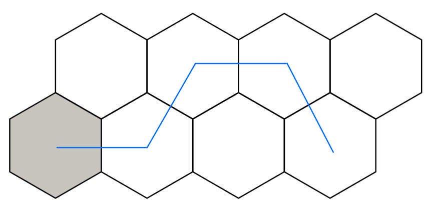
Korešpondenčný matematický seminár
XLIII. ročník, 2021/2022
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Riešenia 2. kola letnej časti

2.1 Krtkova Mozaiková Stena ($\kappa \leq 1$)

Zadanie. *Keď sa Krtkovi podarilo vyhrať nad starčekom, starčeka to natoľko napajedilo, že začal úbohého Krtka naháňať po trhovisku. Našťastie sa pred Krtkom zjavil portál a on celý natešený doň skočil, bez toho, aby vedel, kam ho prenesie. Portál Krtka vypľul na Artušov okrúhly stôl. Zaskočený Artuš sa hneď dovtípil, že Krtko nebude miestny a rozhodol sa, že si Krtka nechá ako svojho tajného poradcu. Zavrel ho preto do kumbálu na metly a začal sa radiť so svojimi rytiermi, ako s Krtkom naložia. Krtkovi tam bolo už dlho a aj sa poriadne nudil. Tak si sadol do vedra a zapozeral sa na stenu oproti.*

Tu si všimol, že stena sa skladá z kachličiek v tvare šesťuholníkov uložených v 2 riadkoch po n kachličiek, ako na obrázku. Krtko položil prst na kachličku vľavo dole. V každom kroku posunie prst na susednú kachličku, ktorá je od nej vpravo hore, vpravo, alebo vpravo dole. Koľko je rôznych kachličiek, na ktorých môže mať Krtko prst po presne n krokoch? Na obrázku nižšie sú nakreslené kachličky pre prípad $n = 4$, na sivej kachličke Krtko začína a modrou je vyznačená jedna možná cesta.



Riešenie. opravujú **Baška** (barbora.javorova@trojsten.sk) a **Žaneta** (tomas.janeta@trojsten.sk)

Kachličky v dolnom riadku si predstavíme ako po sebe idúce párne čísla začínajúce od čísla 0. Kachličky v hornom riadku budú predstavovať po sebe idúce nepárne čísla začínajúce od čísla 1.

Keď sa nachádzame na čísle k, môžeme vykonať dva ťahy. Môžeme ísť na číslo $k+1$ (tento ťah reprezentuje prechod na kachličku v opačnom riadku) alebo môžeme prejsť na číslo $k+2$ (tento ťah zas reprezentuje prechod na kachličku v tom istom riadku).

Ako sa dá na takéto označenie prísť a prečo by sme ho vôbec hľadali? Odpoveď na druhú otázku je, že je fajn si popísať úlohu formálnejším spôsobom ak nie je príliš zložitý. Môže nám to totiž pomôcť všimnúť si vlastnosti, ktoré by ináč zostali nepovšimnuté. A teda prirodzené čísla sú pri takomto popisovaní často veľmi užitočné. Odpoveď na prvú otázku – stačilo kachličky očíslovať (prvá kachlička v dolnom riadku má číslo 0, prvá kachlička v hornom riadku číslo 1, atď.).

Chceme odpovedať na otázku: ak začíname na čísle nula a vykonáme n ťahov, na koľkých rôznych políčkach sa môžeme nachádzať? Označme číslo, na ktorom sa budeme nachádzať po n krokoch ako k. Aká je najmenšia možná hodnota k?

Zjavne $k \geq n$, keďže musíme vykonať presne n ťahov a každý ťah nás posunie na číslo aspoň o 1 vyššie. Zjavne na číslo n sa vieme dostať tým, že n-krát vykonáme ťah prvého typu.

Aká je najväčšia možná hodnota k? Zjavne $k \leq 2n - 1$, keďže kachlička s vyšším číslom neexistuje. Na číslo $2n - 1$ sa vieme dostať pomocou $n - 1$ ťahov druhého typu a jedného ťahu prvého typu.

Teda pre všetky k, na ktoré sa vieme dostať po presne n ťahoch, platí $n \leq k \leq 2n - 1$. Majme nejaké k, ktoré spĺňa poslednú podmienku. Dokážeme, že sa na toto číslo vieme dostať pomocou n ťahov.

Vykonajme najprv $k - n$ ťahov typu 2 a následne $2n - k$ ťahov typu 1. Dokopy teda vykonáme $(k - n) + (2n - k) = n$ ťahov a na konci sa nachádzame na čísle $2(k - n) + (2n - k) = k$.

To znamená, že na konci sa vieme nachádzať na ľubovoľnom prirodzenom čísle k, pre ktoré platí $n \leq k \leq 2n - 1$. Takých čísel je n, a to je aj odpoveď na našu otázku.

2.2 Kráľovská Majstrovská Skúška ($\kappa \leq 2$)

Zadanie. *Po dvoch celých večnostiach sa dvere na kumbále otvorili a Artuš vytiahol Krtka von. Rozhodol sa, že Krtkove kvality overí Kráľovskou majstrovskou skúškou.*

Máme pravouhlý trojuholník s dĺžkami odvesien a, b a dĺžkou prepony $b + 1$, kde a a b sú kladné celé čísla. Dokážte, že b je párne číslo.

Riešenie. opravuje **David** (david.belobrad@trojsten.sk)

Keďže máme trojuholník, ktorý je pravouhlý, tak pre dĺžky jeho strán bude platiť Pytagorova veta, a tak dostaneme

$$a^2 + b^2 = (b + 1)^2,$$

$$a^2 + b^2 = b^2 + 2b + 1,$$

$$a^2 = 2b + 1.$$

Keďže $2b$ je určite párne číslo a k nemu pripočítavame nepárnu jednotku, tak dostaneme nejaké nepárne číslo. Tým pádom je a^2 nepárne, a teda aj a bude nepárne (pretože ak by bolo párne, tak by bolo v tvare $2k$, čo po umocnení dáva $4k^2$, čo nie je nepárne číslo). Vráťme sa ale k pôvodnej Pytagorovej vete a za a dosaďme $2k - 1, k \in \mathbb{N}$ (lebo už vieme, že a je nepárne):

$$(2k - 1)^2 + b^2 = (b + 1)^2,$$

$$4k^2 - 4k + 1 + b^2 = b^2 + 2b + 1,$$

$$4k^2 - 4k = 2b,$$

$$2 \cdot (k^2 - k) = 2k^2 - 2k = b.$$

No a v tomto momente vidíme, že b musí byť skutočne párne.

2.3 Kráľova Matematická Samovražda ($\kappa \leq 3$)

Zadanie. *Keďže Krtko zdolal skúšku ľavou zadnou, tak mu kráľ potajme hodil do vrecka príklad, ktorým sa už dlho trápil. Keď sa Krtko ospravedlnil, že sa pôjde prejsť do záhrady, rukou vo vrecku našmátral dáky papierik. Avšak nebol to žiaden zamilovaný odkaz, ale matematický príklad!*

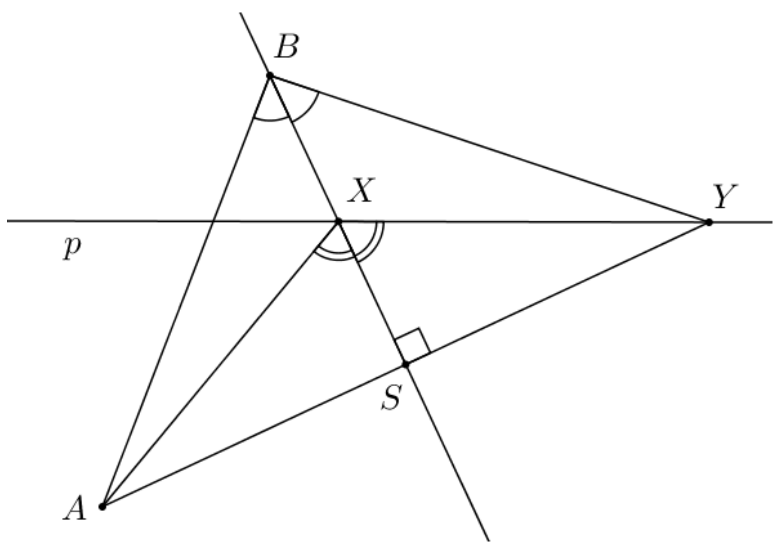
Máme danú priamku p a úsečku AB, ktoré sa pretínajú v bode P rôznom od bodov A, B. Navyše vzdialenosť bodu A od priamky p je dvakrát väčšia ako vzdialenosť bodu B od priamky p. Zostrojte[1] na priamke p body X a Y tak, aby bol trojuholník AXY rovnoramenný so základňou AY a zároveň aby priamka BX bola osou uhla AXY.

Riešenie. opravuje **Ondro** (ondrej.svehlik@trojsten.sk)

Chceme zostrojiť rovnoramenný trojuholník, o ktorom vieme, že os uhla AXY prechádza cez bod B. Vieme, že množina bodov rovnako vzdialených od dvoch rôznych bodov je priamka, konkrétne os úsečky. Ďalej si môžeme všimnúť, že v rovnoramennom trojuholníku je táto os základne totožná s osou uhla oproti základni.

Konštrukcia: Spravíme kružnicu so stredom v bode B a s polomerom $|AB|$. Tam, kde sa nám pretne s priamkou p, dostaneme dva body, označme ich Y_1 a Y_2. Tieto teraz s spojíme s bodom A a s bodom B. Dostávame dva rovnoramenné trojuholníky ABY_1 a ABY_2. Nech BUNV $Y = Y_1$ (pre druhý z bodov je pokračovanie analogické).

Teraz zostrojme os uhla ABY. Táto os nám kolmo pretne základňu AY v jej strede, označme S, a pretne sa aj s priamkou p, označme X. Môžeme si skontrolovať, že to naozaj je ten náš hľadaný bod X. Keď spojíme A s X, dostávame dva trojuholníky, AXS a XYS, ktoré majú spoločnú jednu stranu XS, rovnaký (pravý) uhol pri vrchole S a veľkosť úsečiek AS a SY je rovnaká, teda tieto trojuholníky sú zhodné. Nakoniec trojuholník AXY je rovnoramenný a priamka BX je osou strany AY, a teda aj osou uhla AXY.



2.4 Krtkov Majestátny Šmar ($\kappa \leq 5$)

Zadanie. *Ako sa Krtko prechádza po záhrade, zbadá skupinku pávov a hneď ho pochytí hravá nálada. Na lavičke nájde misku s chlebom, ktorý využije na ich lov.*

[1] Ak ste sa s podobným typom úloh ešte nestretli, môže vám pomôcť krátky text na stránke: `https://kms.sk/ako_riesit/konstrukcne_ulohy/`.

To prebieha tak, Krtko šmarí po pávovi chlieb, na ktorý sa páv chytí alebo nie. S pravdepodobnosťou $\frac{1}{5}$ sa Krtkovi podarí šmariť chlieb majestátnym šmarom, pri ktorom sa páv chytí s pravdepodobnosťou $\frac{3}{4}$. V opačnom prípade hodí Krtko chlieb malomocným šmarom, kedy sa páv chytí s pravdepodobnosťou $\frac{1}{10}$. Krtko sa opakovane snaží šmariť chlebom, kým páva nechytí. Aká je pravdepodobnosť, že Krtko chytí páva majestátnym šmarom?

Riešenie. opravujú **Kaja** (karolina.pisonova@trojsten.sk) a **Lucy** (lucia.tothova@trojsten.sk)

Krtko hádže pávovi chlieb, až kým sa naň páv nechytí. Môžeme preto predpokladať, že existuje šmar, na ktorý sa páv chytí. O všetkých predchádzajúcich šmaroch vieme potom povedať, že na tie sa páv nechytil, lebo by Krtko prestal hádzať už skôr a nezáleží nám na tom, aké boli tieto šmary, lebo nám nijak neovplyvnia ten nasledujúci. Zaujímať nás bude teda až posledný šmar, v ktorom Krtko páva chytí. Vieme, že Krtko páva chytil buď majestátnym alebo malomocným šmarom. Celková pravdepodobnosť chytenia páva majestátnym šmarom je $\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$. Celková pravdepodobnosť, že Krtko páva chytí malomocným šmarom, je $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{25}$.

Tieto dve udalosti sú disjunktné (určite nastala iba jedna z nich) a nás zaujíma, aká je pravdepodobnosť, že sa stala jedna konkrétna z nich. Môžeme teda použiť známy vzťah pre výpočet pravdepodobnosti, pričom v čitateli bude pravdepodobnosť tej udalosti, ktorá nás zaujíma a v menovateli bude súčet pravdepodobností všetkých udalostí, ktoré v tomto ťahu mohli nastať. Označme P_M pravdepodobnosť, že Krtko v poslednom šmare páva chytil majestátnym šmarom a P_m pravdepodobnosť, že ho chytil malomocným šmarom. Potom dostávame, že hľadaná pravdepodobnosť je

$$\frac{P_M}{P_M + P_m} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{3}{20} + \frac{2}{25}} = \frac{15}{23}.$$

2.5 Každý Môže Spadnúť ($\kappa \leq 8$)

Zadanie. *Pávovi sa zapáčila Krtkova čiapka, až ju uchmatol a odletel na neďaleký balkón. To Krtko však nemohol nechať tak, keďže to bola jeho obľúbená čiapka. Začal teda liezť na balkón po brečtane. Ako sa snažil prehupnúť cez zábradlie, zbadal Artušovu manželku Ginevru ako sa bozkáva s Lancelotom. To ho úplne vykoľajilo, až sa mu pošmykli ruky a zrúbal sa na zem. Hlava sa mu zakrútila až tak, že videl poletovať rovnice.*

Nájdite všetky hodnoty reálneho parametra p, pre ktorý má rovnica

$$\left|\left|20\left|x\right| - x^2\right| - p\right| = 21$$

práve 12 rôznych koreňov.

Riešenie. opravuje **Mati** (matus.zelko@trojsten.sk)

V tejto úlohe si vcelku pekne vystačíme s geometrickou predstavou. Najprv si vieme všimnúť, že ak by parameter p bol mimo absolútnej hodnoty, tak by zvyšok funkcie posúval iba pozdĺž y-ovej osi – jednoducho by sme k funkcii prirátavali konštantu. Absolútna hodnota by to hádam nemusela veľmi zmeniť, tak poďme do úlohy s tým, že parameter sa dorieši nakoniec.

Ako by vyzerala naša funkcia bez parametra p?

Tak funkcia je potom vo forme:

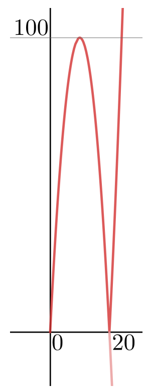
$$\Big|\left|20 \cdot |x| - x^2\right|\Big| = \left|20 \cdot |x| - x^2\right|.$$

Je na nej úplne zlaté, že párna. Takže sa rovnako správa k záporným a kladným číslam. To vidíme, ak do nej napríklad dosadíme $-x$:

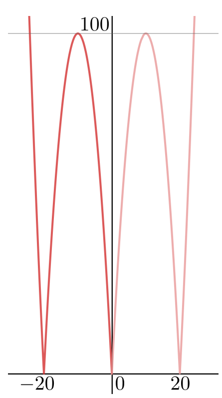
$$\left|20 \cdot |-x| - (-x)^2\right| = \left|20 \cdot |x| - (x)^2\right|.$$

Vďaka tomu nám stačí pozerať sa iba na x kladné a správanie sa na záporných číslach dostaneme symetriou podľa y-ovej osi. Na nezáporných číslach nám vnútorná absolútna hodnota nič nerobí (však na to sme to robili), a teda dostávame už pekne sa mračiacu konkávnu parabolu:

$$|20 \cdot x - x^2| = |x \cdot (20 - x)|.$$



Tak naša parabola má priesečníky s x-ovou osou v bodoch $x = 20$ a $x = 0$. Tiež si teraz vieme vypočítať, kde je a akú má hodnotu vo vrchole – parabola je symetrická aspoň na intervale $[0, 20]$ to platí aj pre našu. Potom teda je jej vrchol v strede medzi priesečníkmi a nadobúdame v ňom hodnotu $|10 \cdot (20 - 10)| = 100$. Super, tak máme dobrú predstavu, ako vyzerá naša parabola na kladnom definičnom obore. Celá je ešte v absolútnej hodnote, tak záporné funkčné hodnoty zobrazme do kladnej polroviny podľa osi x. Tým dostávame červenú krivku na obrázku vyššie (všimnite si, ako sa záporné hodnoty paraboly znázornené svetlou červenou preklopili cez x-ovú os do kladných). Nakoniec záporné čísla dokončíme vďaka parite našej funkcie a dostávame nasledujúci obrázok:



Tak a teraz je najvyšší čas sa pozrieť do zadania a zistiť, čo od nás vlastne chce – aký má byť parameter, aby rovnica

$$\left|\left|20 \cdot |x| - x^2\right| - p\right| = 21$$

mala práve 12 koreňov? To však neznamená nič iné, ako to, že naša funkcia má mať 12 priesečníkov s konštantnou čiarou $y = 21$. Teraz ako je, tak má s každou konštantou maximálne 6 priesečníkov. Avšak, mágia príde s parametrom. Ako postupne meníme hodnotu parametra, tak funkcia sa nám posúva hore a dole pozdĺž osi y a následne sa nám záporné hodnoty preklápajú na kladné.

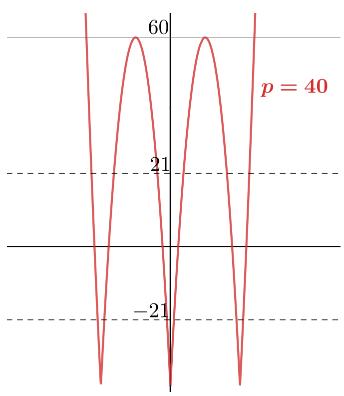
Uvedomme, si že na zistenie počtu priesečníkov s hodnotou 21 nám stačí zistiť počet priesečníkov funkcie bez absolútnej hodnoty s hodnotami 21 a -21. Jednoducho každý priesečník s -21 sa nám zobrazí na priesečník, ktorý nás zaujíma (21). Potom však parameter naozaj nerobí nič iné ako to, že funkciu posúva nižšie a vyššie. Naša funkcia bez vonkajšej absolútnej hodnoty nadobúda každú hodnotu maximálne 6-krát, a teda jedna šestica bude musieť pretnúť 21 a druhá -21. Takže potrebujeme, aby

$$100 - p > 21,$$

lebo potrebujeme, aby bol vrchol paraboly nad hodnotou 21 a zároveň

$$0 - p < -21,$$

aby najmenšia hodnota na parabole pretla -21.



A teda $p \in (21, 79)$.

2.6 Krtko + Metly = Srdiečko

Zadanie. *Keď sa preberie, vidí Ginevru a Lancelota, ktorí sa nad ním skláňajú. Ginevra sa podujme mu vysvetľovať, že kujú spolu pikle. Na čo sa Krtko ohradí, že on s tým nechce mať nič spoločné, avšak Lancelot ho nepočúva a zavrie ho do kumbálu na metly. Tu si Krtko smutne povzdychne, že azda mu sú metly súdené. Všimne si však vitrážové okno, na ktorom je množstvo trojuholníkov.*

V ostrouhlom trojuholníku ABC označme D, E postupne päty výšok z vrcholov B, C a priesečník týchto výšok označme H. Nech q je kolmica z vrcholu C na priamku DE a I je priesečník q s priamkou BD. Dokážte, že trojuholníky HIC a ABC sú podobné.

Riešenie. opravujú **Jožko** (jozef.rajnik@trojsten.sk) a **Miloš** (milos.micik@trojsten.sk)

Vzorové riešenie tejto úlohy si môžeš pozrieť aj ako video na našom YouTube kanáli www.youtube.com/KorMatSem.

Načrtnime si situáciu zo zadania a označme si priesečník priamky q a priamky DE ako J.

Trojuholníky AEC a HDC sú podobné, keďže majú jeden pravý uhol a jeden spoločný uhol $ACE = DCH$. Tým pádom aj uhly EAC a CHD sú rovnako veľké.

$$|\sphericalangle EAC| = |\sphericalangle CHD| = \alpha$$

Štvoruholník $BCDE$ je tetivový, nakoľko uhly BDC a BEC sú oba pravé a ležia nad rovnakou tetivou BC. Tým pádom aj uhly CED a CBD majú rovnakú veľkosť, nakoľko ležia nad rovnakou tetivou CD.

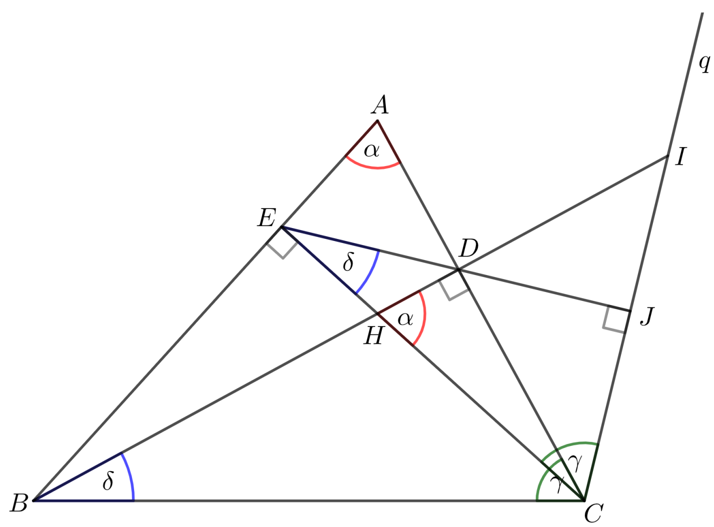
$$|\sphericalangle CED| = |\sphericalangle CBD| = \delta$$

Trojuholníky BCD a ECJ sú podobné, nakoľko oba majú jeden uhol pravý a jeden veľkosti δ. Z toho vyplýva, že uhly BCD a ECJ sú tiež rovnako veľké.

$$|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle ECJ| = \gamma$$

Posledne už vieme dokázať, že trojuholníky HIC a ABC sú podobné, nakoľko oba majú dva uhly rovnakej veľkosti.

$$|\sphericalangle CHI| = |\sphericalangle BAC| = \alpha \qquad |\sphericalangle ICH| = |\sphericalangle ACB| = \gamma$$



Komentár

Na rovnosť uhlov CED a CBD je možné prísť aj bez použitia tetivových štvoruholníkov. Stačí si za pomoci vrcholových uhlov pri vrchole H všimnúť, že trojuholníky EBH a DCH sú podobné, keďže majú dva uhly rovnakej veľkosti. Tým pádom sú pomery strán EH a DH rovné pomeru strán BH a CH.

Následne vieme o trojuholníkoch BCH a EDH povedať, že sú podobné, pretože majú jeden vrcholový uhol rovnakej veľkosti a pomery dvoch strán sú rovné. Tým pádom dostávame hľadanú rovnosť uhlov CED a CBD.

2.7 Kúzelník Merlin Soptí

Zadanie. *Keď sa Krtkovi šťastne podarilo otvoriť okno, celý natešený vyskočil von, nehľadiac kam padá. Dopadne do piesku, kde kúzelník Merlin ráta zapeklitý príklad a celý mu ho rozpráši. Merlina to úplne napajedí, ale Krtko sa hneď ponúkne, že rovnice zaňho vyrieši.*

V obore kladných celých čísel vyriešte sústavu rovníc

$$2x^2 = 4y^2 + 3z^2 + 2,$$

$$13x = 4y + 3z + 29.$$

Riešenie. opravuje **Lucka** (lucka.krajcoviechova@trojsten.sk)

Pozrime sa najskôr na paritu. V prvej rovnici sú všetky členy okrem $3z^2$ párne, takže aby táto rovnica platila, musí byť párne aj $3z^2$, a teda aj z. Pravá strana druhej rovnice potom bude nepárna, a preto $13x$, a teda aj x, musí byť nepárne.

Mohli by sme skúmať aj deliteľnosť ďalšími číslami, no výhodnejšie môže byť pokúsiť sa ohraničiť hodnoty, ktoré môžu premenné nadobúdať. V prvej rovnici vieme s využitím $y^2, z^2 > 0$ ohraničiť pravú stranu dvomi spôsobmi

$$2x^2 = 4y^2 + 3z^2 + 2 > 2y^2,$$

$$2x^2 = 4y^2 + 3z^2 + 2 > 2z^2.$$

Keďže x, y, z sú kladné, tak z toho vyplýva $x > y$ a $x > z$. Tieto ohraničenia môžeme využiť v druhej rovnici:

$$4y + 3z + 29 = 13x = 6x + 4x + 3x > 6x + 4y + 3z.$$

Odčítaním $4y + 3z$ od oboch strán dostaneme

$$6x < 29,$$

čiže $x < \frac{29}{6} < 5$. Zároveň $x > y \geq 1$. Vieme teda, že $1 < x < 5$ a zároveň x je nepárne, a tak x môže byť len 3. Nakoľko z je párne a $z < x$, jediná možnosť pre z je $z = 2$. Potom z druhej rovnice v zadaní dostaneme $y = 1$. Sústava rovníc zo zadania tak má nanajvýš jedno riešenie a zostáva nám už len overiť, že $(x, y, z) = (3, 1, 2)$ naozaj vyhovuje. To overíme jednoducho dosadením do oboch rovníc – v prvej nám vyjdú obe strany rovné 18 a v druhej 39, čiže obe rovnice platia. Jediným riešením sústavy rovníc zo zadania tak je $(x, y, z) = (3, 1, 2)$.

2.8 Karambol Matematických Stratégií

Zadanie. *Na Merlina zapôsobí, ako rýchlo Krtko vyrieši sústavu rovníc, a preto ho pozve k sebe na obed. Po obede Merlin vytiahne hru, aby po toľkom jedle aj trochu rozhýbali mozgy.*

Merlin rozdelí čísla $1, 2, \ldots, 2n$ *do* n *disjunktných dvojíc (teda každé z* $2n$ *čísel bude v práve jednej dvojici). Krtko si vyberie práve jedno číslo z každej dvojice, ktorú Merlin vytvoril. Ak súčet čísel, ktoré si Krtko vybral, je násobok* $2n$*, Krtko vyhrá. Inak vyhrá Merlin. V závislosti od* n *rozhodnite, ktorý z hráčov má vyhrávajúcu stratégiu*[2].

Riešenie. opravujú **Mišo M.** (michal.molnar@trojsten.sk) a **Danko** (daniel.teplan@trojsten.sk)

[2] Vyhrávajúca stratégia je taká, vďaka ktorej hráč vyhrá bez ohľadu na to, ako bude hrať súper.

Začnime jednoduchým pozorovaním o celkovom súčte čísel. Platí

$$1 + 2 + \ldots + 2n = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1) = 2n^2 + n.$$

Môžeme si všimnúť, že súčet všetkých čísel dáva po delení $2n$ zvyšok n. Teda ak sa Krtkovi podarí vybrať čísla tak, aby bol ich súčet deliteľný $2n$, súčet ostatných bude mať zvyšok n. Vo všeobecnosti Krtko rozdelí čísla na 2 kôpky – tú, ktorú si vezme, a tú, ktorú nechá tak. Môžeme si všimnúť, že ak je súčet na jednej kôpke násobkom n, na druhej je tiež. Zvyšky daných súčtov po delení $2n$ teda musia byť 0 a n, aby sedel celkový súčet.

Rozdeľme si príklad na 2 časti, podľa toho, či je n párne alebo nepárne. Z predošlého odseku vieme, že Krtko vyhrá práve vtedy, keď rozdelí čísla na dve kôpky tak, že súčet čísel na hociktorej z nich je násobkom n. Pre jednoduchosť počítajme miesto s pôvodnými číslami, s ich zvyškami po delení n.

Začnime s párnym n. Ľahko si všimneme, že Merlin dokáže popárovať čísla tak, aby tie s rovnakým zvyškom po delení n boli spolu. (Každé číslo od 1 po n bude v dvojici s číslom o n väčším.) Nech bude Krtko robiť čokoľvek, nakoniec si vezme z každého zvyšku po jednom. V takom prípade však prehrá, lebo $0+1+\ldots+(n-1) = n(n-1)/2$. Keďže $n-1$ je nepárne, výsledné číslo nebude deliteľné n. Merlin má teda vyhrávajúcu stratégiu.

Prejdime k nepárnemu n. Veľmi ľahko vidíme, že Merlinova stratégia, ktorá fungovala pre párne n, teraz nefunguje. Po chvíli skúšania si všimneme, že Krtkovi sa aj pre iné rozdelenia vcelku darí voliť čísla dosť šikovne na to, aby vyhral. Skúsme teda dokázať, že to tak bude pre každé nepárne n. Opäť využijeme, že Krtkovo víťazstvo závisí na tom, či dokáže čísla rozdeliť tak, aby mala každá kôpka súčet deliteľný n. Pre jednoduchosť rozlíšme červenú a modrú kôpku. Krtko rozdelí každú dvojicu od Merlina medzi tieto dve kôpky. Ak budú mať obe súčet deliteľný n, jedna bude mať súčet deliteľný dokonca $2n$ a jej voľbou Krtko vyhrá. My ukážeme niečo ešte silnejšie, a to dokonca, že Krtko vie zariadiť, aby aj červená aj modrá kôpka obsahovali každý zvyšok po delení n práve raz. To mu pomôže, pretože súčet čísel od 0 do $n-1$ je pre nepárne n deliteľný n.

Nech si teda Krtko na začiatku zvolí nejakú dvojicu a, b, ktorú vytvoril Merlin. Keďže ešte nie je nič zaradené, môže dať a na červenú kopu a nič tým nepokazí. Číslo s rovnakým zvyškom ako a po delení n potom zaradí do modrej. Ak toto číslo bolo b, môže začať „odznova“ so zvyšnými číslami, keďže zaradené čísla nemajú na zvyšok vplyv. Inak je to $c \neq b$ z dvojice c, d. Krtko zaradí d do červenej a pokračuje s novým zvyškom ďalej rovnako. Prejde do novej dvojičky a číslo s daným zvyškom zaradí do modrej. Takto nenarazí znovu na zvyšok, ktorý už je zaradený. Keďže má k dispozícii len konečne veľa čísel, raz sa dostane k číslu, ktorého dvojička už zaradená je. Toto číslo zaradené ešte nebolo, takže je to b. To zaradí do modrej kôpky, čo sedí, keďže a je v červenej. Zaradené dvojičky ani zvyšky už nemajú vplyv na zvyšné čísla, a tak môže Krtko začať svoj postup znovu.

Ako môžeme vidieť, Krtko dokáže rozdeliť zvyšky na modrú a červenú kôpku a udržať sa pritom v medziach stanovených zadaním. Následne si už len vyberie jednu tak, aby vyhral. Krtko má teda víťaznú stratégiu.

2.9 Kamufláž Mám Stromovú

Zadanie. *Po tom, čo spokojne dohrajú hru, sa ozve buchot pred Merlinovou chatrčou. Krtko vykukne z okna von a zbadá vojakov, ktorí ho hľadajú. Neváha ani chvíľu a vylezie cez okno na neďaleký strom. A kým vojaci spovedajú Merlina a prehľadávajú dom, Krtko sa obzerá po listoch na strome.*

Krtkov strom[3] *má $2n$ listov. Ukážte, že vždy vieme pridať n hrán tak, aby výsledný graf bol súvislý aj po zmazaní ľubovoľnej hrany (zmazať možno pôvodnú alebo novú hranu).*

Riešenie. opravuje **Matúš** (matus.zubcak@trojsten.sk)

List je vrchol v strome, z ktorého vychádza len jedna hrana.

Hranami musíme pospájať len listy, inak by po odobratí hrany, ktorá vychádza z listu ostal nesúvislý graf.

Samotný dôkaz vykonáme *sporom*. Predpokladajme, že *nevieme* pospájať $2n$ listov pomocou n hrán tak, že po odobratí akejkoľvek hrany bude výsledný graf súvislý. Každé popárovanie $2n$ listov n hranami nám určí množinu hrán takých, že po odobratí ktorejkoľvek hrany z tejto množiny získame nesúvislý graf. Rozmyslite si, že táto množina nikdy neobsahuje hrany vedúce do niektorého z listov. Nech M je minimálna takáto množina hrán (ak zoberieme do úvahy všetky možné popárovania v danom grafe). Ukážeme si teraz, že z popárovania listov, ktoré nám určuje množinu M, vieme vytvoriť nové popárovanie, ktoré bude mať menšiu takúto množinu, čo bude v spore s minimalitou množiny M.

Nech hrana $e = v_1v_2$ patrí M. Potom odobratím hrany e znesúvislíme pôvodný graf. Nech P je to popárovanie, ktoré generuje množinu M. Po odobratí hrany e dostaneme 2 grafy. Nech L_1 sú listy, ktoré sú v tom istom grafe ako vrchol v_1. O týchto listoch vieme, že musia byť popárované medzi sebou, lebo inak by sme po odobratí hrany e vedeli prejsť z v_1 do vrchola v_2, čo nevieme. Rovnako to isté vieme o listoch, čo sú v grafe s vrcholom v_2. Nazvime ich listy L_2.

Vyberme si teraz dva listy x, y z L_1 a dva listy a, b z L_2 také, že xy aj ab sú hranami z tých n hrán (teda vrcholy x, y a a, b sú spojené hranou).

Skonštruujme teraz nové párovanie P' z párovania P nasledovne: ponecháme v ňom všetky hrany z P okrem xy, ab. Miesto nich tam pridáme hrany ax, by. Párovaniu P' prislúchajú hrany M', ktorých odobratím vznikne nesúvislý graf.

Ukážeme si teraz, že všetky hrany, ktoré nepatrili do M nepatria ani do M', a že hrana v_1v_2 tiež nepatrí do M'. Preto $|M'| < |M|$, čo bude spor s minimalitou M.

V popárovaní P' po odobratí hrany $e = v_1v_2$ sa vieme z vrchola v_1 do vrchola v_2 dostať nasledovne: z vrchola v_1 sa vieme dostať do vrchola a, odtiaľ novou hranou ax do vrchola x a odtiaľ sa vieme dostať do vrchola v_2. Preto odobratím hrany e nevznikne nesúvislý graf, a preto nepatrí do množiny M'.

Teraz už rovno nahliadneme, že všetky hrany, ktoré nepatrili do M nepatria ani do M'. Najprv si ale ešte zadefinujeme dva intuitívne pojmy, ktoré pri dôkaze využijeme.

Nech a-b cesta je cesta medzi vrcholmi a, b v pôvodnom strome a x-y cesta je zase cesta medzi vrcholmi x, y v pôvodnom strome (bez toho, aby sme do stromu pridali tých n hrán).

Nech $h = uv$ je hrana, ktorá nepatrila do M pri popárovaní P, teda jej odobratím nevznikol nesúvislý graf pri danom popárovaní.

Zrejme si pôvodný graf vieme rozdeliť na dva grafy spojené hranou e. Nech G_1 je graf, ktorý obsahuje vrcholy a, b a G_2 je graf, ktorý zase obsahuje vrcholy x, y.

[3] https://sk.wikipedia.org/wiki/Strom_(te%C3%B3ria_grafov)

BUNV nech h patrí G_1 (ak h patrí G_2 myšlienka dôkazu je analogická). Chceme teraz vytvoriť cestu medzi vrcholmi u a v pri novom popárovaní P'. Vytvoríme ju simulovaním pôvodnej cesty, ktorú sme v predošlom odseku spomenuli a následnými drobnými úpravami, ak to bude potrebné.

Simulujme teraz cestu medzi vrcholmi u, v pri pôvodnom popárovaní P, kým nenarazíme na hranu ab. Ak na ňu nenarazíme, rovno sme vytvorili cestu medzi u, v v novom popárovaní P'.

Ak ale cesta obsahovala hranu ab, vieme pokračovať nasledovne: prejdeme po hrane ax potom prejdeme x-y cestou a na záver prejdeme hranou yb. Zrejme cesta medzi u, v pri pôvodnom popárovaní je len v grafe G_1, lebo oba vrcholy sú v grafe G_1 a z G_1 do G_2 sa dá dostať len jednou hranou e. Rovnako to isté môžeme povedať o x-y ceste, takže sa nebudú križovať. Následne pokračujeme už bez problémov až kým neprídeme do vrchola v, pretože vieme, že pôvodná cesta nemôže obsahovať aj ab aj xy hranu.

V prípade, že h patrí grafu G_2 postupujeme analogicky. Ak narazíme na hranu xy, v ceste ju nahradíme hranou ax, a-b cestou a hranou yb.

Tým sme ukázali, že každá hrana, ktorá nepatrila do M nepatrí ani do M' a súčasne hrana e patrila do M ale do M' už nepatrí. Preto $|M'| < |M|$, čo je nami hľadaný spor.

2.10 Krtkova Maľovacia Seansa

Zadanie. *Z toľkého vypytovania Merlina rozbolí hlava a vojakov odčaruje späť do hradu. Krtko môže bezpečne zliezť a hneď sa aj Merlinovi poďakuje. Krtko sa s Merlinom rozlúči, že ide maľovať akvarely krajiniek, na čo mu Merlin dá balíček s jedlom na cestu. Keď Krtko domaľuje svoj posledný akvarel západu slnka, rozbalí si Merlinov balíček, v ktorom okrem jedla nájde aj Merlinovu knihu matematických príkladov s autogramom. Začne si knihu listovať a na náhodnej strane nájde...*

Nech n je prirodzené číslo väčšie ako 1. Prirodzené číslo $a > 2$ nazveme n-rozložiteľné, ak $a^n - 2^n$ je deliteľné všetkými číslami tvaru $a^d + 2^d$, kde $d \mid n$ a $1 \le d < n$. Nájdi všetky n, pre ktoré existuje n-rozložiteľné číslo.

Riešenie. opravuje **M&M** (marek.murin@trojsten.sk)

Dobrým prístupom, ako pochopiť zadanie, je dosadiť nejaké čísla. Najmenšie n, pre ktoré môžeme zadanie riešiť, je $n = 2$. Potom úlohou je nájsť také a, aby $a^1 + 2^1 \mid a^2 - 2^2$. Keďže $a^2 - 2^2 = (a-2)(a+2)$, tak deliteľnosť platí pre ľubovoľné $a > 2$. Prirodzené číslo $n = 2$ je teda riešením, pre ktoré existuje n-rozložiteľné číslo a. Mať jediného deliteľa $1 \le d < n$, $d = 1$ sa z pohľadu skúmania úlohy oplatí, pretože treba overovať iba malé množstvo deliteľností. Také čísla n sú prvočísla.

Nech $n = p \in \mathbb{P}$, potom je úlohou nájsť také a, pre ktoré $a + 2 \mid a^p - 2^p$. Keďže netreba nájsť všetky také a, tak po chvíľke skúšania sa dá ľahko nájsť, že pre $a = 6$ platí $8 \mid 6^p - 2^p = 2^p(3^p - 1)$ – lebo pre ľubovoľné prvočíslo $p \ge 2$ platí, že pravá strana je deliteľná aspoň 2^{p+1} (z toho, že $3^p - 1$ je párne).

Pre priaznivcov všeobecnejšieho prístupu, nech p je nepárne prvočíslo. Potom

$$a^p - 2^p = (a^p + 2^p) - 2 \cdot 2^p = (a+2)(a^{p-1} - 2 \cdot a^{p-2} + 4 \cdot a^{p-3} - \cdots + 2^{p-1}) - 2^{p+1}. \tag{10.1}$$

Preto $a + 2 \mid a^p - 2^p$ práve vtedy, keď $a + 2 \mid 2^{p+1}$, a teda $a = 2^k - 2$, pre vhodné $2 < k \le p + 1$. Ako príklad pre prvočíslo 5 sú vyhovujúce riešenia a iba $a \in \{62, 30, 14, 6\}$.

Prvočísla sú vyriešené, pozrime sa na zložené čísla. Nech teda $n = x \cdot y$, kde $y > 1$ je nepárne číslo. Potom podobnými úpravami ako v (10.1) dostaneme

$$a^n - 2^n = a^{x \cdot y} - 2^{x \cdot y} = \left(a^x + 2^x\right)\left(a^{x(y-1)} - 2^x \cdot a^{x(y-2)} + 4^x \cdot a^{x(y-3)} - \cdots + 2^{x(y-1)}\right) - 2^{n+1}, \tag{10.2}$$

z čoho je vidieť, že $a^x + 2^x \mid a^n - 2^n$ práve vtedy, keď $a^x + 2^x \mid 2^{n+1}$, teda keď $a^x + 2^x$ je mocnina dvojky. Výraz $a^x + 2^x$ má byť mocninou dvojky väčšou ako 1, takže vieme, že $2 \mid a$. Nech teda $a = 2 \cdot b$. Potom $a^x + 2^x = 2^x(b^x + 1)$, a preto výraz $b^x + 1$ má byť tiež mocninou dvojky – nech je to 2^k, z čoho $2^k - b^x = 1$.

Toto je známy problém Catalan's conjecture (Catalanova domnienka alebo Mihailescova veta)[4], ktorý má vo svojej všeobecnej forme $x^a - y^b = 1$ pre prirodzené $a, b > 1$, $x, y > 0$ jediné riešenie $x = 3, a = 2, y = 2, b = 3$. Toto riešenie však nášmu problému nevyhovuje. Preto jediným riešením rovnice $2^k - b^x = 1$, kde $x > 1$, je $b = 1$ a $k = 1$. Z toho je ale jasné, že $a = 2$, čo je spor so zadaním. Preto n nemá nepárneho deliteľa.

Zostávajúca možnosť je, že n je mocnina dvojky.

Dobrým pozorovaním je, že $a^{2k} - 2^{2k} = (a^k + 2^k)(a^k - 2^k)$. Zovšeobecnením tejto úvahy je

$$a^{2^k} - 2^{2^k} = \left(a^{2^{k-1}} + 2^{2^{k-1}}\right)\left(a^{2^{k-1}} - 2^{2^{k-1}}\right) = \left(a^{2^{k-1}} + 2^{2^{k-1}}\right)\left(a^{2^{k-2}} + 2^{2^{k-2}}\right)\left(a^{2^{k-2}} - 2^{2^{k-2}}\right) =$$

$$= \left(a^{2^{k-1}} + 2^{2^{k-1}}\right) \cdot \left(a^{2^{k-2}} + 2^{2^{k-2}}\right) \cdot \cdots \cdot (a^2 + 2^2) \cdot (a + 2) \cdot (a - 2)\,.$$

Každý deliteľ 2^k má svoj príslušný faktor vo výraze. Preto existuje n-rozložiteľné číslo $a > 2$, a teda n je riešením.

Preto jediné riešenia sú, keď n je prvočíslo alebo mocnina dvojky.

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Catalan%27s_conjecture