkovi nestačí, sa vieme opäť pozrieť ako na hru. Maťko si vyberie dva vrcholy a my medzi ne nakreslíme orientovanú hranu nami vybraným smerom. Pri tom nám stačí dodržať, aby sme v našom grafe nevytvorili orientovaný cyklus (teda taký cyklus, v ktorom sú všetky hrany orientované jedným smerom). Ak toto dodržíme, tak existenciu hmotností závaží, ktoré budú konzistentné so všetkými váženiami, nám zaručuje existencia topologického usporiadania: Ak máme orientovaný graf bez orientovaných cyklov, tak jeho vrcholy možno zoradiť do postupnosti tak, že pre každú orientovanú hranu z vrchola A do vrchola B platí, že vrchol A sa nachádza v postupnosti skôr ako B. Takáto postupnosť sa nazýva *topologické usporiadanie* orientovaného grafu. Môžete si skúsiť toto tvrdenie dokázať, nie je to náročné. Zdôrazňujeme však, že graf, tak ako ho berieme, musí mať konečný počet vrcholov.

S využitím grafov vieme vyriešiť aj spomínanú jednoduchšiu úlohu. Rozmyslite si, že aby sme vedeli jednoznačne určiť najťažšie závažie, náš graf po odmyslení orientácie hrán musí byť *súvislý* – medzi každými dvoma vrcholmi sa musíme vedieť dostať po hranách. Potom nám stačí využiť známy výsledok o tom, že súvislý graf na n vrcholoch má aspoň $n - 1$ hrán.

3.9 Králik Ma Sužuje

Zadanie. *Po výdatnej porcii polievky sa Maťko rozhodol, že si zaobstará králika. Potreboval by však vedieť, koľko najviac jedla vie králik za jeden deň zjesť, aby vždy vedel kúpiť dostatok jedla.*

Nech a, b a c sú kladné reálne čísla, pre ktoré platí $a + b + c = 1$. Dokážte, že platí

$$a\sqrt{a^2 + 6bc} + b\sqrt{b^2 + 6ac} + c\sqrt{c^2 + 6ab} \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Riešenie. opravuje **Lukáš** (lukas.gaborik@trojsten.sk)

Nerovnosť máme dokázať pre kladné reálne čísla. Vtedy sa oplatí zamyslieť nad tým, ktoré nerovnosti platia len na kladných (resp. nezáporných) reálnych číslach. Medzi tie známejšie a používanejšie z nich patria najmä nerovnosti medzi priemermi (KAGH)[7] a niektoré tvary Cauchyho-Schwarzovej-Buňakovského nerovnosti[8], ktorá sa často nazýva skrátene Cauchyho-Schwarzova (CS) nerovnosť. Keďže na ľavej strane skúmanej nerovnosti máme odmocninu, ako rozumné cesty sa javia AG nerovnosť (pretože geometrický priemer je vlastne odmocnina) a odmocninový tvar CS nerovnosti. Ukážeme si obe cesty.

Riešenie cez AG nerovnosť

Ľavú stranu nerovnosti si vieme prepísať aj ako

$$\sqrt{a^2(a^2+6bc)}+\sqrt{b^2(b^2+6ac)}+\sqrt{c^2(c^2+6ab)}=\sqrt{a(a^3+6abc)}+\sqrt{b(b^3+6abc)}+\sqrt{c(c^3+6abc)}.$$

Keď každú z týchto troch odmocnín ohraničíme zhora pomocou AG nerovnosti, dostaneme

$$\sqrt{a(a^3+6abc)}+\sqrt{b(b^3+6abc)}+\sqrt{c(c^3+6abc)}\overset{\mathrm{AG}}{\leq}\frac{a+(a^3+6abc)}{2}+\frac{b+(b^3+6abc)}{2}+\frac{c+(c^3+6abc)}{2}.$$

Pravú stranu tejto nerovnosti však vieme zjednodušiť do tvaru

$$\frac{(a+b+c)+(a^3+b^3+c^3)+18abc}{2}=\frac{a^3+b^3+c^3+18abc+1}{2}.$$

Podarilo sa nám teda dokázať, že

$$a\sqrt{a^2+6bc}+b\sqrt{b^2+6ac}+c\sqrt{c^2+6ab}\leq\frac{a^3+b^3+c^3+18abc+1}{2}. \tag{9.1}$$

Ak by sa nám podarilo dokázať, že

$$\frac{a^3+b^3+c^3+18abc+1}{2}\overset{?}{\leq}\frac{3\sqrt{2}}{4}, \tag{9.2}$$

tak zapojením (9.1) a (9.2) by sme dostali požadovanú nerovnosť. Stačí nám teda dokázať (9.2).

Ak ste už videli dôkaz nerovnosti, väčšinou postupoval jedným z dvoch spôsobov:

- To, čo máme dokázať, upravujeme, až kým sa nedostaneme k niečomu, čo platí. Táto metóda má však háčik, že ide opačným smerom, ako by sme chceli, a preto všetky úpravy, čo robíme, musia byť ekvivalentné, aby sme sa mohli vrátiť naspäť.

- Zoberieme si niečo, čo platí (tiež známe ako „*spadlo z neba*“) a postupnými úpravami dosiahneme to, čo máme dokázať. Toto je síce z matematickej stránky úplne korektné, avšak často neintuitívne a pre čitateľa je nejasné, ako by na také niečo mal prísť on sám.

[7] https://cs.wikipedia.org/wiki/Nerovnosti_mezi_pr%C5%AFm%C4%9Bry

[8] https://prase.cz/common/show.php?title=Cauchy-Schwarzova+nerovnost&file=library/CauchySchwarzAS/CauchySchwarzAS

Spôsob, ako sa tomuto elegantne vyhnúť, je dokazovať nerovnosť sporom – teda budeme predpokladať, že existujú $a_0,\ b_0,\ c_0 \in \mathbb{R}^+$ spĺňajúce $a_0 + b_0 + c_0 = 1$, pre ktoré (9.2) neplatí. Potom ale dostávame

$$\frac{a_0^3 + b_0^3 + c_0^3 + 18a_0b_0c_0 + 1}{2} > \frac{3\sqrt{2}}{4},$$

$$a_0^3 + b_0^3 + c_0^3 + 18a_0b_0c_0 > \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1.$$

Skúsme teraz využiť $a_0 + b_0 + c_0 = 1$ na to, aby sme sa zbavili tretích mocnín. Tam nám pomôže, že $1 = 1^3 = (a_0 + b_0 + c_0)^3 = a_0^3 + b_0^3 + c_0^3 + 3(a_0^2b_0 + a_0^2c_0 + b_0^2a_0 + b_0^2c_0 + c_0^2a_0 + c_0^2b_0) + 6a_0b_0c_0$. Vďaka tomu môžeme nahliadnuť

$$1 - 3(a_0^2b_0 + a_0^2c_0 + b_0^2a_0 + b_0^2c_0 + c_0^2a_0 + c_0^2b_0) + 12a_0b_0c_0 > \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1,$$

$$4a_0b_0c_0 - (a_0^2b_0 + a_0^2c_0 + b_0^2a_0 + b_0^2c_0 + c_0^2a_0 + c_0^2b_0) > \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3},$$

$$a_0^2b_0 + a_0^2c_0 + b_0^2a_0 + b_0^2c_0 + c_0^2a_0 + c_0^2b_0 - 4a_0b_0c_0 < \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Posledná vec, ktorú urobíme, je úprava na štvorec[9]:

$$a_0(b_0^2 - 2b_0c_0 + c_0^2) + b_0(a_0^2 - 2a_0c_0 + c_0^2) + c_0(a_0^2 - 2a_0b_0 + b_0^2) + 2a_0b_0c_0 < \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$a_0(b_0 - c_0)^2 + b_0(a_0 - c_0)^2 + c_0(a_0 - b_0)^2 + 2a_0b_0c_0 \overset{\lightning}{<} \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{9.3}$$

Teraz už však nie je náročné premyslieť si, že všetky členy ľavej strany (9.3) sú nezáporné, a teda aj celá ľavá strana je nezáporná. Pravá strana (9.3) však je záporná (čo sa dá opäť dokázať sporom, preto dôkaz prenecháme ako cvičenie pre čitateľa). Z nerovnosti (9.3) sme teda dostali, že nezáporné číslo je menšie rovné ako záporné číslo, čo je očividná blbosť, teda nastal spor. Preto (9.2) platí, a teda platí aj nerovnosť zo zadania.

Riešenie cez odmocninový tvar CS nerovnosti

Z odmocninového tvaru CS vieme, že

$$\sqrt{a(a^3 + 6abc)} + \sqrt{b(b^3 + 6abc)} + \sqrt{c(c^3 + 6abc)} \leq \sqrt{(a + b + c)[(a^3 + 6abc) + (b^3 + 6abc) + (c^3 + 6abc)]},$$

pričom pravá strana sa dá upraviť do tvaru

$$\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 + 18abc}.$$

[9] Toto sa pri nerovnostiach pomerne často využíva a stojí na tom napríklad aj dôkaz AG nerovnosti pre dva členy. Ak ho nepoznáte, skúste si ho urobiť.

Už len stačí ukázať, že toto je najviac $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. To sa dá urobiť sporom veľmi podobne ako pri dôkaze cez AG nerovnosť. Môžete si premyslieť, ako.

Poznámka 1

Skúsenejší riešiteľ si môže všimnúť, že ohraničenie, ktoré sme vykonali, nie je najtesnejšie. A skutočne, veľmi podobne sa dá dokázať, že

$$a\sqrt{a^2 + 6bc} + b\sqrt{b^2 + 6ac} + c\sqrt{c^2 + 6ab} < 1,$$

ktoré je najtesnejším ohraničením.

Poznámka 2

Prečo teda v zadaní nebolo najtesnejšie ohraničenie, keď išlo pomerne jednoducho dokázať? Totiž, existuje celkom pekný a poučný dôkaz aj pre ohraničenie $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. V stručnosti,

$$\sqrt{a^2(a^2 + 6bc)} + \sqrt{b^2(b^2 + 6ac)} + \sqrt{c^2(c^2 + 6ab)} \overset{\text{CS}}{\leq} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 6(ab + bc + ac)},$$

pričom pravú stranu vieme pomocou $2(ab + ac + bc) = (a + b + c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 = 1 - a^2 - b^2 - c^2$ prepísať na $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{3 - 2(a^2 + b^2 + c^2)}$ a nájsť jej maximum vzhľadom na hodnotu súčtu $(a^2 + b^2 + c^2)$, čo vychádza práve spomínaných $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. Rozhodli sme sa teda dať vám šancu dokázať to aj takto.

3.10 Kilometrov Maťko Spravil

Zadanie. *Maťko si predsavzal, že spraví niečo pre svoje zdravie a prejde chôdzou* 30 *kilometrov. Ba čo viac, nielen že ich prejde, on ich rovno zabehne! Aby však trafil do cieľa a nešiel zbytočne okľukou, bude musieť bežať rovno.*

Je daný trojuholník ABC, v ktorom $|AB| \neq |AC|$. Stred jeho vpísanej kružnice označme I. Nech D je stred strany BC. Dotyčnica z bodu D ku vpísanej kružnici (rôzna od strany BC) sa jej dotýka v bode E. Dokážte, že DI je rovnobežné s AE.

Riešenie. opravujú **Zlodejka** (roberta.jurikova@trojsten.sk) a **Maťko** „**Vodka**“ **Vodička** (vodka@kms.sk)

Označme V bod dotyku BC a vpísanej kružnice. Nech V' je druhý priesečník priamky VI a vpísanej kružnice, takže VV' je jej priemer. Ďalej označme bod dotyku BC a A-pripísanej kružnice P. (A-pripísaná kružnica je taká, ktorá sa dotýka BC z vonkajšej strany a priamok AB a AC.)

Ukážeme, že A, V' a P ležia na jednej priamke.

Veďme rovnobežku s BC cez bod V' a označme priesečníky s $\triangle ABC$ postupne B' a C'. Platí, že $\triangle ABC \simeq \triangle AB'C'$. Všimnime si, že úsečka BC sa dotýka vpísanej kružnice v bode V', lebo bod V' je „najvyššie položený bod“ na vpísanej kružnici, a teda vpísaná kružnica $\triangle ABC$ je zároveň pripísanou kružnicou $\triangle AB'C'$. Vďaka tomu sa $\triangle AB'C'$ zobrazí v rovnoľahlosti so stredom v A na $\triangle ABC$ a vpísaná kružnica na A-pripísanú. Bod V' sa takto zobrazí na P. Z toho plynie, že body A, V' a P ležia na jednej priamke.

Nech E' je druhý priesečník priamky AV' s vpísanou kružnicou. Naším cieľom teraz bude ukázať, že $E = E'$.

O bodoch dotyku pripísanej a vpísanej kružnice platí známe tvrdenie, a to že $|BV| = |PC|$, z čoho dostávame, že aj $|VD| = |DP|$, lebo D je stred strany BC.

Ak toto tvrdenie nepoznáte, tak si ho môžete skúsiť dokázať: Nakreslite si všetky body dotyku vpísanej a pripísanej kružnice a skúste vyjadriť $|BV|$ a $|PC|$ pomocou dĺžok strán trojuholníka ABC. Obe sú rovné $(|AB|+|BC|-|AC|)/2$. Využite, že ak z ľubovoľného bodu spustíme dve dotyčnice ku kružnici, tak vzdialenosť k dvom bodom dotyku je rovnaká.

Keďže VV' je priemer vpísanej kružnice, na ktorej leží aj E', tak uhol $V'E'V$ je pravý (Tálesova veta). Z toho máme, že $VE'P$ musí byť tiež pravý, teda $\triangle V'EP$ je pravouhlý. Platí, že v pravouhlom trojuholníku je stred opísanej kružnice zároveň stredom prepony. Preto je D stred opísanej kružnice $\triangle VE'D$ a z toho $|VD| = |DE'| = |DP|$. To znamená, že V a E' sú dva body ležiace na vpísanej kružnici, ktoré sú rovnako vzdialené od bodu D a takéto body môžu byť len dva. Keďže VD je dotyčnica vpísanej kružnice, tak aj DE' musí byť dotyčnica. Z toho už vyplýva rovnosť $E = E'$.

Posledným krokom je ukázať rovnobežnosť DI a AE. Už sme ukázali, že body A, V', E, P ležia na jednej priamke a tiež, že D je stred VP. Ďalej vieme, že I je stredom VV'. Preto je DI stredná priečka $\triangle VPV'$, čiže DI je rovnobežná z AE. Tým je dôkaz hotový.