Riešenia 1. kola letnej časti

1.1 Konštantne sa Mixujú Stúpenci ($\kappa \leq 1$)

Zadanie. *Ako sa tak Krtko prechádzal po T2, zrazu sa pred ním zjavil portál, ktorý ho vcucol a vypľul priamo v paláci cisára Caligulu. Ten si ho zavolal, pretože stratil prehľad o preferenciách rímskeho ľudu v gladiátorských zápasoch.*

Krtko zistil, že v Ríme sú dva tímy, a to Kolosálne Matické Slizniaky a Katastrofálne Mizerné Salamandry. Oproti minulému roku 3% fanúšikov Kolosálne Matických Slizniakov prešli ku Katastrofálne Mizerným Salamandrám a 5% pôvodných fanúšikov Katastrofálne Mizerných Salamandier prešlo ku Kolosálne Matickým Slizniakom. Avšak počet fanúšikov ani jedného tímu sa oproti minulému roku nezmenil. Koľko fanúšikov má ktorý tím, ak Rím má 5 miliónov obyvateľov?

Riešenie. opravuje **David** (david.belobrad@trojsten.sk)

Začnime tým, že zaznamenáme zmeny v počte fanúšikov jednotlivých tímoch do sústavy rovníc, ktorú si aj upravíme, pričom tím Kolosálnych Matických Slizniakov označíme ako a, zatiaľ čo tím Katastrofálne Mizerných Salamandier ako b:

$$a - 0,03 \cdot a + 0,05 \cdot b = 0,97 \cdot a + 0,05 \cdot b = a,$$

$$b - 0,05 \cdot b + 0,03 \cdot a = 0,95 \cdot b + 0,03 \cdot a = b.$$

Prenásobením oboch rovníc 100 a odrátaním pravých strán od oboch rovníc dostaneme 2 identické rovnice v tvare

$$-3 \cdot a + 5 \cdot b = 0.$$

Táto rovnica nám v podstate hovorí o pomere, v ktorom sa fanúšikovia budú deliť. Vidno, že z tejto sústavy 2 informácie, ktoré by nám zaručili riešenie úlohy nedostaneme. Chceme teda nájsť ďalšiu rovnicu, ktorá by nám pomohla túto úlohu vyriešiť. Je ňou rovnica $a + b = 5\,000\,000$, keďže fanúšikov je spolu 5 miliónov. V tomto momente niektoré riešenia pripustili aj, že $a+b \leq 5\,000\,000$, čo je tiež pekná úvaha, ktorú tu v krátkosti rozoberieme tiež.

Ak $a + b \leq 5\,000\,000$, tak podľa $-3 \cdot a + 5 \cdot b = 0$ vieme, že $a : b = 5 : 3$, teda počet fanúšikov bude v tvare $8k$, kde $k \in \mathbb{N} : 8k \leq 5\,000\,000$. Potom riešenie bude v tejto situácií také, že tím Kolosálnych Matických Sliziniakov má $5k$ a tím Katastrofálne Mizerných Salamandier má $3k$ fanúšikov, pričom $k \in \mathbb{N} : 8k \leq 5\,000\,000$.

Vráťme sa však späť ku situácií, ktorá sa vyskytovala výrazne častejšie a tiež je správnym riešením, teda že $a + b = 5\,000\,000$. Zostáva nám v tom momente vyriešiť len sústavu rovníc

$$a + b = 5\,000\,000,$$

$$5 \cdot b = 3 \cdot a.$$

Vynásobením prvej rovnice piatimi a následným dosadením za $5 \cdot b$ z druhej rovnice dostaneme, že $a = 3\,125\,000$ a následným dosadením do jednej z pôvodných rovníc dostaneme, že $b = 1\,875\,000$. Môžeme ešte skontrolovať, či máme správne riešenie, teda $3\,125\,000 - 3\,125\,000 \cdot 0,03 + 1\,875\,000 \cdot 0,05 = 3\,125\,000 - 93\,750 + 93\,750 = 3\,125\,000$ a $1\,875\,000 - 1\,875\,000 \cdot 0,05 + 3\,125\,000 \cdot 0,03 = 3\,125\,000 - 93\,750 + 93\,750 = 1\,875\,000$.

1.2 Kúpele Majú Štýl ($\kappa \leq 2$)

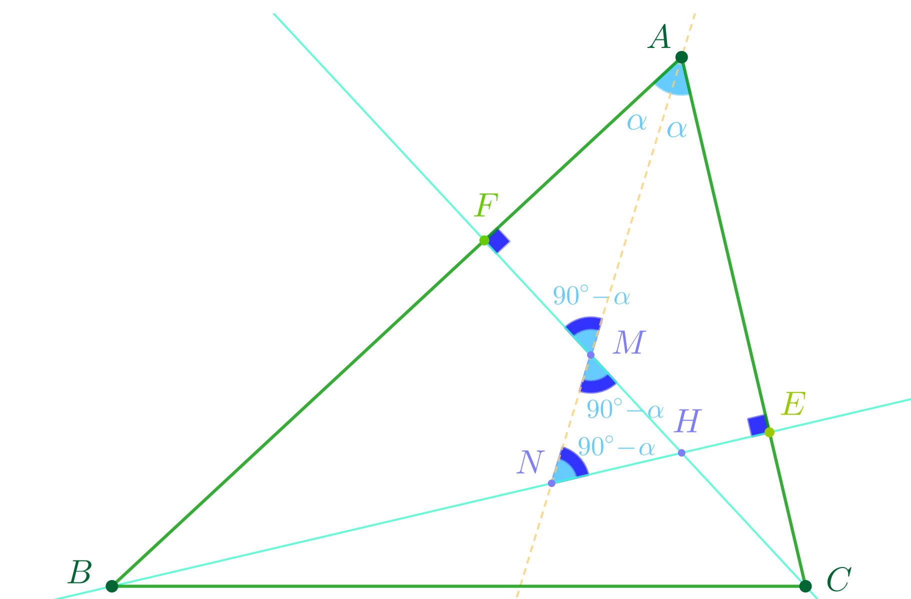
Zadanie. *Keď už bol Krtko v Ríme, tak ho Caligula poprosil, aby mu rozvrhol návrh na nové kúpele.*

Majme ostrouhlý trojuholník ABC, v ktorom $|AB| \neq |AC|$. Označme E pätu výšky na stranu AC, F pätu výšky na stranu AB a H priesečník týchto výšok. Ďalej uvažujme os uhla BAC a jej priesečníky s priamkami CF a BE označme postupne M a N. Dokážte, že trojuholník MNH je rovnoramenný.

Riešenie. opravuje **Viki** (viktoria.pravdova@trojsten.sk)

V prvom rade sa zamyslíme, ako dokázať, že trojuholník je rovnoramenný. No buď tak, že zistíme dĺžku nejakých 2 strán a ukážeme, že sú rovnako dlhé, alebo využijeme to, že uhly pri základni takéhoto trojuholníka sú rovnaké. V tomto prípade sme nemali zadané žiadne dĺžky, skúsime sa teda pozrieť na uhly. Zo zadania hneď vieme o dvoch kľúčových uhloch – jednak uhol CAB máme osou rozdelený na dva rovnaké uhly, nazvime ich α. Dvak vieme o pravých uhloch pri pätách výšok. Poďme sa snažiť z týchto uhlov vyťažiť čo najviac.

Napríklad v trojuholníku AFM si vieme dorátať uhol FMA ako $90° - \alpha$. Keď sa pozrieme bližšie, zistíme, že tento uhol je vrcholovým [1] k uhlu NMH, čiže aj $|\sphericalangle NMH|$ je $90° - \alpha$. Teraz by bolo fajn dostať tento istý uhol aj do niektorého iného rohu trojuholníka NMH. Pozrieme sa na trojuholník ANE – tiež je pravouhlý a má v sebe uhol α, čiže rovnako môžeme dopočítať tretí uhol ANE ako $90° - \alpha$. Keďže bod M leží na úsečke AN a bod H leží na úsečke NE, aj $|\sphericalangle MNH|$ bude $90° - \alpha$. Teraz keď sa pozrieme, už máme v trojuholníku uhly $\sphericalangle HMN$ a $\sphericalangle MNH$ oba s veľkosťou $90° - \alpha$, čo je presne to, čo sme potrebovali. Keďže máme v trojuholníku MNH dva rovnaké uhly, musí byť rovnoramenný.



[1] Všimnite si, že to, či tieto dva uhly sú skutočne vrcholové, závisí od toho, aký obrázok si nakreslíme. Na osi uhla BAC môžu ležať body M a N v opačnom poradí, a vtedy budú uhly AMF a NMH ten istý uhol. Avšak keďže situácia je symetrická, tým sa len vymení úloha bodov M a N a MNH bude tak či tak rovnoramenný.

1.3 Krtkov Mechanický Spreadsheet ($\kappa \leq 3$)

Zadanie. *Keď Caligula s Krtkom sedeli pri večeri, tak si Krtko smutne povzdychol, ako mu chýba počítač, že by si rád spravil spreadsheet. Na to sa Caligula podivil, že také on v živote nevidel, tak sa Krtko hneď podujal mu vysvetľovať, čo to je. Caligulu to úplne nadchlo, takže sa rozhodol, že také nutne potrebuje. Tak Krtko zapojil všetky šedé bunky mozgové a vymyslel prístroj, na ktorom je navinutý papyrus tak, aby keď sa Caligula dostane na koniec tabuľky, mu to ďalej zobrazilo začiatok tabuľky. Krtkova tabuľka má* 2021 *riadkov a dokáže naraz zobraziť len* 90 *riadkov. Teda na začiatku zobrazuje len riadky* 1 *až* 90*. Prístroj tiež obsahuje dve tlačidlá – „hore" a „dole" – ktorými sa vždy vie posúvať o* 3 *riadky hore alebo dole*[2]*. Ak teda na začiatku stlačí tlačidlo „hore", bude vidieť riadky* 2019 *až* 2021 *navrchu a potom riadky* 1 *až* 87*. Caligula si náhodne zvolil dvojicu rôznych riadkov. Aká je pravdepodobnosť, že ich vie zobraziť na obrazovke naraz? Aká by bola táto pravdepodobnosť pre tabuľku s* 2022 *riadkami?*

Riešenie. opravuje **Timka** (timea.jakubocyova@trojsten.sk)

Pozrime sa, ktoré kombinácie riadkov dokáže Krtkova tabuľka zobraziť. Zobrazenú časť tabuľky nazvime okno. To, ktoré riadky sú zobrazené, je jednoznačne dané najvrchnejším zobrazeným riadkom – zobrazený je tento riadok a 89 nasledujúcich riadkov. Takže otázkou je, ktoré riadky vieme dostať na vrch okna pomocou tlačidiel hore a dole. Na začiatku je najvrchnejší riadok 1. Postupným stláčaním tlačidla dole sa vždy posunieme o 3 riadky, takže najvrchnejšími riadkami budú postupne $1, 4, 7, \ldots$. Po k stlačeniach tlačidla dole sa posunieme o $3k$ riadkov, takže najvrchnejším riadkom bude riadok $3k + 1$. Takto dostaneme všetky riadky zo zvyškom 1 po delení 3. Teraz sa chceme pozrieť, čo sa stane, keď prídeme na koniec tabuľky a „pretečieme" znovu na začiatok. Celkový počet riadkov 2021 má zvyšok 2 po delení 3, takže riadok 2020 vieme dostať na vrch okna. Ďalší riadok by bol $2020 + 3 = 2023$, ale uvedomíme si, že riadky $2022, 2023$ sú už vlastne riadky $1, 2$, takže sme na vrch dostali riadok 2. Ďalším opakovaním posunu dole dostaneme na vrch všetky riadky, ktoré majú zvyšok 2 po delení 3. Posledný taký riadok bude 2021 a ďalší riadok $2021 + 3 = 2024$ je už vlastne riadok 3. Od neho ďalej dostaneme navrch dokonca aj všetky riadky, ktoré majú zvyšok 0 modulo 3. Takže v skutočnosti vieme dostať na vrch okna každý jeden riadok.

Teraz potrebujeme nejako uchopiť skutočnosť, že Caligula si volí náhodnú dvojicu riadkov. Môžeme si to predstaviť, že Caligula si náhodne zvolí jeden riadok a potom zo zvyšných 2020 riadkov si náhodne zvolí druhý riadok. Takto vie Caligula zvoliť každú dvojicu riadkov práve dvomi spôsobmi, takže každá dvojica riadkov má rovnakú pravdepodobnosť. Povedzme, že prvý zvolený riadok bol riadok n. Zamyslime sa, ktorý riadok mohol Caligula zvoliť ako druhý, aby sa dal zobraziť spolu s riadkom n. Takéto riadky nazvime zobraziteľné spolu s n. Riadok n vieme dostať na vrch okna, takže 89 riadkov, ktoré nasledujú pod ním, sú zobraziteľné. Takisto riadok n vieme dostať na spodok okna, stačí dostať riadok $n - 89$ [3] navrch, takže 89 riadkov, ktoré sa nachádzajú nad ním, sú tiež zobraziteľné. Rozmyslite si, že žiadne iné riadky nie sú zobraziteľné spolu s n, lebo sú príliš ďaleko od riadku n. To máme spolu $89 + 89 = 178$ zobraziteľných riadkov, pričom Caligula vyberá druhý riadok z 2020 možných. Preto pravdepodobnosť, že vybratá dvojica riadkov bude zobraziteľná, je

$$p_n = \frac{178}{2020} = \frac{89}{1010},$$

[2] Teda ak stlačí „hore", navrchu sa mu zobrazia tri predtým skryté riadky a spodné tri zmiznú. Pre „dole" naopak.

[3] Používame značenie, kde riadky $0, -1, -2, \ldots$ sú totožné s $2021, 2020, 2019, \ldots$ a riadky $2022, 2023, \ldots$ sú totožné s $1, 2, \ldots$ atď.

za podmienky, že prvý riadok bol vybratý riadok n. Keďže však táto pravdepodobnosť je rovnaká pre všetky n, aj celková pravdepodobnosť, že vieme zobraziť dvojicu vybratých riadkov naraz je

$$\frac{89}{1010}.$$

Tabuľka s 2022 riadkami

Tak ako v predchádzajúcom prípade, na vrch okna vieme dostať všetky riadky zo zvyškom 1 modulo 3, keďže začíname na 1. Avšak teraz sú to jediné riadky, ktoré vieme dostať na vrch, pretože celkový počet riadkov 2022 je deliteľný 3. Naozaj, keď sme na riadku n a riadok $n+3$ by už bol mimo tabuľky, tak krokom dole sa v skutočnosti posunieme na $n+3-2022$, čo má stále rovnaký zvyšok modulo 3 ako n. Podobne ak by $n-3$ bol 0 alebo záporný, takže zvyšok vrchného riadku sa vždy zachováva.

Rozdeľme si tabuľku na trojice po sebe idúcich riadkov $\{1,2,3\}$, $\{4,5,6\}$, $\ldots,\{2020,2021,2022\}$. Počet riadkov v okne (90) je tiež deliteľný tromi, takže v okne vždy máme zobrazených 30 celých trojíc, nikdy sa nestane, že by niektorá trojica bola zobrazená len čiastočne. Taktiež každú trojicu vieme dostať tak, že bude tvoriť vrchné tri riadky okna resp. spodné tri riadky. Povedzme, že Caligula zvolil ako prvý riadok n. Tento riadok vieme dostať najvyššie tak, že jeho trojicu dáme na vrch tabuľky. Takto s ním vieme zobraziť 29 nasledujúcich trojíc. Najnižie bude, keď jeho trojica bude na spodku tabuľky, vtedy s ním zobrazíme 29 predchádzajúcich trojíc a v oboch prípadoch ešte samozrejme zobrazíme aj dva riadky z jeho trojice. To je spolu $3\cdot 29+3\cdot 29+2 = 176$ zobraziteľných riadkov. Caligula druhý riadok vyberá spomedzi 2021 riadkov, takže pravdepodobnosť, že vyberie zobraziteľný, je

$$\frac{176}{2021}.$$

Všimnime si ešte, že menší trik s rozdelením tabuľky na trojice, ktorý sme použili, nebol nutný. Mohli sme rozobrať 3 prípady podľa toho, aký zvyšok modulo 3 má prvý Caligulov vybratý riadok n. Počty zobraziteľných riadkov pod ním a nad ním by boli síce v jednotlivých prípadoch rozdielne, ale celkový počet by bol vždy rovnaký, a to 176. My sme sa však šikovne vyhli rozoberaniu troch prípadov.

1.4 Konzul Má SPQR ($\kappa \leq 5$)

Zadanie. *Caligula si nevedel poradiť s úlohou, tak ju zveril jeho obľúbenému konzulovi Incitatovi. Ten si s ňou ale nevie dať rady. Veď je predsa kôň! Krtko neváhal ani chvíľu a pribehol mu hneď na pomoc.*

Máme 100 kartičiek s číslami od 1 do 100 (každá kartička má práve jedno číslo a každé číslo od 1 do 100 je na práve jednej kartičke). Z nich si náhodne vyberieme 48 kartičiek. Ukážte, že si vieme z týchto 48 kartičiek vybrať také dve, že ich súčet bude deliteľný 11.

Riešenie. opravujú **Lucy** (lucia.tothova@trojsten.sk) a **Simi** (simona.pecserke@trojsten.sk)

Po prečítaní zadania sa zháčime, že nám predsa nebude nikto hovoriť, čo vieme a nevieme urobiť a pokúsime sa teda nájsť takú kombináciu 48 kariet, v ktorej súčet žiadnych dvoch z nich nie je deliteľný 11. Po tom, čo si tí z nás, ktorí neobľubujú teóriu čísel povzdychnú, začneme tým, že si čísla od 1 do 100 rozdelíme na skupiny podľa zvyšku po delení 11. Týchto skupín nám vznikne 11, keďže možné zvyšky sú 0 až 10.

Keďže vieme, že ak si vyberieme číslo zo skupiny so zvyškom 1, potrebujeme nejaké číslo zo skupiny so zvyškom 10 na to aby ich súčet bol deliteľný 11, môžeme si vybrať čísla tak, aby takéto kombinácie nevznikli. Skupina čísel so zvyškom 1 má 10 členov, všetky ostatné 9. Okrem toho čísla v skupine so zvyškom 0 potrebujú pár z tej istej skupiny, kým všetky ostatné potrebujú pár z jednej z ostatných skupín. Máme teda 5 párov skupín, z ktorých si môžeme vybrať z každého jednu, a skupinu s číslami so zvyškom 0, z ktorej si môžeme vybrať práve jedno číslo.

Ak teda do nášho výberu 48 kariet zvolíme skupinu so zvyškom 1, pretože má 10 členov, a štyri ďalšie skupiny po 9 členoch, budeme mať 46 kariet. Potom si môžeme ešte vybrať 1 ďalšiu kartu zo skupiny so zvyškom 0, čo nám dá 47 kariet. Avšak ktorúkoľvek ďalšiu kartu by sme pridali, určite by mala nejaký pár, a teda aj keby sme karty volili náhodne, neexistuje situácia, v ktorej by pár nevznikol.

1.5 Kokos, Ma Štvú ($\kappa \leq 8$)

Zadanie. *Keď sa Caligula dopočul, že sa šíria mestom klebety, že Incitatus nebol schopný vyriešiť úlohu sám, tak ho to napajedilo, že si hneď dal zavolať obyvateľov Ríma.*

Obyvatelia Ríma[4] *sa postavili do radu a Caligula sa pred každého postavil a hodil si spravodlivou mincou. Ak padla hlava, tak Krtko zapísal H a obyvateľovi hlava ostala. Ak padol orol, tak si Krtko zapísal O a obyvateľa obesili. Caligula pokračoval, až pokým nemal Krtko napísanú postupnosť troch po sebe idúcich hodov H, H, O alebo O, H, O. Aká je pravdepodobnosť, že to bolo O, H, O?*

Riešenie. opravujú **Danko** (daniel.teplan@trojsten.sk) a **Jožtek** (jozef.rajnik@trojsten.sk)

Vzorové riešenie tejto úlohy si môžeš pozrieť aj ako video na našom YouTube kanáli `www.youtube.com/KorMatSem`.

V úlohe musíme zodpovedať otázku, aká je pravdepodobnosť, že pri hádzaní mincou sa skôr vyskytne postupnosť *OHO* ako *HHO*. Najjednoduchšie preto bude pozrieť sa na rôzne situácie, ktoré môžu nastať po pár prvých hodoch a pri ktorých vieme ľahko určiť pravdepodobnosť výskytu našich dvoch trojíc.

Ak máme ľubovoľne dlhú postupnosť, pri ktorej sa ešte ani jedna z hľadaných trojíc nevyskytla, zaujímajú nás už len posledné dva hody, lebo už len tie môžu s budúcimi hodmi vytvoriť hľadanú trojicu. Teda o postupnosti s ľubovoľnými dvoma znakmi na konci vieme povedať, že pravdepodobnosť pre *OHO* bude rovnaká, ako v situácii ak by pred týmito znakmi iné neboli. Preto rozoberieme ako vyzerajú šance na *OHO* po prvých dvoch hodoch:

1. *HH* – Ak ďalej hodíme *O*, skončíme bez *OHO*. Ak hodíme *H*, znova sme v rovnakej situácii s *HH* na konci. Buď sa teda nič nezmení, alebo dostaneme *HHO*, takže šanca že dostaneme *OHO* je 0.
2. *OH* – Ak hodíme *O*, skončíme s *OHO*, a ak hodíme *H* tak sa dostaneme do situácie 1, kde určite nehodíme *OHO*. Je teda 1/2 šanca, že skončíme s *OHO*.
3. *OO* – Ak hodíme *O*, nič sa nezmení na situácii, až pokým nehodíme *H*. Vtedy sa dostaneme do situácie 2, kde už vieme, že šanca na *OHO* je 1/2, a to je teda šanca aj v tejto situácii.
4. *HO* – Ak hodíme *O*, dostaneme sa do situácie 3, v opačnom prípade do situácie 2. V oboch prípadoch je šanca na *OHO* 1/2. Z toho vyplýva že tá istá šanca 1/2 bude aj tu.

Každý zo štyroch prípadov vyššie nastane po prvých dvoch hodoch s pravdepodobnosťou 1/4. Ak teda chceme zistiť, aká je šanca, že sa stane konkrétny prípad a v ňom padne *OHO*, vynásobíme každú pravdepodobnosť 1/4. Tieto pravdepodobnosti potom stačí len sčítať, aby sme dostali celkovú pravdepodobnosť. Výsledná šanca, že skončíme s *OHO*, je teda

$$\frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

[4] Pre potreby tejto úlohy predpokladáme, že Rím má nekonečne veľa obyvateľov.

Poznámka

Na prvý pohľad sa môže zdať, že musí byť pravdepodobnosť pre obe tieto postupnosti rovnaká, pretože šanca, že hodíme z troch hodov ktorúkoľvek z nich, je 1/8. To by určite platilo, keby sme sa pýtali nezávisle na pravdepodobnosť, že padnú v prvej, druhej, až n-tej neprekrývajúcej sa trojici hodov. V tejto úlohe nás však zaujíma výskyt takejto trojice kdekoľvek v postupnosti. Čiže jednotlivé možnosti, kde sa postupnosť môže vyskytnúť, nie sú nezávislé a ak nájdeme ľubovoľnú postupnosť, kde je na konci jedna z týchto trojíc, ovplyvní nám to pravdepodobnosť, že sa pred tým už vyskytla druhá trojica.

Iné riešenie: cez opis priaznivých možností

Pravdepodobnosť sa štandardne počíta ako pomer počtu priaznivých možností k počtu všetkých možností. Tento prístup má však dva problémy. Po prvé, všetkých, aj priaznivých možností je v tejto úlohe nekonečne veľa a nemôžeme dávať do pomeru dve nekonečná. Po druhé, pri takýchto úlohách nemusí byť ľahké počítať priaznivé možnosti. Priaznivé postupnosti sú totiž také, ktoré sa končia na *OHO* a nikde skôr sa v nich nevyskytne *OHO* ani *HHO*. Ukážeme si však, že priaznivé možnosti sa dajú v tejto úlohe celkom pekne opísať. Potom si len už budeme musieť nejako poradiť s ich nekonečným počtom. No ukážeme si, že s využitím mierne pokročilej matematiky je aj to možné.

Existuje jedna priaznivá postupnosť dĺžky 3: *OHO*. Priaznivá postupnosť dĺžky 4 sa musí končiť na *OHO*, teda máme dve možnosti: *HOHO* a *OOHO*. Hoci pre úplnosť riešenia to nie je potrebné, pre názornosť uvedieme ešte priaznivé postupnosti dĺžky 5. Na posledných štyroch miestach musí byť jedna z dvoch priaznivých postupností dĺžky 4. Avšak pred postupnosť *HOHO* nemôžeme dať *O*, lebo by sme dostali *OHO* už po treťom hode, ani tam nemôžeme dať *H*, lebo by sme po treťom hode dostali *HHO*. Túto úvahu teraz zovšeobecníme. Ideálnym spôsobom je dôkaz matematickou indukciou.

Ukážeme, že pre každé $n \geq 4$ existujú práve dve priaznivé postupnosti dĺžky n, z ktorých sa jedna začína na *HO* a druhá na *OO*. Toto tvrdenie dokážeme matematickou indukciou. Prípad $n = 4$ sme už overili vyššie. Predpokladajme teraz, že máme dve priaznivé postupnosti pre nejaké dané n. Jedna z nich sa začína na *HO* – pred ňu nevieme pridať ani *H*, ani *O*. Druhá sa začína na *OO* – pred ňu vieme pridať aj *H*, aj *O*. Dostaneme tak opäť dve priaznivé postupnosti dĺžky $n + 1$, jedna sa začína na *HOO*, druhá na *OOO*. Tým je dôkaz indukciou hotový. Všimnite si, že sme do nášho dokazovaného tvrdenia pridali predpoklad o ich začiatku. Bez neho by sa nám ťažšie dokazovalo.

Ako teraz určíme pravdepodobnosť? Aby sme sa zbavili nekonečna, rozdelíme si náš problém na nekonečne veľa prípadov. Pravdepodobnosť, že *OHO* padne po n-tom hode si označíme p_n. Pre $n \geq 4$ máme dve priaznivé postupnosti, ako môže padnúť *OHO* po n-tom hode. Každú z týchto postupností dostaneme s pravdepodobnosťou $1/2^n$ (premyslite si). Preto $p_n = 1/2^n + 1/2^n = 1/2^{n-1}$. Špeciálne pre $n = 3$ máme jedinú priaznivú postupnosť, ktorá padne s pravdepodobnosťou $1/2^3 = p_3$. Keďže *OHO* nám môže padnúť len raz, môžeme všetky tieto pravdepodobnosti sčítať. Výsledná pravdepodobnosť, že skončíme na OHO, teda je

$$\begin{aligned}
&p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + \cdots = \\
&= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \cdots = \\
&= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}\left(1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\dots\right).
\end{aligned}$$

Náš problém s nekonečnom sme odsunuli na tento nekonečný súčet. No v zátvorke sme dostali súčet, ktorý je známy ako súčet nekonečného geometrického radu, ktorý možno určiť (keďže $|1/2| < 1$) ako

$$1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Hľadaná pravdepodobnosť preto je

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} \cdot 2 = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}.$$

1.6 Kaligulove Márnotratné Sporky

Zadanie. *Ako si Caligula hádzal mincami, tak zapatrošil všetky mince. Rozhodol sa preto zaviesť nové platidlo – Kaligulove Márnotratné Sporky.*

Caligula vytvoril 10 *platidiel o navzájom rôznych hodnotách* $a_1, a_2, \dots, a_{10} \in \mathbb{N}$. *Navyše existuje cena* $c \in \mathbb{N}$ *taká, že sa nedá zaplatiť, ani ak nám predavač môže vydať.*

- *Dokážte, že existuje nekonečne veľa cien, ktoré sa nedajú zaplatiť, ani ak nám predavač môže vydať.*
- *Dokážte, že existuje hodnota* $b \in \mathbb{N}$ *väčšia než 1 taká, že ak ňou nahradíme ktorékoľvek jedno z existujúcich platidiel, budeme vedieť zaplatiť všetky možné celočíselné ceny, ak nám predavač môže vydať.*

Riešenie. opravujú **Baška** (barbora.javorova@trojsten.sk) a **Mišo M.** (michal.molnar@trojsten.sk)

Pozrime sa najprv, ako vieme manipulovať s cenami, ktoré vieme zaplatiť. Vezmime si dve také ceny – x a y a pozrime sa, čo ďalšie vieme zaplatiť. Napríklad vieme zaplatiť ľubovoľný ich násobok. Na zaplatenie $k \cdot x$ nám stačí dať z každej mince k-krát viac predavačovi a on nám zas z každej k-krát viac vydá. Podobne vieme zaplatiť súčet a rozdiel. Na zaplatenie $x + y$ použijeme všetky mince na zaplatenie x a y dokopy a predavač nám dokopy vydá. Vieme zaplatiť aj $x - y$. Tu prebehne výmena mincí, akoby sme my platili predavačovi x a on nám y.

Na prvý bod zadania sa nám najviac zíde odčítanie. Keďže nevieme zaplatiť hodnotu c, isto nevieme zaplatiť ani dve hodnoty s rozdielom c. Ako ich nájsť nekonečne veľa? Vezmime si napríklad násobky c. Dva po sebe idúce majú vždy rozdiel c. Jeden z nich teda zaplatiť nevieme. To nám dáva „polovicu“. Keďže násobkov c je nekonečne veľa, bude nekonečne veľa aj tých, ktoré zaplatiť nevieme.

Prejdime k druhému bodu. Tentokrát sa nám zíde násobenie. Ak totiž vieme zaplatiť 1, určite vieme zaplatiť jej ľubovoľný násobok, a teda všetky možné ceny. Stačí nám teda b zvoliť tak, aby sme vedeli zaplatiť 1 a nemusíme riešiť, čo je c zač. Takáto voľba je napríklad nahradenie a_2 za hodnotu $a_1 + 1$. Tu nám dokonca budú stačiť mince a_1 a b na zaplatenie čohokoľvek.

Iné riešenie (využívajúce Bezoutovu rovnosť).

Bezoutova veta je mocný nástroj, ktorý v podstate priamo určuje, ktoré ceny vieme a ktoré nevieme zaplatiť pre nejakú dvojicu platidiel. Dá sa však priamo indukciou zovšeobecniť, čím dostaneme riešenie našej úlohy. Začnime tým, čo hovorí Bezoutova rovnosť:

Pre každé a, $b \in \mathbb{Z}$ existujú nenulové k, $l \in \mathbb{Z}$ také, že

$$k \cdot a + l \cdot b = d,$$

kde d je najväčší spoločný deliteľ a, b. Navyše d je najmenšie kladné číslo, pre ktoré vieme takéto k, l nájsť.

My máme k dispozícii čísel 10, nie len dve. Fakt, že k, l berieme aj záporné, súhlasí s tým, že nám predavač môže vydať. Indukciou ukážeme, ako pridať ďalšie číslo. Majme n čísel a_1, a_2, …, a_n s najväčším spoločným deliteľom $d_n = k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_na_n$. Keď pridáme a_{n+1}, vieme isto zapísať najväčšieho spoločného deliteľa d_n a a_{n+1} ako $k \cdot d_n + l \cdot a_{n+1}$, pre vhodné k, l. Platí

$$k \cdot d_n + l \cdot a_{n+1} = (k \cdot k_1)a_1 + (k \cdot k_2)a_2 + \ldots + (k \cdot k_n)a_n + l \cdot a_{n+1},$$

odkiaľ dostaneme nové koeficienty. Takto zapísané číslo bude skutočne najväčší spoločný deliteľ $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Keďže delí d_n aj a_{n+1}, je to spoločný deliteľ všetkých čísel, a keďže nič väčšie nedelí d_n aj a_{n+1}, nemôže nič väčšie deliť ani a_1, a_2, …, a_{n+1}.

My teda budeme pracovať s verziou Bezoutovej rovnosti pre 10 čísel. Pre úplnosť ľahko overíme, že žiadnou voľbou k_1, k_2, …, k_{10} nedostaneme kladné číslo menšie ako ich najväčší spoločný deliteľ – d. Ten delí všetky čísla v našom súčte, takže bude deliť aj výsledný súčet. A najmenší kladný násobok d je d samotné.

Takto upravená veta už priamo rieši našu úlohu. Ceny, ktoré sú násobkom d, isto dokážeme zaplatiť. Ak teda máme nejaké c, ktoré zaplatiť nevieme, určite $d \neq 1$. Preto nevieme zaplatiť čísla so zvyškom 1 po delení d, ktorých je nekonečne veľa. V druhom bode nám naopak stačí spraviť výmenu, aby výsledné platidlá mali najväčší spoločný deliteľ rovný 1. Vyhovuje jednak $b = a_1 + 1$, ale aj $d_9 + 1$, kde d_9 je najväčší spoločný deliteľ a_1, a_2, …, a_9.

1.7 Kôň Maľuje Svojsky

Zadanie. *Krtkovi bolo už s Caligulom dlho, tak sa šiel prejsť s koňom Incitatom k rieke, kde kôň do piesku vyryl dáky obrazec. Krtka to natoľko uchvátilo, že si začal hneď písať.*

V trojuholníku ABC označme D priesečník osi uhla BAC a strany BC. Nech q je os úsečky AD. Označme priesečníky q so stranami AB, AC postupne E, F. Dokážte, že

$$\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{|CD|}{|BD|} = \frac{|CF|}{|AF|}.$$

Riešenie. opravuje **Kubo Poljovka** (jakub.poljovka@trojsten.sk)

Vzorové riešenie tejto úlohy si môžeš pozrieť aj ako video na našom YouTube kanáli `www.youtube.com/KorMatSem`.

Vďaka tomu, že AD je os uhla BAC a EF je kolmica na túto os, vieme povedať, že $|AE| = |AF| = x$. Vyplýva to tiež zo zhodností trojuholníkov ASE a ASF, kde S je stred strany AD. Tieto trojuholníky zdieľajú stranu AS a majú rovnaké uhly pri vrcholoch A a S. Tiež si môžeme všimnúť zhodnosť trojuholníkov ASF a DSF. Keďže S je stred strany, $|AS| = |SD|$, zdieľajú stranu SF a oba majú medzi týmito stranami pravý uhol. Analogicky vieme postupovať aj pri trojuholníku DSE. Vďaka týmto zhodnostiam vieme povedať, že $|AE| = |ED| = |DF| = |AF| = x$. A tiež uhly $|SAF| = |EAS| = |FDS| = |SDE| = \alpha$.

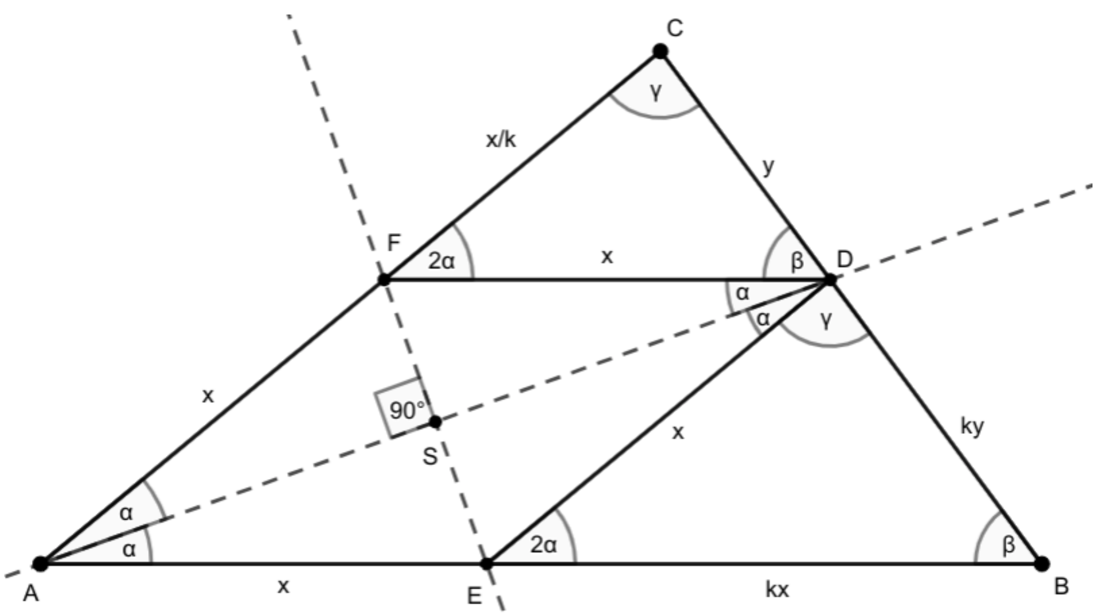
Ďalej si označme uhly pri vrcholoch B a C ako β a γ. Z trojuholníka ABC vieme povedať, že $2\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Toto môžeme využiť v trojuholníku ABD, kde nám chýba doplniť uhol EDB. Keďže už sa v tomto trojuholníku nachádzajú uhly α, α a β, do súčtu $180°$ nám chýba už iba γ, a teda $|EDB| = \gamma$. Analogicky vieme postupovať v trojuholníku ADC a určiť veľkosť uhla $|CDF| = \beta$. Tieto uhly sme tiež mohli doplniť uvedomením si toho, že $AEDF$ je kosoštvorec, a teda platí $AE \parallel FD$ a $AF \parallel ED$.

Môžeme si teraz všimnúť, že trojuholníky EBD a FDC sú podobné, nakoľko majú zhodné uhly. Ak si označíme pomer dĺžok strán trojuholníkov EBD a FDC ako k a dĺžku strany $|CD| = y$, vieme si podľa toho označiť podobné strany týchto trojuholníkov nasledovne:

$$|DB| = k|CD| = ky,$$

$$|EB| = k|FD| = kx,$$

$$|CF| = \frac{|ED|}{k} = \frac{x}{k}.$$



Porovnaním dĺžok úsečiek na obvode trojuholníka ABC dostaneme rovnosť hľadaných pomerov zo zadania:

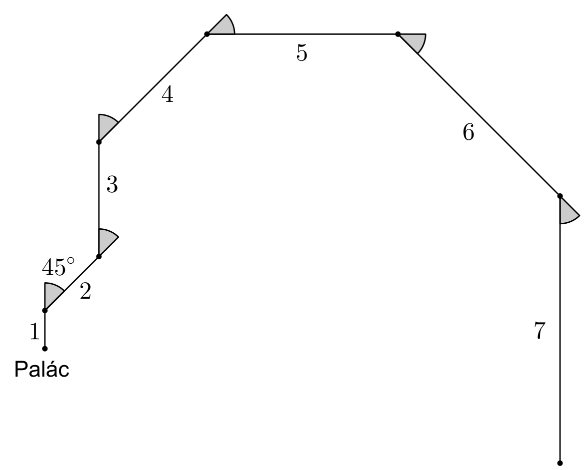
$$\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{x}{kx} = \frac{1}{k},$$

$$\frac{|CD|}{|BD|} = \frac{y}{ky} = \frac{1}{k},$$

$$\frac{|CF|}{|AF|} = \frac{x/k}{x} = \frac{1}{k}.$$

1.8 Kroky Mnohých Štolbov

Zadanie. *Keď Caligula zistil, že Incitatus je preč, hneď za ním poslal armádu štolbov, aby ho našli. Vedia sa vrátiť naspäť do paláca, ak sa v (nekonečnej) rovine pohybujú tak, že robia postupne kroky o veľkosti* $1, 2, 3, \ldots$ *(teda k-ty krok má dĺžku k) a po každom kroku sa otočia o* 45 *stupňov doľava alebo doprava? Jeden možný začiatok ich cesty je znázornený na obrázku.*



Riešenie. opravuje **Pedro** (peter.sukenik@trojsten.sk)

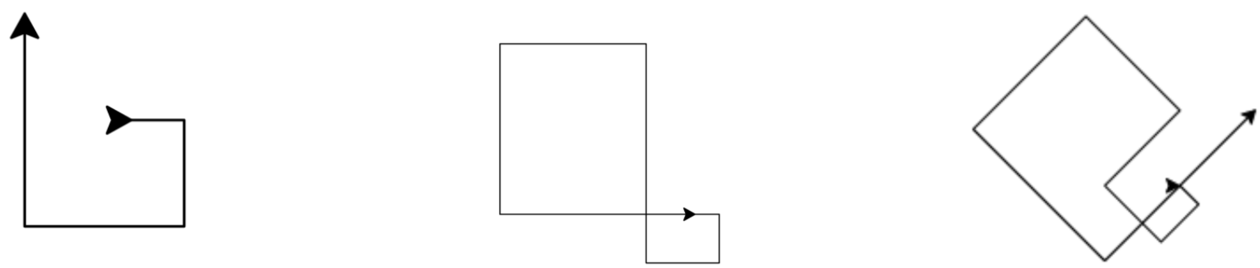
Pri úlohách, v ktorých treba rozhodnúť, či nejaké tvrdenie platí alebo nie, má riešiteľ vždy na výber medzi pesimistickým a optimistickým prístupom. Ja som túto úlohu začal riešiť pesimisticky a snažil som sa ukázať, že takáto cesta neexistuje. Prvá vec, ktorú som si všimol a ktorá je dôležitá je, že ak taká cesta existuje, potom časť tejto cesty, ktorá by vznikla pozliepaním iba horizontálnych alebo vertikálnych krokov by sama musela viesť z počiatku do počiatku. Podobne časť cesty zložená iba z diagonálnych krokov (pozliepaných na seba) by musela viesť z počiatku do počiatku. Prečo?

Predstavme si v našej rovine karteziánsku súradnicovú sústavu, ktorej počiatok $[0, 0]$ je v našom paláci. Kroky, ktoré robíme, si môžeme v tomto prípade prestaviť ako vektory, ktoré pričítavame k našej aktuálnej pozícii. Ak má diagonálny krok dĺžku a, potom posun v horizontálnej a vertikálnej zložke bude $a/\sqrt{2}$, čo vyplýva z Pytagorovej vety alebo z definície sínusu v pravouhlom trojuholníku. Všimnime si, že nech už naše kroky majú akýkoľvek smer, diagonálne kroky (t. j. vektory) sa budú musieť nasčítať na nulu samy o sebe a tak isto horizontálno-vertikálne kroky. Prečo? Iracionálnu časť $1/\sqrt{2}$ si vieme v našich sčítancoch vyňať pred zátvorku a výraz, ktorý sa musí nasčítať na nulu má tvar $p + (1/\sqrt{2})q$, kde p, q sú racionálne čísla. Ak sa tento výraz rovná 0, potom ľahko vidno, že aj p aj q musia byť samy rovné 0.

Takže ak by existovala takáto cesta, musela by existovať aj cesta zložená z krokov dĺžky 1, 2, 3, …, ktoré by mohli zvierať iba pravé alebo nulové uhly (skús si rozmyslieť, prečo to vyplýva z predošlého odstavca). Tu však naše pesimistické myšlienky končia. Akokoľvek sa totiž budeme snažiť, neprídeme na žiaden rozumný spôsob ako dokázať, že takáto cesta neexistuje. Pretože existuje. Keď už sa rozhodneme nejakú hľadať, nie je náročné ju nájsť.

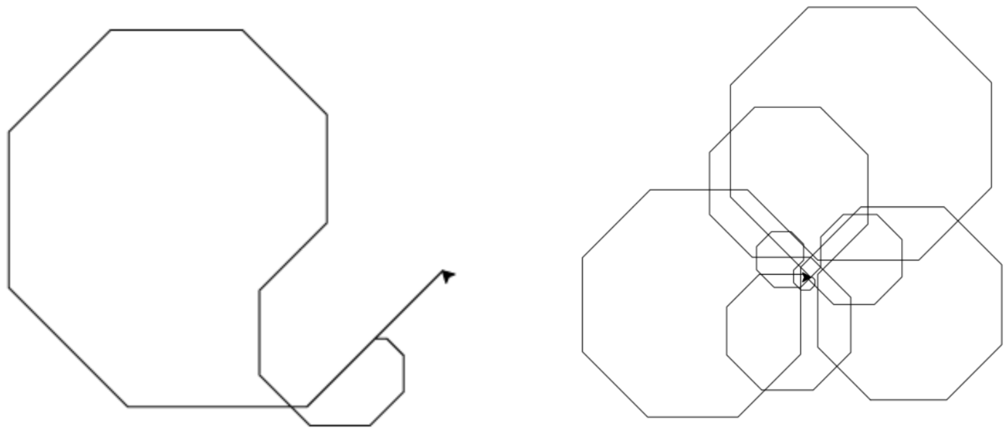
Pri hľadaní konštrukcii ako napríklad cesty sa vždy hodí skúsiť sa pozrieť na nejaký ľahký vzor a zistiť, o koľko sme sa po odkráčaní tohto ľahkého vzoru posunuli od štartu. Ak má tento ľahký vzor vhodné vlastnosti, môžeme ho potom zopakovať a posunúť sa od našej aktuálnej pozície rovnako, ako sme sa predtým posunuli od štartu, ale možno do iného smeru. Naskladaním takýchto posunov sa snáď budeme vedieť vrátiť do štartu.

V prípade našej úlohy stačí skúsiť spraviť pravotočivého „slimáka" o štyroch krokoch ako na obrázku 8.1 a môžeme si všimnúť, že po spravení tohto slimáka sme presne $[\pm 2, \pm 2]$ v nejakom smere od počiatku. Navyše, presne rovnaký posun by sme dosiahli bez ohľadu na to, v ktorom ťahu by sme tohto slimáka spravili. Prečo? V štyroch krokoch ideme raz doľava, raz doprava, raz nadol a raz nahor, avšak protismerné pohyby robíme s rozostupom dvoch ťahov, čo znamená že, dĺžky našich krokov sa dokonale vykompenzujú s výnimkou rozdielu dĺžky 2.



Obrázok 8.1: *Malý slimák (vľavo), oba slimáky naraz (v strede) a diagonálne slimáky.*

Teraz ak sa z pozície, v ktorej sme skončili po dokončení slimáka, vyberieme naspäť tak, že začneme v rovnakom smere ako sme skončili a slimáka spravíme ľavotočivého (ako na obrázku 8.1), dostaneme sa späť do počiatku. Hurá! Problém je, že toto je riešenie iba pre „polku" našej prechádzky. Na to aby sme sa naozaj dostali do cieľa – teda štartu – potrebujeme vhodne skombinovať diagonálne a vertikálno-horizontálne slimáky. Skúsme si intuitívne skombinovať našu vertikálno-horizontálnu cestu s takou diagonálnou, ktorá do toho pasuje. Ak to spravíme (ako na obrázku 8.2), uvidíme, že nanešťastie sa tieto cesty nedajú skombinovať tak, aby diagonálna bola úplne analogická (čo vidno aj keď si zobrazíme iba diagonálnu časť tejto cesty, viď 8.1). Všetko je rovnaké, až na to, že v diagonálnej ceste odbočíme doľava pri zmene z pravotočivého na ľavotočivého slimáka. Našťastie, čo si môžeme všimnúť je, že po spravení celej tejto zvláštnej špirály sa dostaneme od počiatku na súradnice $[8, 8]$. Máme teda šancu opakovať tento istý vzor tak, aby sme sa po nejakom čase konečne dostali späť do cieľa.



Obrázok 8.2: *Celý jeden vzor (vľavo) a celá cesta (vpravo). Všimnite si malý diagonálny štvorec s vrcholom v počiatku, ktorý cestou opíšeme, vždy na konci jedného vzoru.*

Odtiaľto už je finálna konštrukcia veľmi jednoduchá – stačí si všimnúť, že hneď po dokončení tohto vzoru sa vieme otočiť o 45° doľava a zopakovať náš vzor tak, aby sme sa od našej aktuálnej pozície posunuli smerom doľava nahor o rovnakú vzdialenosť ako predtým z počiatku. Po dokončení tohto vzoru sa opäť môžeme otočiť o 45° doľava a posunúť sa v pravom uhle od nášho predošlého posunu, tentoraz smerom dole doľava. V poslednom opakovaní sa posunieme o rovnakú vzdialenosť dole doprava a ocitneme sa v počiatku (viď obrázok 8.2).

Možno sa vám zdá, že tento popis cesty nie je úplne dôkaz, ale v podstate aj celkom je. Dôležitým prvkom našej cesty je, že sú to len štyri pootočené opakovania tej istej trajektórie, ktorá sa skladá zo štyroch slimáčikov, ktoré sa vždy posúvajú o 2 dohora alebo nadol a o 2 doľava alebo doprava. Preto analýzou toho, čo sa stane pri daných kombináciách našich slimákov, vieme naozaj jednoducho formálne dokázať toto tvrdenie vďaka tomu, že opakujeme ten istý vzor stále dokola.

1.9 Kaďa Mirových Srandičiek

Zadanie. *Ako tak sedel Krtko na pláži po tom, čo odviedli Incitata, zacnelo sa mu za domovom, a tak siahol do kade, ktorú si priniesol z domu. Vylovil odtiaľ Mirovu prednášku o funkcionálnych rovniciach. Tak sa potešil, že si rovno aj jeden príklad vyriešil.*

Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *ktoré pre všetky* $x, y \in \mathbb{R}$ *spĺňajú*

$$f(f(x-y)) = f(x)f(y) - f(x) + f(y) - xy.$$

Riešenie. opravuje **Lukáš** (lukas.gaborik@trojsten.sk)

Na prvý pohľad si všimneme, že skúmaná rovnica je pomerne symetrická, a teda zámenou premenných nám tam zostanú rovnaké výrazy, ktoré sa môžu navzájom pekne poodčitovať. Skúsme teda dosadenia

$$(x,\ y) \in \{(t,\ 0),\ (0,\ t),\ (-t,\ 0),\ (0,\ -t)\}.$$

Dostaneme z nich nasledovné štyri podmienky:

$$f(f(t)) = f(t)f(0) - f(t) + f(0), \tag{9.1}$$

$$f(f(-t)) = f(0)f(t) - f(0) + f(t), \tag{9.2}$$

$$f(f(-t)) = f(-t)f(0) - f(-t) + f(0), \tag{9.3}$$

$$f(f(t)) = f(0)f(-t) - f(0) + f(-t). \tag{9.4}$$

Všimnime si, že sčítaním (9.1) a (9.2) nám vypadne pomerne veľa členov. Podobne aj sčítaním (9.3) a (9.4). Poďme to teda urobiť:

$$f(f(t)) + f(f(-t)) = 2f(0)f(t),$$

$$f(f(-t)) + f(f(t)) = 2f(0)f(-t).$$

Keďže sa ľavé strany dvoch rovníc vyššie rovnajú, musia sa rovnať aj ich pravé strany. Dostávame tak z toho

$$2f(0)f(t) = 2f(0)f(-t),$$

$$2f(0)\big(f(t) - f(-t)\big) = 0. \tag{9.5}$$

Podobným postupom však vieme získať ešte jednu informáciu. Sčítajme (9.1) s (9.3) a taktiež (9.2) s (9.4). Dostaneme tak

$$f(f(t)) + f(f(-t)) = f(t)f(0) + f(-t)f(0) - f(t) - f(-t) + 2f(0),$$

$$f(f(-t)) + f(f(t)) = f(0)f(t) + f(0)f(-t) - 2f(0) + f(t) + f(-t).$$

Opäť sa rovnajú ľavé strany, a teda môžeme porovnať strany pravé, z čoho vyplýva, že

$$f(0)f(t) + f(0)f(-t) - 2f(0) + f(t) + f(-t) = f(t)f(0) + f(-t)f(0) - f(t) - f(-t) + 2f(0),$$

$$2\big(f(t) + f(-t) - 2f(0)\big) = 0. \tag{9.6}$$

Z podmienok (9.5) a (9.6) by sme teraz chceli dokázať, že $f(0) = 0$. Pre spor teda predpokladajme, že $f(0) \neq 0$. Potom z (9.5) máme, že $\forall t \in \mathbb{R} : f(t) = f(-t)$ – inými slovami, že f je párna. Keď to ale dosadíme do (9.6), dostaneme, že $\forall t \in \mathbb{R} : f(t) = f(0)$ – čiže f je konštantná. Po dosadení do rovnice zo zadania tak máme, že $\forall x, y \in \mathbb{R} : c = c^2 - xy \iff c - c^2 = -xy$. To však zjavne neplatí, keďže $c - c^2$ je konštanta a $-xy$ dosahuje viac ako jednu hodnotu. Preto nutne $f(0) = 0$.

Znamená to teda, že 0 nám vie výrazne zjednodušiť prácu. Na pravej strane sme ju už využili dostatočne, skúsme preto teraz ľavú stranu, a teda dosadenie (t, t):

$$0 = f(t)f(t) - f(t) + f(t) - t^2,$$

$$0 = f^2(t) - t^2,$$

$$0 = \big(f(t) - t\big)\big(f(t) + t\big). \tag{9.7}$$

Dostali sme teda, že pre každé $t \in \mathbb{R}$ platí buď $f(t) = t$ alebo $f(t) = -t$. Treba si však uvedomiť, že to neznamená, že jediné možnosti riešenia sú funkcie $f(x) = x$ a $f(x) = -x$, pretože napríklad $f(x) = |x|$ týmto dvom podmienkam tiež vyhovuje. Ako ďalší exotický príklad by sme si mohli dať funkciu f, ktorá celé čísla nezmení a necelé čísla nahradí opačným číslom, čiže $f(3) = 3$, ale $f\left(-\frac{1}{17}\right) = \frac{1}{17}$. Úloha s podobným zádrheľom sa už v KMS vyskytla štyri roky dozadu, môžete si ju pozrieť tu[5].

Ako sa s tým teda vysporiadame? Nuž, predpokladajme, že existuje $t_0 \in \mathbb{R}$, pre ktoré $f(t_0) = t_0$ a pozrime sa, čo sa potom deje v (9.1):

$$ĽS = f(f(t_0)) = f(t_0) = t_0,$$

$$PS = -f(t_0) = -t_0.$$

Keďže ale ľavá a pravá strana rovnice sa musia rovnať, dostávame, že $t_0 = 0$. Z toho ale vyplýva, že pre všetky ostatné reálne čísla t vzťah $f(t) = t$ neplatí, čiže na základe (9.7) pre všetky $t \neq 0$ musí platiť $f(t) = -t$. No ale my vieme, že $f(0) = 0 = -0$, a tak $\forall t \in \mathbb{R} : f(t) = -t$. Jediným vyhovujúcim kandidátom je preto funkcia $f(x) = -x$, o ktorej sa skúškou ľahko presvedčíme, že vyhovuje.

1.10 Kúzelná Minihra Starčeka

Zadanie. *Potom, čo sa Krtko natrápil s Mirovou prednáškou, sa rozhodol, že preskúma Rím. Vybral sa na miestne mestské trhy, kde ho hneď upútal stánok so starčekom hrajúcim hru. Ten mu hneď začal vysvetľovať, ako to funguje.*

Máme tabuľku $n \times n$, ktorá má na každom z n^2 políčok napísané jedno celé číslo. V jednom ťahu si môžeme vybrať ľubovoľné políčko a pričítať 1 ku všetkým $2n - 1$ číslam v jeho riadku aj stĺpci. V závislosti od n nájdite najväčšie číslo N také, že pre ľubovoľné počiatočné čísla v tabuľke vieme po konečnom počte ťahov mať aspoň N párnych čísel v tabuľke.

Riešenie. opravuje **Miloš** (milos.micik@trojsten.sk)

Keďže nás zaujíma iba parita čísel v tabuľke, môžeme sa na ňu pozerať modulo 2. Ťah v takejto tabuľke znamená zmenu parity každého čísla vo vybranom riadku a stĺpci. „Ťahaním" políčka (i, j) označme zmenu parity políčok v riadku i a stĺpci j. Riešenie rozdelíme na dva prípady, a to na párne n a na nepárne n.

Párne n

Pri tabuľke párnych rozmerov vieme opísať postup, ako zmeniť paritu iba jedného zvoleného políčka. Ak chceme zmeniť paritu políčka v i-tom riadku a j-tom stĺpci, vieme to spraviť v $2n - 1$ ťahoch tak, že postupne budeme ťahať políčka z riadku i a stĺpca j tak, aby sme na každom vykonali práve jeden ťah.

Môžeme si premyslieť, že takýmto spôsobom zmeníme paritu políčka (i, j) presne $2n - 1$ krát (keďže meníme jeho paritu každý ťah). Pre ostatné políčka v riadku i a stĺpci j platí, že ich paritu zmeníme práve n krát. Tým pádom sa ich parita nezmení. Všetky ostatné políčka zmeníme práve dvakrát, čiže sa im tiež parita nezmení. Jediným políčkom so zmenenou paritou teda bude (i, j).

Opakovaním tohto postupu pre všetky nepárne políčka v tabuľke dospejeme k tomu, že v tabuľke budú iba párne čísla. Tiež si vieme ľahko premyslieť, že tento postup ide aplikovať bez ohľadu na začiatočné čísla v tabuľke. Pre tabuľku $n \times n$ párnych rozmerov teda vieme mať presne n^2 párnych čísel.

[5] https://kms.sk/ulohy/zadania/1514/

Nepárne n

Ako dolný odhad pre nepárne n môžeme použiť výsledok z predchádzajúceho prípadu. Ak si zoberieme tabuľku $(n-1) \times (n-1)$ (odobratím spodného a pravého riadku), vieme v nej zmeniť všetky čísla na párne. Tým pádom vieme dostať minimálne $(n-1)^2$ párnych čísel.

Ostáva už len zistiť, čo dokážeme spraviť s číslami v pravom stĺpci a spodnom riadku. Ťahaním pravého dolného políčka sa žiadne z čísel v tabuľke $(n-1)\times(n-1)$ nezmení. Takýmto ťahom však dokážeme zmeniť paritu všetkých ostatných čísel. Týchto čísel je $2n-1$. Ak by bolo n alebo viac z nich nepárnych, vedeli by sme spraviť ťah na pravé dolné políčko a zmeniť ich na párne. Ak by nepárnych bolo menej ako n, znamenalo by to že máme aspoň n párnych čísel. Na základe toho vieme povedať, že dokážeme v poslednom riadku a poslednom stĺpci mať aspoň n párnych čísel. V celej tabuľke teda vieme dostať aspoň $(n-1)^2 + n = n^2 - n + 1$ párnych čísel.

Poďme teraz dokázať, že existujú také konfigurácie tabuľky, pre ktoré viac ako $n^2 - n + 1$ párnych čísel dostať nevieme. Nazvime si párne/nepárne riadky a stĺpce také, ktorých súčet čísel je párny/nepárny. Kľúčovým invariantom v tomto prípade je, že každý jeden ťah zmení paritu všetkých stĺpcov aj riadkov. Ak teda začíname s tabuľkou, v ktorej je k nepárnych stĺpcov a l nepárnych riadkov, vieme sa pohybovať iba medzi dvoma stavmi – buď máme k nepárnych stĺpcov a l nepárnych riadkov, alebo $n-k$ nepárnych stĺpcov a $n-l$ nepárnych riadkov.

Pozrime sa na tabuľku, v ktorej sú čísla v políčkach $(n,1), (n,2), \ldots, (n, n-1)$ posledného riadku nepárne a všetky ostatné sú párne. Takáto tabuľka má $n-1$ nepárnych stĺpcov a 0 nepárnych riadkov. Tiež vieme, že ak vykonáme párny počet ťahov, situácia s riadkami a stĺpcami sa nezmení, a ak vykonáme nepárny počet ťahov, budeme mať 1 nepárny stĺpec a n nepárnych riadkov. V oboch prípadoch máme aspoň $n-1$ nepárnych stĺpcov/riadkov. Nepárny stĺpec/riadok znamená, že obsahuje aspoň jedno nepárne číslo, z čoho vieme usúdiť, že budeme vždy mať aspoň $n-1$ nepárnych čísel v tabuľke. Teda pre takúto tabuľku je $n^2 - n + 1$ párnych čísel maximum.

Pre nepárne rozmery tabuľky teda vo všeobecnosti vieme dosiahnuť maximálne $n^2 - n + 1$ párnych čísel.

Záver

Pre tabuľku $n \times n$ sme v závislosti od parity n našli hodnoty N:

$$N = \begin{cases} n^2 & n = 2k \\ n^2 - n + 1 & n = 2k - 1 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}$$