Riešenia 3. kola letnej časti

3.1 Kružnicové Máriine Šaty ($\kappa \leq 1$)

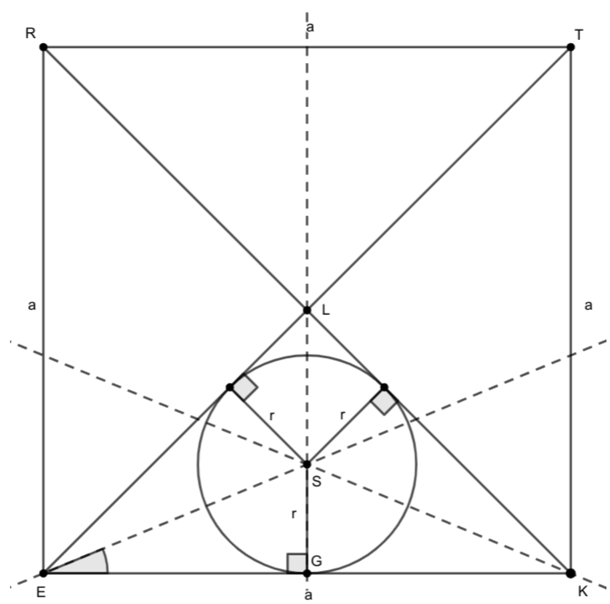
Zadanie. *…hneď, ako dočíta zadanie príkladu z Merlinovej knihy, sa pred ním zjaví portál, ktorý ho tentokrát zoberie do dielne Františka I. Lotrinského. Ten ho hneď zapriahne do práce. Potrebuje totižto vystrihnúť perfektnú kružnicu na šaty pre Máriu Teréziu.*

Majme štvorec REKT s priesečníkom uhlopriečok L. Určte polomer kružnice vpísanej trojuholníku KEL vzhľadom na dĺžku strany štvorca.

Riešenie. opravuje **Miloš** (milos.micik@trojsten.sk)

Polomer r kružnice vpísanej trojuholníku KEL vieme vyjadriť pomocou obsahov trojuholníkov. Označme si stred tejto kružnice ako S. Z náčrtu vidíme vzťah pre obsah trojuholníka EKL a obsahy trojuholníkov EKS, KLS a LES:

$$S_{EKL} = S_{EKS} + S_{KLS} + S_{LES}. \tag{1.1}$$



Vieme, že uhlopriečky štvorca rozdeľujú štvorec na štyri zhodné trojuholníky. Tým pádom vieme určiť obsah trojuholníka EKL ako štvrtinu obsahu štvorca $REKT$:

$$S_{EKL} = \frac{1}{4} S_{REKT} = \frac{1}{4} a^2.$$

Obsah trojuholníka EKS vieme vyjadriť ľahko, nakoľko poznáme dĺžku jeho strany a aj dĺžku výšky na túto stranu:

$$S_{EKS} = \frac{1}{2}r|EK| = \frac{ar}{2}.$$

Pri trojuholníkoch KLS a LES musíme spraviť o krok navyše, nakoľko nepoznáme dĺžku ich strany. Tú však vieme zistiť pomocou Pytagorovej vety z trojuholníka EKT alebo EKL alebo môžeme využiť relatívne známy poznatok, že pomer uhlopriečky štvorca a jeho strany je $\sqrt{2}$, čiže $|EL| = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, pomocou čoho vieme ľahko vyjadriť obsahy

$$S_{KLS} = S_{LES} = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{2}}{2}r = \frac{ar\sqrt{2}}{4}.$$

Doplnením všetkých týchto obsahov do (1.1) dostávame vzťah pre stranu štvorca a a polomer vpísanej kružnice r:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}a^2 &= \frac{ar}{2} + \frac{ar\sqrt{2}}{4} + \frac{ar\sqrt{2}}{4},\\
\frac{1}{4}a^2 &= \frac{ar}{2} + \frac{ar\sqrt{2}}{2},\\
\frac{1}{2}a^2 &= ar\left(1+\sqrt{2}\right),\\
\frac{1}{2\left(1+\sqrt{2}\right)}a &= r,
\end{aligned}$$

$$r = \frac{\sqrt{2}-1}{2\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}a = \frac{\sqrt{2}-1}{2\left(2-1\right)}a = \frac{\sqrt{2}-1}{2}a.$$

V poslednom kroku sme urobili tzv. *usmernenie zlomku*. Pomocou vzorca $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ sme sa zbavili odmocniny v menovateli.

Iné riešenie.

Alternatívne sme mohli na získanie tohto vzťahu využiť trigonometriu v trojuholníku EGS, kde G je stred strany EK. Vieme vyjadriť tangens uhla GES ako

$$\tan(|\sphericalangle GES|) = \frac{|GS|}{|EG|} = \frac{r}{\frac{1}{2}a}.$$

Z tohoto vzťahu vieme vyjadriť polomer kružnice:

$$r = \frac{1}{2}a\tan(|\sphericalangle EGS|).$$

Veľkosť uhla GES vieme ľahko zistiť na základe toho, že stred S vpísanej kružnice leží na priesečníku osí uhlov trojuholníka EKL. Uhol KEL má $45°$, tým pádom musí mať uhol GES $22,5°$. Hodnota $\tan(22,5°)$ nie je úplne bežne známa, no dá sa zistiť napríklad použitím vzorca pre polovičný uhol tangensu, ktorý je

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

Z toho však vieme prísť na to, že $\tan(22,5^\circ) = \sqrt{2}-1$, vďaka čomu dostaneme vzťah pre polomer kružnice

$$r = \frac{1}{2}a(\sqrt{2}-1).$$

3.2 Kruh Máme Skazený ($\kappa \leq 2$)

Zadanie. *Krtko mu celý natešený ukáže kruh, ktorý vystrihol. Avšak František ho počastuje: „Veď z toho ja šaty spraviť neviem!“ A hneď začne Krtkovi vysvetľovať, že kružnica musí mať vhodné parametre:*

$$x^2 = 12n + 5.$$

Načo sa hneď Krtko zarazí, že veď taká kružnica neexistuje. Ukážte, že mal Krtko pravdu a pre $x, n \in \mathbb{N}$ nemá rovnica žiadne riešenie.

Riešenie. opravujú **M&M** (marek.murin@trojsten.sk) a **Lukáš** (lukas.gaborik@trojsten.sk)

Chceme zistiť, či existuje také x, že x^2 dáva po delení dvanástimi zvyšok 5. Matematicky[1] to vieme zapísať aj ako $x^2 \equiv 5 \pmod{12}$.

Nech $x = 12r + s$. Potom $x^2 = (12r+s)^2 = 144r^2 + 24rs + s^2$. Všimnime si, že prvé dva členy sú deliteľné dvanástkou, a preto zvyšok mocniny závisí iba od zvyšku umocňovaného čísla. Inými slovami $x^2 \equiv s^2 \pmod{12}$.

Výraz s^2 pre $s \in \{0, 1, 2, \ldots, 11\}$ má zvyšky $0, 1, 4, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 4, 1$, a teda skutočne neobsahuje 5.

Čo ak by sme však mali ukázať, že rovnica $x^2 = 1287n + 5$ nemá žiadne riešenie pre $x, n \in \mathbb{N}$? Potom by vypisovanie všetkých možností zvyškov modulo 1287 neprichádzalo v úvahu. Pozerať sa na zvyšky sa nám ale zjavne oplatilo, skúsme to teda znova, ale s menším modulom – a to nejakým malým deliteľom toho pôvodného.

Iné riešenie

Pozrime sa teda zvlášť na deliteľnosť 3 a 4. Pravá strana dáva po delení štyrmi zvyšok 1. Ľavá strana x^2 dáva pre zvyšky $0, 1, 2, 3$ čísla x postupne zvyšky $0, 1, 0, 1$. Zatiaľ žiaden spor nevidíme. Avšak po delení tromi dáva pravá strana zvyšok 2, kdežto tá ľavá pre zvyškové triedy $0, 1, 2$ dáva postupne zvyšky $0, 1, 1$. Ak sa ale obe strany majú rovnať, musia sa rovnať aj ich zvyšky, čo je spor. Môžete si premyslieť, že zvyškami po delení trojkou by sa dal odargumentovať aj variant úlohy s číslom 1287.

Riešenie pre fajnšmekrov

Zadanie je ekvivalentné s tvrdením, že 5 je kvadratickým zvyškom modulo 12 Vytiahneme preto teóriu kvadratickej reciprocity.[2]

[1] Takýto typ zápisu nazývame kongruencia.

[2] http://thales.doa.fmph.uniba.sk/sleziak/vyuka/tc2006/tc.pdf, kapitola 4.

Keďže $12 = 2^2 \cdot 3$ a číslo 5 je nesúdeliteľné s oboma činiteľmi, podľa čínskej zvyškovej vety stačí overiť, či 5 je kvadratickým zvyškom po delení 4 a 3.

Teda treba zistiť, čomu sú rovné $\left(\frac{5}{4}\right)$ a $\left(\frac{5}{3}\right)$, kde $\left(\frac{a}{b}\right)$ je Jacobiho symbol[3].

Síce prvý výraz je zrejme $\left(\frac{5}{4}\right) = 1$, pretože $5^2 = 25 \equiv 5 \equiv 1 \pmod 4$, ale druhý výraz $\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1$, pretože $(3x+1)^2 = 9x^2 + 6x + 1 \equiv 1 \pmod 3$ a $(3x+2)^2 = 9x^2 + 12x + 4 \equiv 1 \pmod 3$.

Ak by nám náhodou toto prišlo stále veľmi jednoduché, mohli by sme použiť Eulerovo kritérium, na základe ktorého $\left(\frac{2}{3}\right) \equiv 2^{\frac{3-1}{2}} \equiv -1$.

Preto také čísla x a n neexistujú.

3.3 Kočiar Miesto Súpravy ($\kappa \leq 3$)

Zadanie. *František sa mu chce poďakovať, a tak ho pozve k nemu domov do kráľovského paláca. Zavedie ho ku kočiaru, kde sa Krtko začudovane opýta: „A veď keď si hovoril, že tento hrad je až vo vedľajšom meste, tak nepôjdeme radšej vlakom? Nebude to rýchlejšie a pohodlnejšie?“ „Vlakom?“ začudovane sa opýta František, „Čo to je? Ako to funguje?“ „Tak tu mi vlak nehrozí…“ Krtko si smutne povzdychol a podujal sa Františkovi vysvetľovať, čo to ten vlak je.*

Na železničnej stanici v Krtkovom meste majú dve slepé koľaje, ktoré sa na jednom konci spájajú do jednej, kadiaľ pokračuje trať von z mesta. Na prvej koľaji stojí súprava vlaku pozostávajúca z rušňa a n navzájom rozlíšiteľných vagónov. V jednom kroku môžu železničiari spraviť nasledovný proces:

- *rozpoja súpravu na 1. koľaji na ľubovoľnom mieste,*
- *rušeň odtiahne vagóny, ktoré ostali za ním zapojené, von z mesta,*
- *rušeň zacúva na 2. koľaj a tým odtlačí vagóny, ktoré boli odtiahnuté von z mesta, pričom ak sa na 2. koľaji už nachádzajú vagóny, tak ich k nim pripojí,*
- *pokiaľ ešte na 1. koľaji ostali vagóny, rušeň odpoja od všetkých vagónov na 2. koľaji a vráti sa naspäť na 1. koľaj, kde ho pripoja na vagóny.*

Tento proces železničiari ľubovoľne opakujú, dokým všetky vagóny neskončia na 2. koľaji.

Koľko rôznych súprav možno týmto spôsobom zložiť?

Napríklad ak na začiatku boli na 1. koľaji za rušňom vozne 1, 2, 3, tak železničiari mohli napríklad najskôr rozpojiť súpravu medzi vozňami 2 a 3, potom odtiahnuť vozne 1 a 2 von z mesta a následne ich presunúť na 2. koľaj. Rušeň sa potom vráti na prvú koľaj, pripojí sa k nemu vozeň číslo 3, vyjdú von z mesta a potom prejdú na druhú koľaj. Na konci tak budú na druhej koľaji za rušňom vozne v poradí 3, 1, 2.

Riešenie. opravuje **Danko** (daniel.teplan@trojsten.sk)

Pozrime sa, ako nakoniec vyzeralo každé preusporiadanie celej súpravy. Vždy ho vieme popísať iba miestami, na ktorých sa rozhodnú pôvodnú súpravu rozpojiť. Všetko ostatné je jednoznačné, postupne odoberú odpojený kus súpravy a preradia ho na druhú koľaj, ako sa píše v zadaní.

[3] Jacobiho symbol nadobúda hodnotu −1, keď a nie je kvadratickým zvyškom modulo b, 1 ak je a 0 ak $b \mid a$.

Medzi každými dvoma z n vagónov môžu súpravu buď rozpojiť alebo nerozpojiť, nie je to nijak ovplyvnené tým, či už súpravu rozpojili na inom mieste. Počet možností, ako to urobiť, teda bude 2^{n-1}, lebo počet miest medzi vagónmi je $n-1$ a každé má 2 možnosti.

Teraz už len treba ukázať, že nám z dvoch iných porozpájaní nemôže na konci vzniknúť rovnaká súprava. To overíme ľahko – pozrieme sa na nejaké miesto, kde sa dve porozpájania líšia, teda v jednom sme tam súpravu rozpojili a v jednom nie. Dva vagóny, ktoré sú priamo pri takomto mieste, ostanú v prípade nerozpojenia vzájomne v pôvodnom poradí, no v prípade rozpojenia sa do novej súpravy dostane najprv vagón ktorý bol bližšie k lokomotíve, teda potom bude z tých dvoch bližšie k mestu.

3.4 Kríza Miestneho Strážnika ($\kappa \leq 5$)

Zadanie. *Ako prechádzajú hradnou bránou, všimne si Krtko strážnika, ktorý lezie po rebríku na vrch hradieb. Avšak rebrík sa mu pomaličky zošúchava po stene dolu.*

Rebrík dĺžky d sa opiera o stenu. Vzdialenosť spodku rebríka od steny je x. Potom sa posunie spodok rebríka o vzdialenosť x ďalej od steny a vrch rebríka sa posunie o y_1 nižšie. Potom sa posunie spodok rebríka znova o x, vrch rebríka sa posunie o y_2 nižšie a tak ďalej. Rozhodnite, či je postupnosť čísel y_i rastúca, klesajúca alebo konštantná. Určte čísla y_i v závislosti od x a d.

Riešenie. opravujú **Mimi** (matej.hanus@trojsten.sk) a **Danko** (daniel.teplan@trojsten.sk)

3.5 Krtkove Malé Starosti ($\kappa \leq 8$)

Zadanie. *František zobral Krtka do audienčnej siene, kde mala Mária Terézia práve poradu. Avšak miesto radenia sa o problémoch krajiny jej radcovia naháňali jej 7 detí po celej sále. Nešťastná pestúnka len zalamovala rukami a snažila sa stiahnuť posledné dieťa z rokovacieho stola. Potom, čo František s Krtkom vošli, cisárovná Mária Terézia ukázala prstom na Krtka a spýtala sa: „To je tá nová pestúnka?“ Keďže nečakala na odpoveď, Krtkovi nezostalo nič iné než začať chytať deti. Naraz dostal vynikajúci nápad. Z tašky vytiahol pravidelný osemsten a zapískal. Deti zaujaté neznámym predmetom sa okolo neho zhŕkli a Krtko sa pustil do vysvetľovania svojej hry.*

Čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 *náhodne napíšeme na steny pravidelného osemstena, každé práve raz, na každú stenu práve jedno číslo. Aká je pravdepodobnosť, že žiadne dve za sebou idúce čísla nie sú napísané na stenách, ktoré majú spoločnú hranu? Čísla* 1 *a* 8 *považujeme tiež za za sebou idúce.*

Riešenie. opravuje **Michal S.** (michal.stanik@trojsten.sk)

Pravdepodobnosť spočítame tak, že vypočítame pomer počtu vyhovujúcich označení stien osemstena k počtu všetkých možných označení osemstena. Všetkých označení je 8!, pretože pre prvé číslo máme 8 možných stien, pre ďalšie už len 7 voľných stien, a tak ďalej.[4]

Poďme spočítať, koľko je vyhovujúcich očíslovaní stien. Ofarbime si steny nášho osemstena striedavo čiernou a bielou tak, že čierna stena susedí iba s bielymi stenami a biela iba s čiernymi. Je celkom ľahko vidno, že takéto ofarbenie existuje. Toto ofarbenie má tú peknú vlastnosť, že ak po sebe idúce čísla sú na stenách tej istej farby, tak určite nie sú na susedných stenách a všetko je v poriadku. Naopak, ak by mali byť nejaké dve po sebe idúce čísla na stenách rôznych farieb, musia to byť steny presne oproti sebe (voči stredu osemstenu). Steny oproti sebe sú zas vždy rôznych farieb.

[4] Výkričník značí operáciu faktoriálu, ktorá je definovaná tak, že $n!$ je súčin všetkých prirodzených čísiel od 1 do n, teda napríklad $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 1$.

Namiesto toho, aby sme priamo priraďovali k číslam 1 až 8 steny osemstena, najskôr k nim priradíme iba farby stien a až potom priradíme ku každému číslu niektorú zo stien priradenej farby. Počet očíslovaní stien teda zistíme takto v dvoch krokoch.

Keď si zapíšeme farby stien, na ktorých sú čísla 1 až 8, postupne do kruhu (pretože aj 1 a 8 sú za sebou idúce čísla), dostaneme kruhový zoznam. Ten sa skladá z nejakých úsekov rovnakých farieb, na ktoré sa pozrieme bližšie.

Prvé pozorovanie je, že ak je číslo i na bielej stene a číslo $i+1$ na čiernej, $i+2$ nemôže byť na bielej (pretože by muselo byť na stene oproti $i+1$, aby s ním nesusedilo, ale tam už je i z rovnakého dôvodu). Samozrejme, počítame tu modulo[5] 8. Inak povedané, každý úsek jednej farby má dĺžku aspoň dva. Ďalej platí, že biele úseky a čierne úseky sa na kruhu striedajú, teda oboch je rovnako veľa.

Rozoberme si (disjunktné[6]) prípady, ktoré môžu nastať:

1. prípad

Ak máme iba jeden čierny a jeden biely úsek, oba úseky musia mať dĺžku 4 (máme 4 biele a 4 čierne steny). Máme 8 možností pre číslo, kde začína čierny úsek (8 možných rotácii). Čierne steny môžeme medzi čísla rozhodiť 4! spôsobmi, pretože všetky priradenia čiernych stien k štyrom po sebe idúcim číslam sú vyhovujúce. Dve biele steny, ktoré majú číslo o 1 menšie a číslo o 1 väčšie ako čísla na kraji úseku čiernych stien, sú určené jednoznačne, zvyšné dve vieme priradiť dvomi spôsobmi.

Príklad: Čísla 4 až 7 sú na čiernych stenách. To, ktoré je na ktorej z čiernych stien, si vieme ľubovoľne zvoliť. 3 musí byť na bielej stene oproti 4 a 8 na bielej stene oproti 7. 1 a 2 môžu byť na zvyšných bielych stenách ľubovoľne.

Dokopy teda máme $8 \cdot 4! \cdot 2 = 16 \cdot 4!$ možností.

2. prípad

Ak máme dva čierne a dva biele úseky, musia mať všetky dĺžku práve 2, ak by boli dlhšie, dokopy by mali dĺžku viac ako 8, čo nemôže nastať. Máme 4 možnosti (rotácie) na výber, ktoré čísla budú na čiernych stenách – štvorice $(1,2,5,6)$, $(2,3,6,7)$, $(3,4,7,8)$ a $(4,5,8,1)$. Keď si toto zafixujeme, čierne steny môžeme týmto štyrom číslam priradiť ľubovoľne 4! spôsobmi, pretože žiadne dve nesusedia. Každé číslo na bielej stene má o jeden väčšie alebo menšie číslo na čiernej stene, oproti ktorému sa musí nachádzať. Každé číslo má túto svoju dvojičku inú, ale jednoznačne určenú. Naozaj sme teda mohli čierne steny priradiť ľubovoľne, biele sa budú tiež dať priradiť, a to práve jedným spôsobom.

Príklad: Čísla 2, 3, 6 a 7 sú na čiernych stenách, 4, 5, 8 a 1 na bielych. Ktoré číslo je na ktorej čiernej stene, si vieme zvoliť ľubovoľne, potom 4 musí byť na stene oproti 3, 5 na stene oproti 6, 8 oproti 7 a 1 oproti 2. Pre biele je iba jedna možnosť.

Dokopy máme $4 \cdot 4!$ možností.

[5] Ak napríklad $i = 8$, tak $i+1$ berieme, že je 1, nie 9. Po osmičke nám nasleduje číslo 1. Na rozdiel od obvyklého modulovania – počítania so zvyškami tu však nemáme číslo 0, ale 8.

[6] Žiadne dva prípady sa neprekrývajú.

Záver

Viac jednofarebných úsekov mať nemôžeme, takže sme napočítali dohromady $16 \cdot 4! + 4 \cdot 4! = 20 \cdot 4!$ možností z 8!, celková pravdepodobnosť je teda

$$\frac{20 \cdot 4!}{8!} = \frac{20}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{2 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{1}{84}.$$

3.6 Kalkulácia Mokrosti Sadeníc

Zadanie. *Kým sa deti v pokoji hrajú, Krtko má čas a započúva sa do porady Márie Terézie. S jej poradcami sa snaží vyriešiť, koľko vody budú potrebovať na závlahu severného (s), južného (j), východného (v) a západného (z) kráľovského trávnika. Krtko zaujatý týmto problémom vytiahne zápisník a začína riešiť daný problém.*

Vyriešte sústavu rovníc pre reálne čísla s, j, v, z:

$$\begin{aligned}
2j + 4sj^3 + 2sjv^2 + 2sjz^2 &= 0,\\
2v + 4sv^3 + 2sj^2v + 2svz^2 &= 0,\\
2z + 4sz^3 + 2sj^2z + 2sv^2z &= 0,\\
j^4 + v^4 + z^4 + j^2v^2 + j^2z^2 + v^2z^2 - 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Riešenie. opravujú **Kubo Poljovka** (jakub.poljovka@trojsten.sk) a **Andy** (martin.andricik@trojsten.sk)

Ľavú stranu prvej rovnice sústavy vieme upraviť ako

$$2j + 4sj^3 + 2sjv^2 + 2sjz^2 = 2(j + 2sj^3 + sjv^2 + sjz^2) = 2j(1 + s(2j^2 + v^2 + z^2)).$$

Podobne vieme upraviť aj druhú a tretiu rovnicu. Teraz sa pozrime na ľavú stranu tej štvrtej:

$$j^4 + v^4 + z^4 + j^2v^2 + j^2z^2 + v^2z^2 - 1 = \frac{1}{2}\left((j^2 + v^2)^2 + (v^2 + z^2)^2 + (z^2 + j^2)^2\right) - 1.$$

Vďaka tomu vieme poslednú rovnicu prepísať na

$$(j^2 + v^2)^2 + (v^2 + z^2)^2 + (z^2 + j^2)^2 = 2. \tag{6.1}$$

Zaveďme substitúciu $A = j^2 + v^2$, $B = v^2 + z^2$, $C = z^2 + j^2$. Zjavne $A, B, C \geq 0$. Potom sa sústava upraví na

$$j(1 + s(A + C)) = 0, \tag{6.2}$$

$$v(1 + s(B + A)) = 0, \tag{6.3}$$

$$z(1 + s(C + B)) = 0, \tag{6.4}$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = 2.$$

Prvé tri rovnice sú v súčinovom tvare. Pozrime sa teda na prípady podľa toho, ktoré z neznámych j, v, z sú rovné nule. Zjavne je však aspoň jedna neznáma nenulová – inak by sme z (6.1) dostali $0 = 2$, čo je spor.

Jedna z neznámych j, v, z je nulová

Keďže sústava je cyklická, nech BUNV $j = 0$, čiže $v, z \neq 0$. Rovnica (6.2) vtedy platí. Pre splnenie zvyšných dvoch z nenulovosti v, z musí súčasne platiť

$$0 = 1 + s(2v^2 + j^2 + z^2) = 1 + s(2v^2 + z^2),$$

$$0 = 1 + s(2z^2 + j^2 + v^2) = 1 + s(2z^2 + v^2).$$

Zjavne $s \neq 0$. Preto porovnaním pravých strán dostávame $2v^2 + z^2 = 2z^2 + v^2 \iff z^2 = v^2 \iff |z| = |v|$. Toto použijeme v (6.1), čím dostaneme

$$6v^4 = 2 \iff v = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}.$$

Štvorice $(s,\ j,\ v,\ z)$ v tejto vetve spĺňajúce podmienky sú teda $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}, \pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}, \mp\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)$ a všetky ich cyklické obmeny vzhľadom na neznáme $j,\ v,\ z$.

Dve z neznámych j, v, z sú nulové

Teraz vďaka cyklickosti môžeme BUNV predpokladať, že $z \neq 0$, a teda $j = v = 0$. Najskôr z rovnice (6.1) zistíme, že $z^4 = 1 \iff z = \pm 1$. Potom vďaka (6.4) musí byť $s = -\frac{1}{2}$. Riešením sú teda aj štvorice $\left(-\frac{1}{2}, 0, 0, \pm 1\right)$ a všetky ich cyklické obmeny vzhľadom na neznáme $j,\ v,\ z$.

Všetky neznáme j, v, z sú nenulové

Potom kvôli (6.2), (6.3), (6.4) musí platiť

$$1 + s(A + C) = 1 + s(B + A) = 1 + s(C + B) = 0.$$

Zjavne $s \neq 0$, preto z toho ale zase vyplýva, že $A + C = B + A = C + B$. Porovnaním (odčítaním) dvojíc týchto výrazov máme $A = B = C$ (mimochodom, vtedy $s = \frac{-1}{2A}$). Ostáva nám previesť tento vzťah do premenných j, v, z. To už je ale ľahké, lebo $A = B \iff j^2 = z^2$ a $B = C \iff v^2 = j^2$. Inak povedané, $v, z = \pm j$. To spolu s (6.1) dáva $12j^4 = 2 \iff j, v, z \in \left\{\pm\sqrt[4]{\frac{1}{6}}\right\}$, $s = \frac{-\sqrt{6}}{4}$.

Tak sme teda našli všetky prípustné štvorice s, j, v, z.

Poznámka

Ako sme dokázali náhodou rozložiť výraz zo štvrtej rovnice zadania? Možno poznáte, že $a^2 + b^2 = R^2$ je vzťah, ktorý spĺňajú práve body na kružnici s polomerom R a stredom v počiatku roviny. Podobne $a^2 + b^2 + c^2 = R^2$ spĺňa práve povrch gule (sféra) v priestore, a keby naše $a = j^2, b = v^2, c = z^2$, tak $j^4 + v^4 + z^4$ by bolo niečo ako guľa v súradniciach a, b, c. A tie zvyšné členy, ktoré nám zatiaľ akoby vadia, získame tak, že ich nejak vhodne namiešame z a, b, c, teda („skúsme") $A = a + b$ atď. Niežeby to bola kuchárka, ale je fajn sa na (hlavne kvadratické) výrazy občas pozrieť aj takto.

3.7 Kresba Modifikácie Školstva

Zadanie. *Keď sa im vďaka Krtkovi podarí vyriešiť problém so závlahou, Mária Terézia vytiahne obrovský papier a podujme sa kresliť plán novej školskej reformy. Krtko, povzbudený svojimi úspechmi, nezaváha ani na chvíľu a okamžite sa k nim pripojí.*

Nech O je stred kružnice opísanej trojuholníku ABC. Kružnica opísaná AOB pretína priamky BC a AC postupne v bodoch P a Q ($P \neq B$, $Q \neq A$). Dokážte, že O je ortocentrum trojuholníka CPQ.

Riešenie. opravuje **timka** (timea.szollosova@trojsten.sk)

Pozrime sa, čo od nás vlastne chce zadanie – dokázať, že priesečník „nejakých“ kolmíc na priamky BC a AC (osí strán AC a BC) je ortocentrom trojuholníka, ktorého dve strany sú zhodou okolností časti týchto priamok. To však znamená, že tieto kolmice musia byť výšky tohoto trojuholníka!

Poďme teda dokázať, že osi strán BC a AC prechádzajú vrcholmi Q a P. Alebo radšej naopak – ukážme, že priesečníky osí strán AC a BC s priamkami BC, AC ležia na kružnici opísanej trojuholníku AOB. Keďže kružnica s priamkou majú najviac dva priesečníky, bude jasné, že tieto priesečníky budú práve body P a Q.

Pozrime sa na trojuholníky AOB, BOC a COA. Všetky sú rovnoramenné, a preto označme uhly pri ich základniach postupne α, β, γ. Všimnime si, že pri vrchole C máme teraz uhol $\beta + \gamma$. Zároveň, súčet uhlov trojuholníka ABC je $2\alpha + 2\beta + 2\gamma$, čiže $\alpha + \beta + \gamma = 90°$.

Označme S stred strany BC. Ďalej označme W priesečník osi BC so stranou AC. Potom máme pravouhlý trojuholník SCW s uhlami $90°$ (pri S) a $\beta + \gamma$ (pri C), čiže posledný uhol, pri W, musí byť α.

Pokiaľ A, B, O, W v tomto poradí tvoria štvoruholník: V štvoruholníku $ABOW$ máme tým pádom pri tomto vrchole uhol $180° - \alpha$. My sme si však uhol pri B v tomto štvoruholníku definovali ako α. Protiľahlé uhly v $ABOW$ teda dávajú dokopy $180°$, z čoho plynie, že tento štvoruholník je tetivový, a teda $W = Q$.

Inak: Obvodový uhol nad AO sme definovali ako α, čiže z $\sphericalangle ABO = \sphericalangle AWO = \alpha$ plynie, že A, B, O, W stále tvoria tetivový štvoruholník (z vety o obvodovom uhle).

Analogicky tento dôkaz dokončíme aj pre P.

Poznámka: Všimnime si, že naše úvahy fungujú aj pokiaľ by jeden z uhlov α, β, γ bol záporný, čo by zodpovedalo situácii, kedy je ABC tupouhlý, a teda O neleží v jeho vnútri. V tom prípade sa dokonca môže stať, že v trojuholníku SCW nebudeme brať uhol pri C ako $\beta + \gamma$, ale $180° - \beta - \gamma$. V takom prípade však $180° = 2\beta + 2\gamma - 2|\alpha|$, čiže pri C máme $90° - |\alpha|$, z čoho rovnako dostaneme α pri W ako pôvodne.

3.8 Konštanty Musíme Škálovať

Zadanie. *Krtko je tým úplne celý nadchnutý. Všimne si, že aby to celé fungovalo, tak pre počet vyučovacích hodín (h), počet učiteľov (u) a počet predmetov (p) musí platiť nasledujúci vzťah.*

Nájdite všetky nezáporné celé čísla h, u, p, pre ktoré platí

$$h! + 5^u = 7^p.$$

Riešenie. opravuje **Jožtek** (jozef.rajnik@trojsten.sk)

Riešenia takýchto rovníc sú zväčša tvorené malými číslami. Zvyčajne nie je náročné tieto riešenia nájsť prostým skúšaním. Kľudne si to skúste. Ťažisko úlohy preto stojí na dôkaze, že ďalšie riešenia neexistujú. Veľmi užitočným spôsobom je sledovanie deliteľností, prípadne o to lepšie zvyškov po delení. Hneď zo začiatku vieme urobiť nasledovné, celkom priamočiare pozorovania:

- Číslo h nemôže byť 0 ani 1. Inak $h! = 1$ a $h! + 5^u$ je súčet dvoch nepárnych čísel, teda párne číslo. No a párne číslo nemôže byť rovné nepárnemu 7^p.
- Ľavá strana je aspoň $h! + 5^u \geq 1 + 1 = 2$. Preto $7^p \geq 2$, teda $p \geq 1$ a pravá strana je vždy deliteľná 7.
- Preto sa nemôže stať, že $h \geq 7$, lebo potom je $h!$ deliteľné 7, ale 5^u nie je deliteľné 7. Teda $h! + 5^u$ by nebolo deliteľné 7.
- Taktiež sa nemôže stať, že $h \geq 5$ a $u \geq 1$. Vtedy je totiž $h! + 5^u$ deliteľné piatimi, pričom 7^p nie je.
- Ak je $5 \leq h \leq 6$, tak z predošlého bodu musí platiť $u = 0$. Dostávame tak dve možné hodnoty ľavej strany: $5! + 5^0 = 121$ a $6! + 5^0 = 721$, z ktorých žiadna nie je mocninou sedmičky. V tomto prípade tiež nemáme riešenia.

Týmito pomerne jednoduchými úvahami sa nám podarilo zistiť, že jediné možné hodnoty h sú 2, 3 a 4. Tieto prípady postupne rozoberieme, pričom sa budeme už viac pozerať na zvyšky po delení vhodnými číslami.

Prípad $h = 2$ a $h = 3$

Prvou kľúčovou myšlienkou je, že ak je u alebo p dostatočne veľké, tak máme jednu mocninu z našej rovnice deliteľnú nejakým dostatočne veľkým číslom. Ostávajúca mocnina potom bude dávať zvyšok, ktorý je určený zvyškom $h!$. Niekedy sa stáva, že zvyšky mocnín nejakého čísla nenadobúdajú pri vhodnom deliteľovi všetky možné hodnoty. To nám presne nastane v tomto prípade.

Predpokladajme, že $u \geq 2$. Potom $h! + 5^u$ dáva zvyšok $h!$ po delení 25. Ľahko prídeme na to, že 7^p môže po delení 25 dávať len zvyšky 1, 7, 24, 18. Toto pozorovanie možno dokázať rôznymi spôsobmi, napr. matematickou indukciou. Pomerne stručné odôvodnenie s využitím zápisu cez kongruencie[7] modulo 7 môže však vyzerať takto: $7^0 \equiv 1, 7^1 \equiv 7, 7^2 \equiv 24, 7^3 \equiv 18 \pmod{25}$ a vo všeobecnosti pre $p = 4k + x$, kde $x \in \{0, 1, 2, 3\}$, platí

$$7^p = 7^{4k+x} = \left(7^4\right)^k \cdot 7^x \equiv 1^k \cdot 7^x \equiv 7^x \in \{1, 7, 24, 18\}. \pmod{25}$$

No a keďže na ľavej strane máme zvyšok $2! = 2$ alebo $3! = 6$, tak rovnosť nemôže nastať.

Preto u musí byť 0 alebo 1. Rozobraním ostávajúcich prípadov dostávame:

- pre $(h, u) = (2, 0)$: $2! + 5^0 = 3 \neq 7^p$;
- pre $(h, u) = (2, 1)$: $2! + 5^1 = 7 = 7^1$, čo dáva riešenie $(h, u, p) = (2, 1, 1)$;
- pre $(h, u) = (3, 0)$: $3! + 5^0 = 7 = 7^1$, čo dáva riešenie $(h, u, p) = (3, 0, 1)$
- pre $(h, u) = (3, 1)$: $3! + 5^1 = 11 \neq 7^p$;

[7]Zápis $a \equiv b \pmod{d}$, ktorý čítame *a je kongruentné s b modulo d* znamená, že čísla a a b dávajú rovnaký zvyšok po delení d. Hoci môže na prvý pohľad vyzerať odstrašujúco, nemusíte sa ho báť. Ide o šikovný zápis, pomocou ktorého vieme zapisovať prácu zo zvyškami.

Prečo je prípad $h = 4$ problematický?

Teraz na ľavej strane dostávame po delení 25 zvyšok $h! = 24$. Preto nám táto metóda nevylúči všetko, lebo 7^p naozaj môže dávať zvyšok 24 po delení 25. Presnejšie v prípade, keď $p = 4k + 2$. Vieme však aspoň, že p musí byť párne. Teraz ani nemusí byť náročné dostať ďalšie riešenie. Keď si zvolíme $p = 2$, teda najmenšie možné tvaru $4k + 2$, tak nám vyjde $u = 2$, lebo $4! + 5^2 = 24 + 25 = 49 = 7^2$. Toto je zlá správa. Ak totiž chceme vylúčiť existenciu ďalších riešení pomocou zvyškov, tak musíme nájsť takú metódu, ktorá nebude fungovať pre prípad $u = 2$ a $p = 2$. Čiže potrebovali by sme nejako využiť, že $u \geq 3$ alebo $p \geq 3$. Inšpirovaní predošlým prípadom by sme mohli skúsiť zvyšky po delení $5^3 = 125$ alebo $7^3 = 343$, no tých je dosť veľa. A ani sa teraz nesprávajú až tak pekne. Celkovo pri uvažovaní zvyškov sa nám často podarí dostať len výsledky typu, že $u \equiv 86 \pmod{294}$, ktoré nám stále nechajú nekonečne veľa nevylúčených prípadov.

Budeme musieť prísť s niečim novým. Keď v úlohe vidíme dve mocniny, tak by nás mohol napadnúť vzorec $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Na tento vzorec nás môže naviesť aj fakt, že p je párne. Poďme teda pomocou zvyškov ukázať, že aj u musí byť párne.

Prípad $h = 4$

Z úvah o deliteľnosti 25 nám už vyplynulo, že p musí byť v tomto prípade párne. Teraz využijeme, že $5 \equiv -1 \pmod{6}$, preto 5^u dáva po delení 6 len zvyšok 1 pre párne u a zvyšok 5 (čo je vlastne -1) pre nepárne u. Keďže $4!$ je deliteľné 6, tak ide aj o zvyšok ľavej strany. Na pravej strane však 7^p dáva vždy zvyšok 1 po delení 6, lebo $7 \equiv 1 \pmod{6}$. Aby sme na oboch stranách dostali rovnaké zvyšky, musí byť u párne.

Keďže u aj p musia byť párne, tak si vieme našu rovnicu upraviť na tvar

$$\begin{aligned} 4! + 5^u &= 7^p, \\ 24 &= 7^p - 5^u, \\ 24 &= (7^{p/2} - 5^{u/2})(7^{p/2} + 5^{u/2}). \end{aligned}$$

Činiteľ $7^{p/2} + 5^{u/2}$ je kladný a vďaka parite u, p aj celý. Preto je aj $7^{p/2} - 5^{u/2}$ činiteľ kladný celý a zjavne aj menší ako druhý činiteľ. Vyskúšame teda všetky možnosti rozkladu čísla 24 na dva kladné celé činitele a z nich jednoduchým riešením sústavy dvoch rovníc určíme hodnoty $7^{p/2}$ a $5^{u/2}$.

$7^{p/2} - 5^{u/2}$	$7^{p/2} + 5^{u/2}$	$7^{p/2}$	$5^{u/2}$	p	u
1	24	12,5	11,5	–	–
2	12	7	5	2	2
3	8	5,5	2,5	–	–
4	6	5	1	–	–

Spolu s predošlými dvomi riešeniami, tak dostávame tri riešenia rovnice: $(h, u, p) \in \{(2, 1, 1), (3, 0, 1), (4, 2, 2)\}$. Každé z nich zjavne vyhovuje.

3.9 Kartičky Matematikov Sčítavame

Zadanie. *Krtko sa rozlúčil s kráľovskou rodinou s tým, že by sa už mal vrátiť domov. Hoci už veľmi túžil po svojej mäkkej posteli, ešte sa rozhodol, že sa prejde do neďalekého mesta na trhy, aby si pohľadal nejaký suvenír. Ako sa tak prechádzal od jedného stánku k druhému, zaujal ho stánok s hrami.*

Keď sa pri ňom pristavil, predajca mu hneď začal ukazovať všakovaké kartičky s historickými osobnosťami, kde každá kartička mala priradené práve jedno prirodzené číslo. Ale Krtko mal už histórie dosť, a tak sa ho spýtal, či nemá náhodou nejaké matematické kartičky. Na to mu predajca odvetil, že všetky kartičky, ktoré majú na sebe Fibonacciho čísla[8] $F_1, F_2, \ldots, F_{2022}$*, majú na sebe vyobrazeného matematika. Krtko sa potešil a rozhodol sa, že si ich kúpi* 2022*. Ale keď začal počítať, koľko by ho to stálo, tak zistil, že nemá dosť peňazí. Preto prišiel so záložným plánom, v ktorom si kúpi kartičky s nejakými prirodzenými číslami tak, aby všetky svoje vytúžené vedel z nich nasčítavať.*

Koľko najmenej kartičiek si potrebuje Krtko kúpiť, aby vedel každé z Fibonacciho čísel $F_1, F_2, \ldots, F_{2022}$ *dostať ako súčet čísel na niekoľkých (možno len jednej) z kúpených kartičiek? Krtko si môže kúpiť aj viacero kartičiek s rovnakým číslom. Pri sčítavaní však nemôže jednu konkrétnu kartičku použiť viackrát.*

Riešenie. opravujú **Lukáš** (lukas.gaborik@trojsten.sk) a **Mišo M.** (michal.molnar@trojsten.sk)

Riešenie začneme tým, že sa pokúsime vybrať čo najmenej kartičiek tak, aby Krtko vedel vyskladať všetky súčty F_1, F_2, …, F_{2022}. Až potom sa zameriame na dôkaz toho, že to s menej kartičkami nepôjde.

Ako prvé si uvedomíme, že $F_1 = F_2 = 1$. Číslo 1 nevieme dostať ako súčet menších čísel, takže potrebujeme aspoň jednu 1, no nie obe. Pri $F_3 = 2$ máme dve možnosti. Buď vieme použiť dve 1, alebo rovno 2 a využiť našu jednotku na získanie väčšieho čísla. (Napríklad $F_4 = 3 = 2 + 1$.) Druhá možnosť nám umožní nasčítať viac čísel, tak zvolíme tú. *Toto však nemusí byť správny prístup.* Pokojne by sa mohlo stať, že aj keď na menších hodnotách zvolíme viacero čísel, tak niekde vyššie naopak ušetríme. Zatiaľ však pokračujeme len intuitívne a to, či sa to oplatilo budeme riešiť až dodatočne.

Máme teda kartičky s číslami $F_1 = F_2$ a F_3. Vieme nasčítať aj $F_4 = F_3 + F_2$. Ďalej nám stačí kúpiť až F_5. Kartičku s F_5 sme zjavne nevyužili pri získavaní F_4, takže o $F_6 = F_5 + F_4$ máme postarané. A tak ďalej. Kúpime teda kartičky s Fibonacciho číslami na nepárnych pozíciách, t. j. F_1, F_3, F_5, …, F_{2021}. Zvyšné (na párnych pozíciách) potom dostaneme ako súčet všetkých menších kartičiek. Pre F_2 to sedí a pre $k > 1$ máme vzťah $F_{2k} = F_{2k-1} + F_{2k-2}$, kde k už známemu spôsobu získania F_{2k-2} prihodíme kartičku F_{2k-1}. Takto sme potrebovali 1011 kartičiek.

Teraz chceme nájsť nejaký dolný odhad, koľko kartičiek budeme potrebovať. V ideálnom prípade nám vyjde 1011 a sme hotoví. V horšom prípade nám vyjde, že by mohlo stačiť menej. Vtedy budeme musieť, buď zlepšiť náš výber kartičiek, aby ich bolo menej, alebo prísť s presnejším odhadom. S dávkou optimizmu sa pokúsime dostať k odhadu 1011.

Intuícia hovorí, že ak budeme potrebovať kartičiek polovicu z počtu Fibonacciho čísel, tak by niečo podobné mohlo platiť stále. Ukážeme teda, že ak na čísla F_1 až F_n potrebujeme k kartičiek, tak na čísla F_1 až F_{n+2} budeme potrebovať aspoň $k + 1$ kartičiek. Majme teda k kartičiek a overme, či z nich vieme vyskladať F_1 až F_{n+2}. Ak by to šlo, vieme ich použiť aj na F_1 až F_n, keďže to len vynecháme posledné dva súčty. Keďže k je minimum pre F_1 až F_n, určite každú kartičku použijeme aspoň na jedno z čísel. Najväčší súčet dostaneme, ak použijeme každú kartičku práve raz. Tento súčet však bude menší alebo rovný súčtu $F_1 + F_2 + \ldots + F_n$, keďže v ňom by sme mohli kartičky využiť aj viackrát. Bude to však stačiť na zisk súčtu F_{n+2}?

Pre menšie n si všimneme, že odpoveď je nie. $F_1 < F_3$, $F_1 + F_2 < F_4$. Využitím definície Fibonacciho čísel dostaneme, že ak

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_m < F_{m+2},$$

[8] Fibonacciho čísla F_1, F_2, F_3 a tak ďalej sú definované tak, že $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ a všetky zvyšné Fibonacciho čísla sú určené predpisom $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pre $n \geq 3$.

tak pričítaním F_{m+1} k obom stranám dostaneme

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_m + F_{m+1} < F_{m+2} + F_{m+1} = F_{m+3}.$$

Táto nerovnosť teda bude platiť vždy. Na zisk súčtu F_{n+2} teda budeme potrebovať pridať $(k+1)$-vú kartu. Zároveň $k+1$ kariet bude stačiť, lebo ak vieme použitím našich k kariet dostať všetko od F_1 po F_n, pridaním F_{n+1} budeme vedieť získať F_{n+1} aj $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Podľa nášho výpočtu potrebujeme aspoň $k + 1010$ kartičiek na čísla F_1 až F_{2022}, kde k je počet kartičiek pre F_1 až F_2. Ako sme spomínali už na začiatku, potrebujeme aspoň 1 kartičku a bude to presne 1 kartička, keďže $F_1 = F_2$.

Odpoveď: Krtko si potrebuje kúpiť aspoň 1011 kartičiek.

3.10 Kapitola Medzipriestorového Štvoruholníka

Zadanie. *Keď sa mu konečne podarilo zostaviť všetky kartičky, tak sa mu v rukách naraz rozsvietili a pred ním sa zjavil už známy portál, ktorý ho tentokrát zobral naspäť do T2. Krtko si celý uveličený sadol do kresla, keď tu si všimol, ako ho s otvorenými ústami pozorujú David a Jožko. Krtko sa podujal im vyrozprávať svoje pozoruhodné dobrodružstvá. Jožko nelenil a hneď vytiahol tablet, kde si začal zakresľovať mapu Krtkových ciest. Ako tak Krtko dorozprával, Jožko natešene zvolal: „A veď to je tetivovec v časopriestore!“ Zmätený Krtko sa hneď nahol k tabletu, aby lepšie videl.*

Máme štvoruholník ABCD s vpísanou kružnicou k, ktorá sa dotýka strán BC, DA postupne v bodoch E, F. Úsečka DE pretína kružnicu k druhýkrát v bode X. Dokážte, že ak sa kružnica opísaná trojuholníku DFX dotýka priamok AB a CD, tak štvoruholník AFXC je tetivový.

Riešenie. opravujú **Pedro** (peter.sukenik@trojsten.sk) a **Viki** (viktoria.pravdova@trojsten.sk)

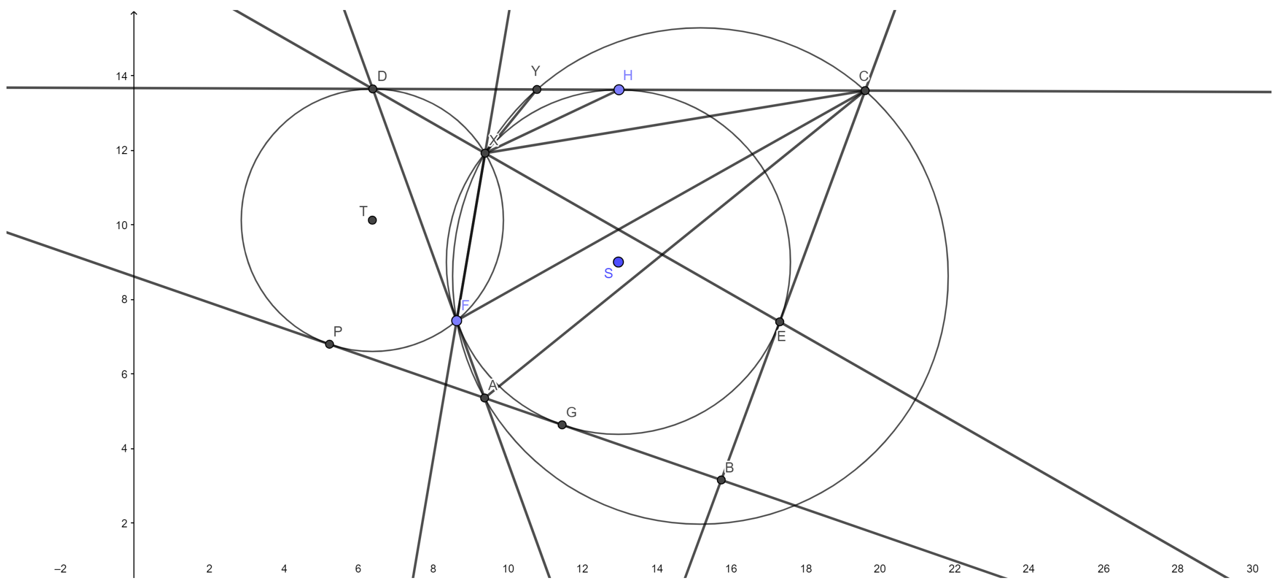
Vzorové riešenie tejto úlohy si môžeš pozrieť aj ako video na našom YouTube kanáli `www.youtube.com/KorMatSem`.

Predtým, než začneme úlohu riešiť, zamyslime sa najprv nad dvomi predprípravnými vecami – po prvé, ako vôbec takýto komplikovaný obrázok s dvomi predpokladmi nakresliť a po druhé (čo súvisí s kreslením), aké má táto konfigurácia stupne voľnosti. Voľne povedané, počet stupňov voľnosti je v podstate počet objektov, ktoré môžeme postupne zakresliť do roviny tak, že pri kreslení každého z nich máme stále nejakú voľnosť vo výbere jeho polohy a zároveň stále dodržiavame predpoklady zo zadania. Napríklad, rovnostranný trojuholník žiadne stupne voľnosti nemá, ak si odmyslíme štandardné zhodné a podobné zobrazenia v rovine. Ak fixneme veľkosť, polohu a rotáciu trojuholníka, nemáme už nič, čím by sme mohli voľne hýbať, pretože vzájomná poloha jeho vrcholov je fixne daná.

Správnych spôsobov, ako úlohu nakresliť, môže byť niekoľko. My odprezentujeme ten, ktorý sa zdá nám najvhodnejší. Silno odporúčame čitateľovi zobrať papier a pero a kresliť s nami, aby videl, aké je to v tomto poradí jednoduché. Najmä, ak mal problémy so svojím vlastným náčrtom. Začneme kružnicou k. Toto rozhodnutie je jasné každému, kto sa kedy snažil nakresliť dotyčnicový štvoruholník tak, že najprv nakreslil jeho strany. Fixneme si jej polohu a veľkosť, aby sme sa zbavili zbytočnej voľnosti v podobe posunutí a rovnoľahlosti. Môže to zniet neintuitívne, ale ako druhý objekt nakreslíme priamku, na ktorej budú ležať vrcholy C, D. Onedlho uvidíme, prečo. Túto priamku nakreslíme tak, aby bola „vodorovne“ a hore. Priesečník tejto priamky s kružnicou k označme H. Teraz zvoľme vrchol D kdekoľvek na tejto priamke naľavo od H.

Tak a sme hotoví. Akokoľvek neuveriteľne to bude zniet, práve sme vyčerpali všetky stupne voľnosti, ktoré sme mali. Celý zvyšok konfigurácie je daný tým, čo sme zrovna nakreslili. Zároveň je ľahké si rozmyslieť, že kresliac veci v tomto poradí sme nestratili žiadnu „skrytú konfiguráciu“ a vieme takto nakresliť všetky. Prečo je teda celý zvyšok obrázku daný?

Poloha bodu F (a teda aj priamky, na ktorej ležia body D, A) je daná dokreslením druhej dotyčnice z D na k. Nazvime si kružnicu opísanú trojuholníku DFX ako l. Všimnime si, že poloha tejto kružnice je teraz jasne daná aj bez bodu X, lebo zo zadania vieme, že sa dotýka priamky DC. Teda stačí pretnúť kolmicu na priamku DC prechádzajúcu bodom D s osou úsečky FD a máme jednoznačne určený stred, označme ho T. Toto je zároveň dobrý spôsob, ako kružnicu nakresliť. Teraz môžeme jednoducho označiť druhý priesečník kružníc k, l ako X. Ďalej vieme skonštruovať priamku DX. Jej druhý priesečník s kružnicou k musí byť bod E. V tomto bode teraz máme určenú dotyčnicu ku kružnici k, ktorá je priamkou, na ktorej musia ležať body B, C. Bod C je už jednoznačne určený ako priesečník tejto priamky a priamky DH, teda ho označíme. Aby sa kružnica l mohla dotýkať priamky AB, musí byť táto priamka druhou spoločnou dotyčnicou kružníc k, l, lebo vieme, že AB sa zo zadania dotýka aj kružnice k. Teda poloha priamky AB je jednoznačne určená a tým aj body A, B ako priesečníky tejto dotyčnice postupne s priamkami DF a CE. Ako vidíme, vskutku sme práve nakreslili celý obrázok pričom každý jeden krok bol veľmi jednoduchý na reálne nakreslenie. Popri kreslení sme už stihli získať slušnú intuíciu o konfigurácií a jej vnútorných väzbách.



Tak a teraz prejdime na samotné riešenie. Stačí už len ukázať, že kružnica opísaná trojuholníku XFC (nazvime ju m) prechádza bodom A. Na to označíme bod A' ako priesečník kružnice m s priamkou AB a ukážeme, že A' a A sú vlastne na tom istom mieste.[9] Plán je nasledovný: stačí nám vlastne dokázať, že priamka $A'F$ je dotyčnicou ku kružnici k. Potom to musí byť tá istá dotyčnica, ktorá z bodu D vedie cez F do bodu A. Ako ukážeme, že $A'F$ je dotyčnicou? Začneme tým, že sa namiesto tejto časti obrázka budeme sústrediť na symetrickú časť obrázka s bodmi X, H a a priesečníkom kružnice m s priamkou DC (ktorý nazveme Y). To preto, lebo v tej časti obrázka máme trochu viac informácií a trochu jednoduchšie uhlenie. Ukážeme, že priamka YX je dotyčnicou kružnice k.

Poďme sa pustiť do uhlenia. Označme stred kružnice k ako S, priesečník kružnice m s priamkou DC ako Y a priesečník AB s kružnicou k ako G. Nech $|\angle FDH| = 2\alpha$ a $|\angle XDH| = \omega$. Hoci ω je daná priamo z α, ich vzájomný

[9] Tu si musíme davať sakramenský pozor, aby sme omylom nevyužili, že bod A' leží na priamke DF alebo že A leží na kružnici m, oboje by totiž znamenali využitie dokazovaného tvrdenia v dôkaze, čo sa nepatrí.

vzťah nie je priamočiary a jednoduchý, preto sa oplatí označiť aj ω, ktorý budeme masívne používať. Keďže DH je dotyčnicou ku kružnici l, z vety o úsekovom uhle nám je jasné, že $|\angle DFX| = \omega$. Keďže priamka DF je dotyčnicou ku kružnici k, z vety o úsekovom uhle nám je jasné, že $|\angle FEX| = \omega$. To ale znamená, že priamky DC a EF sú rovnobežné (vďaka striedavým uhlom)! Ľahko sa dá rozmyslieť, že v takejto situácií to musí znamenať, že štvoruholník $DCEF$ je nie len lichobežník, ale aj rovnoramenný lichobežník (napríklad tak, že si predstavíme konfiguráciu, v ktorej naozaj tento štvoruholník bude rovnoramenný lichobežník (a teda H bude stredom úsečky DC) a uvedomíme si, že posunom bodu C v ktoromkoľvek smere sa monotónne bude meniť aj poloha bodu E, čo pri fixnej polohe bodu F zamedzuje rovnobežnosti daných dvoch priamok). Teda $|\angle CFD| = |\angle CED| = 180 - \omega - 2\alpha$ (čo vidíme dopočítaním uhlov do 180 stupňov v trojuholníku DEC). Teda uhol XFC musí mať veľkosť $180 - 2\omega - 2\alpha$, po odpočítaní uhla DFX. Keďže body $FXYC$ ležia na kružnici, využitím, že súčet protiľahlých uhlov tetivového štvoruholníka je 180 stupňov, vidíme, že $|\angle XYH| = 2\omega + 2\alpha$.

Ďalej, $|\angle HSF| = 180 - 2\alpha$ ako jasne vidno z tetivového štvoruholníka $DFSH$. Zároveň, $|\angle XSF| = 2\omega$ keďže uhol XSF je stredový k uhlu XEF. Teda jednoduchým odpočítaním uhlov dostávame $|\angle HSX| = 180 - 2\alpha - 2\omega$. Ak teraz označíme Y' ako priesečník dotyčnice ku kružnici k prechádzajúcej bodom X a priamky DC a dopočítame z tetivovosti štvoruholníka $XSHY'$ uhol pri Y', vidíme, že je to ten istý uhol ako uhol pri Y v trojuholníku XYH. Teda Y a Y' splývajú. Z toho vyplýva, že druhá dotyčnica z bodu Y na kružnicu k je vlastne YX.

Záverom, všimnime si, že všetky tri kružnice a tiež body X, F, H, G, A', Y sú súmerné vzhľadom na osovú súmernosť s osou TS, teda osou tvorenou stredmi kružníc k, l (a m). Teda páry bodov X, F a Y, A' a H, G majú symetrické pozície a role vzhľadom na os ST. To ale znamená, že druhá dotyčnica na kružnicu k z bodu A' nie je nič iné, ako $A'F$, symetricky k vzťahu bodov Y a X. Nakoľko dotyčnica v bode F ku kružnici k je len jedna, musí to byť tá istá dotyčnica, na ktorej ležia body F, A. Teda vskutku, A a A' ležia na tom istom mieste, čo bolo našim cieľom dokázať.

Poznámka na rozlúčku: Bod Y v tomto riešení nebol nevyhnutný. Celá vec sa dala spraviť počítaním uhlov pri A a A', s využitím iba o trošičku náročnejšieho uhlenia. Teda táto úloha sa dala vyriešiť vskutku minimalisticky, s využitím najzákladnejších geometrických tvrdení a bez dokresľovania bodov a priamok. Bod Y sme dokreslili, iba aby sme demonštrovali, že nie je potrebné sa báť robiť také veci, ak máme dôvod veriť, že nám to pomôže.