Riešenia 3. kola zimnej časti

3.1 Kopce Masívnych Sťažností ($\kappa \leq 1$)

Zadanie. *Vedúci KMSka sa vydali na výlet do čarokrásnych lesov. Vopred sa však nedohodli na trase, a tak skupinka viac či menej nahnevaných vedúcich začala stúpať do príliš strmého kopca. Nadmorská výška bola síce príliš vysoká, no KMS vedúci si aj za takýchto okolností na nej všimli niečo zaujímavé.*

Koľko existuje rôznych štvorciferných čísel, ktorých prvé dvojčíslie je zároveň aj ciferným súčtom?

Riešenie. opravuje **Tomáš** (tomas.sasik@trojsten.sk)

Najskôr si uvedomme, že prvé dvojčíslie štvorciferného čísla, môže byť ľubovoľné číslo od 10 do 99. Ciferný súčet štvorciferného čísla však môže byť najviac $9 + 9 + 9 + 9 = 36$, takže aj prvé dvojčíslie môže byť najviac 36. Preto prvá cifra môže byť najviac 3. Z toho však dostávame, že ciferný súčet môže byť najviac $3 + 9 + 9 + 9 = 30$. Súčet 30 sa však dá dosiahnuť jediným spôsobom ako $3 + 9 + 9 + 9$, kedy prvé dvojčíslie nie je 30, ale 39. Takže najväčší možný ciferný súčet, ktorý môže spĺňať podmienky zadania, je 29. Čiže prvá cifra môže byť najviac 2. Teda máme len dve možnosti na prvú cifru – 1 alebo 2.

Ďalej využijeme trochu aj symbolický zápis. Označme si cifry nášho štvorciferného čísla postupne a, b, c, d, teda zápis nášho čísla v desiatkovej sústave je $\overline{abcd}$. Hodnotu prvého dvojčíslia vieme vyjadriť ako $10a + b$ a ciferný súčet zas ako $a + b + c + d$. Dáme tieto dve čísla do rovnosti

$$10a + b = a + b + c + d,$$

$$9a = c + d. \tag{1.1}$$

Rozoberieme dve možnosti, keď $a = 1$ a $a = 2$. (Všimnite si, že z rovnice (1.1) sme mohli taktiež dostať odhad $a \leq 2$, lebo pravá strana je najviac $9 + 9 = 18$, teda $a \leq 18/9 = 2$, čím sme mohli nahradiť úvodnú úvahu.)

V prípade $a = 1$ máme $c + d = 9$. Za cifru c môžeme zvoliť ľubovoľnú hodnotu od 0 do 9 a cifru d vždy vieme jednoznačne dopočítať ako $d = 9 - c$, čo nám dáva 10 možností. Cifry a, c, d už máme určené, ale cifra b, ktorá vypadla z rovnice, môže byť stále ľubovoľná, takže pre každú z 10 možností máme 10 možností na cifru b. To je spolu 100 možností.

Keď $a = 2$, máme $c + d = 18$. To sa dá dosiahnuť jediným spôsobom, keď obe cifry c, d sú maximálne, $c = 9$, $d = 9$. Ostáva ľubovoľne zvoliť cifru b, teda máme 10 možností.

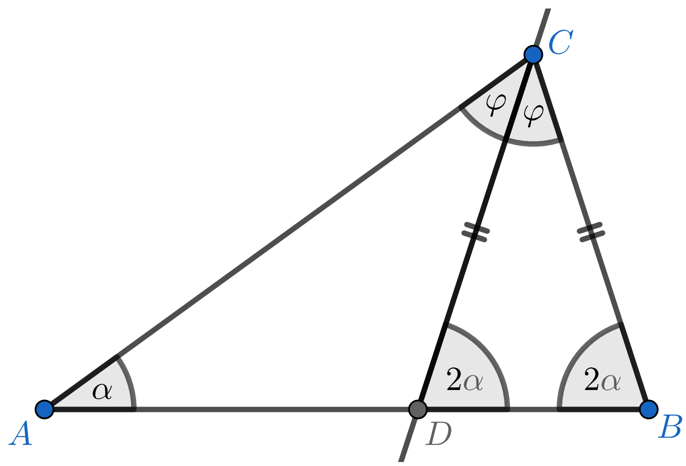
Dokopy existuje 110 štvorciferných čísel, ktoré spĺňajú podmienky zadania.

3.2 Klobúk Muchotrávky Skopnutej ($\kappa \leq 2$)

Zadanie. *Počas toho, ako sa vedúci sťažovali, sa Jožko prechádzal po okolí. Ako sa tak obzeral, zakopol o jednu zvláštnu hubu. Huba, o ktorú Jožko zakopol, mala klobúk v tvare trojuholníka. Nebol to ale obyčajný trojuholníkový klobúk.*

V rovine je daný trojuholník ABC. Pre jeho uhly platí $|\sphericalangle ABC| = 2 \cdot |\sphericalangle BAC|$. *Taktiež na jeho strane AB leží bod D taký, že* $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle BCD|$ *a navyše* $|CD| = |BC|$. *Určte veľkosť uhla* $\sphericalangle BAC$.

Riešenie. opravuje **Žaneta** (tomas.janeta@trojsten.sk)



Označme si uhol BAC ako α a uhol BCD ako φ.

Zo zadania vieme, že $|\sphericalangle ABC| = 2\alpha$. Keďže $|BC| = |CD|$, trojuholník BCD je rovnoramenný so základňou BD, a teda platí $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle BDC| = 2\alpha$. Keďže súčet uhlov v trojuholníku BCD je $180°$, musí platiť

$$2\alpha + 2\alpha + \varphi = 180^\circ,$$

$$4\alpha + \varphi = 180^\circ. \tag{2.1}$$

Tiež vieme $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle BCD| = \varphi$, odkiaľ

$$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ACD| + |\sphericalangle BCD| = 2\varphi.$$

Opäť, pretože súčet uhlov v trojuholníku ABC je $180°$, musí platiť

$$\alpha + 2\alpha + 2\varphi = 180^\circ,$$

$$3\alpha + 2\varphi = 180^\circ. \tag{2.2}$$

Rovnice (2.1) a (2.2) tvoria sústavu s neznámymi α, φ. Riešením tejto sústavy dostaneme $\alpha = \varphi = 36°$.

Odpoveď: veľkosť uhla BAC je 36 stupňov.

3.3 Kocky Marekových Snov ($\kappa \leq 3$)

Zadanie. *Po tom, čo vedúci premrhali polhodinu debatovaním o tom, ako by sa mala vybrať trasa výletu, sa rozhodli, že by sa mali všetci spoločne zhodnúť na najbližšom postupe. A tak sa spoločne rozhodli, že rozhodnutie nechajú na náhodu pri hode Marekovými vysnívanými kockami.*

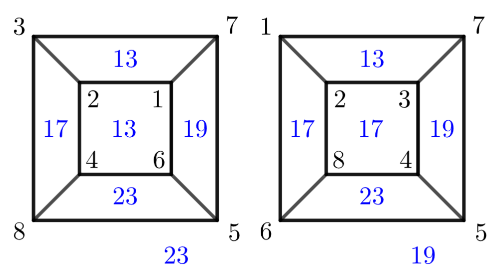
Každá Marekova vysnívaná kocka má vrcholy v nejakom poradí očíslované číslami od 1 po 8 (každé z nich je v práve jednom vrchole každej kocky). Na každej stene je napísaný súčet čísel vo vrcholoch tej steny. Marekove vysnívané kocky sú však iba tie, ktoré majú na všetkých stenách prvočísla a navyše počet rôznych prvočísel na stenách je najväčší možný (spomedzi tých kociek, ktoré majú na stenách len prvočísla). Nájdite všetky neusporiadané[1] šestice prvočísel, ktoré môžu byť na stenách Marekovej vysnívanej kocky.

Riešenie. opravuje **Števka** (stefania.glevitzka@trojsten.sk)

Vrcholy kocky máme očíslované len číslami do 8, z čoho ľahko vycítime, že prvočísla na stenách nemôžu byť veľmi veľké. Ako presne? Najväčšie číslo na stene kocky môže byť zjavne $8 + 7 + 6 + 5$, čo je 26, teda väčšie prvočísla uvažovať nepotrebujeme. Podobne sa môžeme pozrieť na dolné ohraničenie: najmenšie číslo na stene môže byť $1 + 2 + 3 + 4$, a teda 10. Čiže prvočísla, ktoré by sme teoreticky mohli dostať na Marekovej vysnívanej kocke, sú iba 11, 13, 17, 19 a 23.

Čo ďalej? Keď by ste sa chvíľu hrali a skúšali konštruovať Marekove kocky, možno by ste si všimli, že súčet čísel na protiľahlých stenách je vždy 36. Totiž, keď si vyberieme nejaké 2 protiľahlé steny kocky, tak každý vrchol kocky prislúcha práve jednej z nich. Takže keď pri jednej stene sčítavame nejaké 4 čísla spomedzi $1, 2, 3, \ldots 8$, tak pri tej protiľahlej sčítavame zvyšné štyri. Čiže súčet čísel na týchto protiľahlých stenách je rovný súčtu všetkých čísel pri vrcholoch kocky, čo je práve $\frac{8 \cdot 9}{2} = 36$. Máme $23 + 13 = 36$ a $19 + 17 = 36$, teda tieto dvojice prvočísel musia byť na kocke oproti sebe. Avšak $36 - 11 = 25$, čo nie je prvočíslo, a preto sa číslo 11 nemôže objaviť na Marekovej vysnívanej kocke.

O Marekovej vysnívanej kocke tiež vieme, že je na nej najviac rôznych prvočísel ako sa dá. Zatiaľ sme zistili, že najviac by ich mohlo byť 4 a možné neusporiadané šestice by boli $13, 23, 13, 23, 17, 19$ alebo $13, 23, 17, 19, 17, 19$ (keďže každú z dvojíc $13, 23$ a $17, 19$ chceme aspoň raz a potrebujeme spolu tri takéto dvojice). Nakoniec sa ukáže, že obe tieto šestice sa na Marekovej kocke dajú dosiahnuť, a to napríklad tak ako na obrázkoch nižšie.

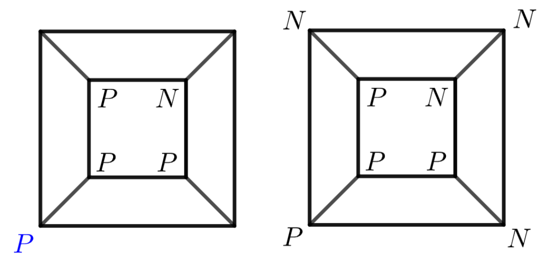


Ako si zjednodušiť hľadanie

Hľadanie vhodného rozloženia čísel do vrcholov si môžeme zjednodušiť nasledujúcou úvahou: Na každej strane kocky chceme mať nepárne číslo, čo môžeme dosiahnuť buď tak, že sčítame tri párne a jedno nepárne, alebo tri nepárne a jedno párne. Povedzme, že máme stenu, ktorej tri vrcholy majú párne číslo a jeden má nepárne. Tým ale dostaneme ďalšie dve steny s aspoň dvoma párnymi číslami vo vrcholoch, a teda musia mať vo vrcholoch práve tri párne čísla. Tri sme ale už použili a zostalo nám iba jedno, takže musí byť vo vrchole, ktorý majú tieto dve steny spoločný (obrázok vľavo). Zvyšné vrcholy tak majú nepárne čísla. Preto keď si kocku vhodne otočíme, dostaneme situáciu ako na obrázku vpravo. (Rovnaký výsledok by sme dostali aj keby sme začali stenou s troma vrcholmi

[1] Záleží iba na tom, ktoré číslo sa koľkokrát vyskytuje, a nie na konkrétnom rozložení čísel na kocke.

s nepárnym číslom.) Potom keď si rozložíme napríklad párne čísla, nemalo by byť ťažké doplniť tie nepárne, aby vyšlo čo potrebujeme.



3.4 Krátky Matiho Spor ($\kappa \leq 5$)

Zadanie. *Matimu sa ale nepáčilo, že osud výletu bol ponechaný na náhodu. Myslel si, že sa tak nemôžu pokryť všetky možnosti výberu cesty. Marek sa urazil, lebo jeho vysnívaná kocka má všetky odpovede na všetky možné otázky a začal Matimu dokazovať svoje tvrdenie.*

Dokážte aj vy Matimu, že pre každé kladné celé číslo existuje nejaký jeho celočíselný násobok, ktorý obsahuje (v desiatkovej sústave) každú cifru aspoň raz.

Riešenie. opravujú **Baška** (barbora.javorova@trojsten.sk) a **Baška** (barbora.novosadova@trojsten.sk)

Pre ľubovoľné celé číslo n by sme chceli vedieť nájsť nejaký jeho násobok, ktorý obsahuje všetky cifry od 0 do 9. Keď sa zamyslíme nad tým, ako vyzerajú násobky konkrétneho čísla, tak si môžeme uvedomiť, že cifry blízko ku koncu násobkov silne závisia od čísla n a nemáme veľmi veľkú voľnosť v dosiahnutí nejakej konkrétnej kombinácie, ktorú by sme chceli. Napríklad pre ľubovoľné číslo deliteľné 20 (napr. 37820) platí, že jeho posledná cifra bude vždy nula a predposledná párna.

Mohli by sme preto skúsiť ovplyvniť prvé cifry násobku. Skupina prvých cifier, ktorá by nám vyhovovala, je napríklad 1234567890, pretože už ona sama obsahuje každú cifru aspoň (práve) raz. Existuje však pre každé číslo násobok začínajúci 1234567890?

Odpoveď je kladná. Čím väčší si stanovíme počet cifier, tým viac násobkov s takým počtom cifier číslo má. Každé n-té číslo je násobkom n – ak si vezmeme ľubovoľných n po sebe idúcich čísel, niektoré z nich musí byť násobkom n. Stačí nám teda nájsť n po sebe idúcich čísel začínajúcich 1234567890 (rovnako by sme si mohli zvoliť iné poradie cifier).

To je už jednoduché. Ak má naše číslo n počet cifier d, tak medzi číslami

$$1234567890\underbrace{00\ldots0}_{d\text{-krát}} \text{ a } 1234567890\underbrace{99\ldots9}_{d\text{-krát}}$$

je určite nejaký násobok n. Týchto čísel je totiž $10^d = 1\underbrace{00\ldots0}_{d\text{-krát}}$, a keďže n má d cifier, je najviac $\underbrace{99\ldots9}_{d\text{-krát}}$, čo je menšie ako počet čísel.

Jedno z týchto $(10+d)$-ciferných čísel začínajúcich 1234567890 tak určite bude násobkom čísla n.

3.5 Komparovaním Mužov Súdim ($\kappa \leq 8$)

Zadanie. *Mati pochopil, že sa s Marekom nemôže porovnávať, a tak túto úlohu prenechal na Teri.*

Teri porovnáva Matiho a Mareka, ktorí si za svojich reprezentantov zvolili dve nezáporné reálne čísla x, y také, že $x + y = 2$. Dokážte, že

$$x^2y^2(x^2 + y^2) \leq 2.$$

Riešenie. opravuje **David** (david.belobrad@trojsten.sk)

Vzorové riešenie tejto úlohy si môžeš pozrieť aj ako video na našom YouTube kanáli `www.youtube.com/KorMatSem`.

Na začiatok si všimnime, že nejakým spôsobom by sme z rovnice $x + y = 2$ chceli dostať jednu premennú a tú dosadiť do nerovnice. Chceme to ale urobiť tak šikovne, aby sa nám tam aj čosi vykrátilo alebo sčítalo na nulu. Chceme teda skúsiť použiť nejaký vzorec na úpravu kvadratického výrazu, pričom členy veľmi rýchlo ubúdajú výrazu $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$. Vhodnou substitúciou sa teda javí

$$x = 1 + t,$$

$$y = 1 - t,$$

kde $t \in \langle -1; 1 \rangle$. Dosadením potom dostaneme

$$(1+t)^2 \cdot (1-t)^2 \cdot ((1+t)^2 + (1-t)^2) = (1-t^2)^2 \cdot (1 + 2t + t^2 + 1 - 2t + t^2) = (1-t^2) \cdot (1-t^2) \cdot (2 + 2t^2) =$$
$$= 2 \cdot (1-t^2) \cdot (1-t^2) \cdot (1+t^2) = 2 \cdot (1-t^2) \cdot (1-t^4).$$

Teraz si všimnime, že $t \in \langle -1; 1 \rangle$. To znamená, $0 \leq t^2 \leq 1, 0 \leq t^4 \leq 1$ (všimnime si, že vďaka párnej mocnine je znamienko irelevantné), teda že $0 \leq 1 - t^2 \leq 1, 0 \leq 1 - t^4 \leq 1$ a teda že $2 \cdot (1 - t^2) \cdot (1 - t^4) \leq 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$, čo sme aj chceli dokázať.

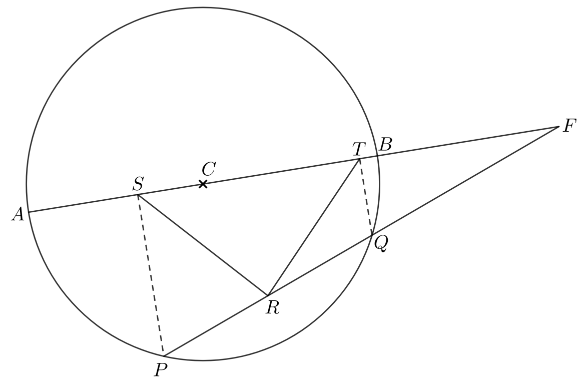
3.6 Kaja Môže Skartovať

Zadanie. *Kaju už ale nudí stáť na mieste. Začala teda tlačiť všetkých vedúcich smerom vybratým Marekovou vysnívanou kockou.*

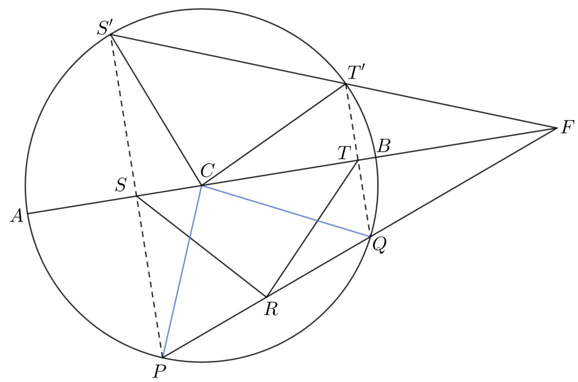
Kaja tlačila vedúcich po kružnici k s priemerom AB. Ďalej je na k daná tetiva PQ so stredom R. Nech S, T sú päty kolmíc na AB postupne z P, Q. Predpokladajme, že body R, S, T sú rôzne a neležia na jednej priamke. Dokážte, že trojuholník RST je rovnostranný práve vtedy, keď $2 \cdot |PQ| = |AB|$.

Riešenie. opravujú **Mati** (matus.zelko@trojsten.sk) a **Viki** (viktoria.pravdova@trojsten.sk)

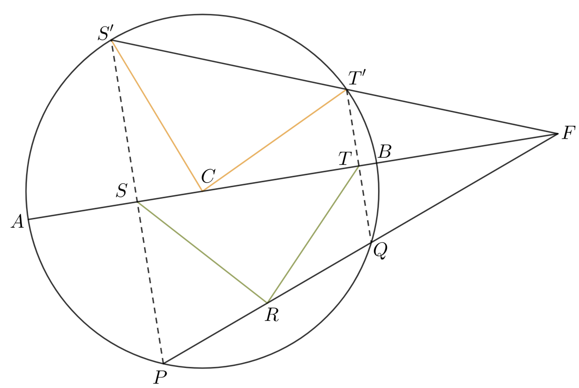
Najprv si nakreslíme obrázok podľa zadania. Mimo bodov, ktoré máme dané, si vyznačíme aj priesečník priamok AB a PQ, ktorý nazveme F. Prípad keď $AB \parallel PQ$, a teda bod F nevznikne, to poriešime nakoniec. Teraz sa pozrieme na obrázok a príde nám taký asymetrický.



Priestor má dve polroviny a my využívame iba jednu. Tak si povieme, že aj v tej druhej by sa hodilo niečo mať a celú úlohu zosymetríme podľa priamky AB. Možno to ešte neviete, no práve sme vyhrali.



Ak by sa nám podarilo ukázať, že $\triangle PCQ \sim \triangle SRT$, tak máme hotovo. Prečo? Úsečky CP a CQ sú polomermi kružnice k. $\triangle PCQ$ tak bude rovnostranný práve vtedy, keď $|PQ| = \frac{|AB|}{2} = r$, takže práve vtedy, keď chceme, aby bol rovnostranný aj $\triangle SRT$. Poďme teda ukázať ich podobnosť. Najprv $\triangle PCQ$ a $\triangle S'CT'$, sú podobné, lebo sú iba obrazmi v osovej symetrii. Stačí nám teda, aby $\triangle S'CT' \sim \triangle SRT$.



Tu sa nám začína črtať špirálna podobnosť so stredom v F (tak sa tomu vznešene hovorí). Všimnime si, že uhol $|\angle AFS'| = |\angle PFS|$, znovu ide len o osovú symetriu. Potom, keď otočíme uhol $\angle AFS'$, na $\angle PFA$, tak body S' a T'

nám pristanú na priamke AB a bod C na priamke PQ. Nakoniec ešte nájdime koeficient podobnosti pri ktorom sa T' zobrazí na T. To je iba $k = \frac{|TF|}{|T'F|}$. Vieme, že $\triangle SFS' \sim \triangle TFT'$ podľa vety uu. Totiž, zdieľajú uhol pri bode F a ďalej uhly pri vrcholoch S, T sú očividne pravé. Potom máme z pomerov dĺžok $\frac{|SF|}{|S'F|} = \frac{|TF|}{|T'F|} = k$. To ale znamená, že špirálnou podobnosťou s otočením o uhol $\sphericalangle AFS'$ a koeficientom podobnosti k sa nám aj S' zobrazí na S.

Ďalej si uvedomme, že $\triangle SRT$ je rovnoramenný. Totiž, Keďže R je stredom PQ, os strany ST je zároveň aj strednou priečkou lichobežníka $PQTS$ obsahujúcou bod R, a teda R leží na osi úsečky ST.

Nakoniec by nás mohlo zaujímať, či sa C zobrazí na R, no to tak určite bude, keďže oba trojuholníky sú rovnoramenné so základňou $S'T'$, resp. ST a posledným vrcholom na priamke ST, resp. PQ, čo sú ramená uhla otočenia.

Práve sa nám podarilo ukázať, že $\triangle PCQ \sim \triangle SRT$, avšak $\triangle PCQ$ je rovnostranný práve vtedy keď tetiva PQ, má dĺžku $\frac{|AB|}{2} = r$.

Ostáva nám ešte poriešiť prípad, keď $AB \parallel PQ$. Vtedy sú však $\triangle PCQ$ a $\triangle SRT$ dokonca zhodné, lebo $|RT| = |CQ|$ vyplýva z toho, že ide o uhlopriečky obdĺžnika $RQTC$. Podobne dostávame aj $|SR| = |PC|$ a $|ST| = |PQ|$, keďže v tomto prípade je $PQTS$ obdĺžnikom, a teda záver ostáva v platnosti.

3.7 Konáre Metodicky Spraceme

Zadanie. *Kým Kaja tlačila väčšinu vedúcich po kružnici, Mati a Viktor zatiaľ hádzali kamene a konáre do jazierka a pritom sa hrali takúto hru.*

Na zemi sú nakreslené dve tabuľky s rozmermi $n \times n$ – jedna je Viktorova, druhá Matiho. Na každom políčku je buď kameň alebo konár, a tie sú na začiatku v oboch tabuľkách rozmiestnené rovnako. Mati a Viktor chcú všetky políčka vyprázdniť, ale majú na to rôznu metodiku. Mati vo svojej tabuľke robí iba ťahy, kde v každom vezme riadok s presne jedným políčkom, na ktorom je konár, označme ho P, a vyprázdni všetky políčka v stĺpci obsahujúcom políčko P. Naopak Viktor si vo svojej tabuľke v jednom ťahu vyberie stĺpec s presne jedným políčkom, na ktorom je konár, označme ho Q, a vyprázdni všetky políčka v riadku obsahujúcom políčko Q.

Dokážte, že ak bola Viktorova a Matiho tabuľka na začiatku vyplnená rovnako, tak Mati vie svojou procedúrou vyprázdniť všetky políčka práve vtedy, keď to dokáže Viktor.

Riešenie. opravuje **Jožtek** (jozef.rajnik@trojsten.sk)

Najprv si vysvetlime, čo znamená spojenie „práve vtedy, keď“, pre prípad, že ste ešte nič s týmto spojením nedokazovali. Znamená to, že ak dostaneme nejakú tabuľku, tak buď ju vedia vyprázdniť Mati aj Viktor, alebo ani jeden z nich. Tvrdenie takéhoto typu (tiež nazývané *ekvivalencia*) sa skladá z dvoch nasledovných tvrdení (*implikácií*): „Ak tabuľku vie vyprázdniť Mati, tak to vie aj Viktor“ a „Ak tabuľku vie vyprázdniť Viktor, tak to vie aj Mati“. Poriadny dôkaz takéhoto tvrdenia by mal obsahovať dôkazy týchto jednotlivých implikácií. Preto najprv budeme predpokladať, že Mati vie vybrázdniť tabuľku a dokážeme, že ju potom vie vyprázdniť aj Viktor. Bystrý čitateľ už isto tuší, že druhú implikáciu dokážeme vďaka symetrii rovnako.

Matiho ťahy budeme skrátene opisovať ako „*Mati si vyberie políčko P*“. Tým myslíme, že Mati vyprázdni stĺpec s políčkom P. Aby mohol takýto ťah spraviť, tak políčko P musí byť jediné s konárom vo svojom riadku.

Uvažujme teda nejakú tabuľku $n \times n$ a predpokladajme, že Mati ju vie vyprázdniť. Keďže každým ťahom Mati vyprázdni jeden stĺpec, musí celkovo spraviť n ťahov. Políčka, ktoré si Mati postupne vyberá, si označíme M_1, M_2, …, M_n. Ako môžu byť tieto políčka rozmiestnené v tabuľke? Keďže každý stĺpec Mati vyprázdni práve raz, tak políčka $M_1, M_2, \ldots, M_n$ musia byť v navzájom rôznych stĺpcoch. Taktiež musia byť aj v navzájom rôznych riadkoch:

ak by nejaké dve políčka M_i a M_j ($i \neq j$) boli v rovnakom riadku, tak by Mati nevedel vybrať žiadne z nich – ich spoločný riadok totiž obsahuje aspoň dva konáre.

Ukázali sme tak, že Mati si vyberá políčka $M_1, M_2, \ldots, M_n$ v navzájom rôznych riadkoch aj stĺpcoch. Aby takéto ťahy vedel robiť, tak v tabuľke musí byť celkom dosť kameňov. Skúsme teda o nich zistiť viac. Pri tom, ale aj pri následnom spísaní riešenia, nám vie dosť pomôcť, keď si tabuľku upraceme do pekného tvaru. Vymenenie dvoch riadkov nám neovplyvní to, či Mati alebo Viktor vedia tabuľku vyprázdniť. Rovnako ani výmena stĺpcov nám to neovplyvní. Preto si môžeme riadky aj stĺpce uvažovanej tabuľky preusporiadať tak, že políčka $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sa budú v tomto poradí nachádzať na uhlopriečke, teda aby políčko M_i bolo v i-tom riadku a i-tom stĺpci.

Čo teda vieme povedať o zvyšku tabuľky? Prvý riadok okrem políčka M_1 musí byť zaplnený kameňmi, aby mohol Mati vybrať políčko M_1 v prvom ťahu. Napravo od políčka M_2 (v druhom riadku) musia byť tiež samé kamene. Naľavo od M_2, teda prvé políčko druhého riadku, môže byť hocijaký predmet, keďže ho Mati v prvom kole odstráni. Všeobecne povedané, napravo od políčka $M_k = (k, k)$ musia byť samé kamene, keďže tieto políčka ešte neboli vyprázdnené a v Matiho k-tom ťahu musí byť políčko M_k jediné s konárom v k-tom riadku.

Takto sme ukázali, že napravo od uhlopriečky s políčkami $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sú iba kamene. To ale znamená, že Viktor môže políčka vyprázdňovať v opačnom poradí $M_n, M_{n-1}, \ldots, M_2, M_1$. Teda Viktor vo svojom k-tom ťahu zvolí políčko M_{n-k+1}. Viktor naozaj môže políčko M_{n-k+1} vybrať, keďže nad ním sa nachádzajú iba kamene a všetky políčka pod ním sú prázdne, keďže ich riadky vyprázdnené v predošlých kolách.

Takto sme ukázali, že ak vie tabuľku vyprázdniť Mati, tak ju vie vyprázdniť aj Viktor. V podstate sme dali Viktorovi návod, že vie od Matiho „opisovať" jeho ťahy, akurát ich musí robiť od konca. Z analogických dôvodov platí, že ak vie tabuľku vyprázdniť Viktor, tak ju vie aj Mati. Presnejšie, tabuľku otočíme o 90 stupňov. Tým je naše riešenie dokončené.

3.8 Kedy Mám Strašiť

Zadanie. *Jožko sa odpojil od vedúcich, ktorých tlačila Kaja po kružnici a rozhodol sa ich vystrašiť na začiatku ich najbližšieho okruhu. Má však veľmi prísne pravidlá pre strašenie vedúcich.*

Jožko je ochotný vystrašiť vedúcich v okruhu s číslom $k \in \mathbb{N}$ len vtedy, ak pre každé nepárne prirodzené číslo $n > 100$ platí $k \mid 20^n + 22^n$. Nájdite všetky také prirodzené čísla k.

Riešenie. opravuje **Mišo M.** (michal.molnar@trojsten.sk)

Prvé pozorovanie, ktoré môžeme spraviť, je, že sčítame dve párne čísla, takže výsledok musí byť párny. Vieme zájsť dokonca ďalej. Keďže $n \geq 101$, oba sčítance sú násobkami 2^{101}, takže aj ich súčet bude. Môžeme si tiež všimnúť, že vyššie mocniny dvoch už nevyhovujú. Pre $n = 101$ totiž dostaneme $2^{101} \cdot (10^{101} + 11^{101})$, pričom číslo v zátvorke bude nepárne. O dvojkách v rozklade $20^n + 22^n$ už vieme, čo potrebujeme, je teda na čase pozrieť sa aj na iné prvočísla.

Lenže ako na to? Zadanie poskytuje vcelku zaujímavú nápovedu v tom, že $2 \nmid n$. Pre nepárne n vieme totiž súčet $a^n + b^n$ vždy rozložiť ako

$$a^n + b^n = (a + b) \cdot (a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

V našom prípade $a = 20$, $b = 22$. Teda, bez ohľadu na veľkosť n, vieme daný výraz vydeliť 42, čím v prvočíselnom rozklade nájdeme aj 3 a 7. Otázkou zostáva, čím môže byť deliteľná tá druhá zátvorka.

Označme s_n hodnotu v zátvorke pre nepárne n, t. j.

$$s_n = 20^{n-1} - 20^{n-2} \cdot 22 + 20^{n-3} \cdot 22^2 - \cdots - 20 \cdot 22^{n-2} + 22^{n-1}.$$

Skúmať deliteľov takéhoto výrazu nie je úplne praktické. Nám však stačia delitelia, ktorí sú spoloční pre každé nepárne $n > 100$. Využijeme teda, ako ľahko vieme pomocou nejakého s_n dostať iný výraz tohoto typu. Prvé, čo sa nám núka, je fakt, že

$$s_{n+2} = 20^2 \cdot s_n - 20 \cdot 22^n + 22^{n+1}.$$

Ak teda niečo delí s_n aj s_{n+2}, nutne to delí aj $-20 \cdot 22^n + 22^{n+1} = 2 \cdot 22^n$. Keď si s_{n+2} vyjadríme ako $20^{n+1} - 20^n \cdot 22 + 22^2 \cdot s_n$, rovnakou úvahou zistíme, že hľadáme deliteľa $-2 \cdot 20^n$. Môžeme si všimnúť, že tieto dve čísla majú v prvočíselnom rozklade spoločnú len dvojku (11 nedelí 20^n, 5 nedelí 22^n). Iné prvočíslo teda nemôže deliť všetky s_n a nového deliteľa nenájdeme.

Ostáva nám už len určiť všetky k. Vieme, že všetky prípustné hodnoty $20^n + 22^n$ sú deliteľné 2^{101}, 3, 7 (a žiadnym iným prvočíslom, ani väčšou mocninou 2, 3, 7). Vhodné k teda budú deliteľmi $2^{101} \cdot 3 \cdot 7$, teda čísla tvaru $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$, kde $a \in \{0, 1, \dots, 101\}$, $b \in \{0, 1\}$, $c \in \{0, 1\}$.

3.9 Keď Mizne Slnko

Zadanie. *Po takom kvalitnom vystrašení sa vedúci rozhodli vrátiť naspäť na chatu, lebo už sa začalo stmievať. Čakala na nich ale jedna veľká nerovnosť na ceste. Nerovnosť na ceste bola veľmi špecifická.*

Kladné reálne čísla x_1 až x_n spĺňajú $x_1 x_2 \dots x_n = 1$. Dokážte, že

$$\{x_1\} + \{x_2\} + \cdots + \{x_n\} < \frac{2n-1}{2},$$

kde $\{x\}$ značí desatinnú časť čísla x.

Riešenie. opravuje **Pedro** (peter.sukenik@trojsten.sk)

V tomto riešení budeme postupovať sporom. Predpokladajme teda, že existuje postupnosť kladných reálnych čísel x_1 až x_n s vlastnosťou $x_1 x_2 \dots x_n = 1$ taká, že $\{x_1\} + \{x_2\} + \cdots + \{x_n\} \geq n - 0.5$. Našim cieľom bude nájsť alternatívnu postupnosť $y_1, \dots, y_n$ takú, že $y_1 y_2 \dots y_n = 1$, $\{x_1\} + \{x_2\} + \cdots + \{x_n\} \leq \{y_1\} + \{y_2\} + \cdots + \{y_n\}$, a predsa budeme vedieť dokázať, že $\{y_1\} + \{y_2\} + \cdots + \{y_n\} < n - 0.5$. To bude, samozrejme, spor. V rámci riešenia budeme robiť dynamické zmeny v postupnosti $x_1, \dots, x_n$, ale vždy budeme pod x-ami označovať našu najnovšie zmenenú postupnosť. Každá zmena, ktorú v našej postupnosti spravíme, bude zvyšovať aktuálny súčet $\{x_1\} + \{x_2\} + \cdots + \{x_n\}$, zachovávajúc pritom rovnosť $x_1 x_2 \dots x_n = 1$ a zároveň bude našu postupnosť x-ov zjednodušovať. Takto si zaručíme, že finálna postupnosť bude mať aspoň taký súčet desatinných častí ako pôvodná a zároveň o nej budeme vedieť ukázať dokazované tvrdenie.

Prvá výhoda (nie, že by sme ju nejak nutne potrebovali, ale bude sa argumentovať jednoduchšie), ktorú máme z nášho sporného predpokladu je, že všetky čísla musia mať desatinnú časť ostro väčšiu ako 0.5, ináč by táto postupnosť rovno jasne porušovala dokazovanú vlastnosť. Prvá zmena, ktorú spáchame na našej postupnosti je, že sa zbavíme všetkých čísel väčších rovných 2. Vezmime si ľubovoľné takéto číslo a prepíšme jeho celú časť z toho, čo je, na 1. Týmto zjavne nezmeníme súčet desatinných častí, ale znížime súčin. Teraz vezmime čísla < 1 a postupne ich zväčšujme tak, aby boli stále ostro menšie ako 1, ale aby vyrovnali súčin $x_1 x_2 \dots x_n$ späť na 1.

V prvom rade, toto rozhodne môžeme spraviť, lebo určite máme aspoň jedno číslo ostro väčšie ako jeden a kým také máme, tak musíme mať aj čísla menšie ako 1 (súčin je aktuálne nanajvýš 1). Akonáhle dorovnáme súčin, pokračujeme týmto krokom až kým sa nezbavíme všetkých čísel ≥ 2.

Teraz si zafixujme ľubovoľné číslo > 1 a nazvime si ho b. Toto číslo zároveň vieme napísať ako $1 + c$, kde vieme, že $0.5 < c < 1$. Okrem toho si zafixujme najmenšie existujúce číslo (< 1) a nazvime si ho a. V najbližších krokoch vezmeme všetky ostatné čísla < 1 okrem a a urobíme nasledujúcu zmenu: vezmeme si dané číslo, nech je to d, a vymeníme ho za číslo $1 - \varepsilon$, kde ε je nejaké veľmi veľmi malé číslo[2]. Ako veľmi malé toto číslo musí byť zistíme neskôr, ale zatiaľ nech je tak malé, že platí $\varepsilon < 1 - \{x_i\}$ pre všetky indexy i. Toto nám zaručí, že akékoľvek d budeme meniť za $1 - \varepsilon$, zväčšíme ho. Hneď po tejto operácií vezmeme a a zmenšíme ho tak, aby sme celkový súčin všetkých čísel dostali späť na 1. Kľúčové je, že touto operáciou sa zvýši súčet desatinných častí. Prečo? V prvom rade – kladné čísla menšie ako jeden sú rovné svojej desatinnej časti. V druhom rade, nech platí pre kladné u, v, že $ad = (a - u)(d + v)$. Potom očividne

$$u = \frac{av}{d + v} < v.$$

Teda a musíme na zachovanie súčinu znížiť o menej, ako d zvýšiť.

Nech sme takto zmenili všetky čísla < 1 okrem a na $1 - \varepsilon$. Teraz si uvedomme, že očividne b vlastne môže byť jediné číslo > 1. Ak by sme mali totiž ešte jedno ďalšie (a my vieme že to číslo musí dokonca byť > 1.5), potom očividne po voľbe dostatočne malého ε je vidno, že $a < 0.5$, aby platilo $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$. To by však bol spor.

Máme teda $n - 2$ (áno, toto pokojne môže byť aj 0 ak $n = 2$) čísel rovných presne $1 - \varepsilon$ a potom máme a a $b = 1 + c$. Teraz už nám stačí iba ukázať, že po voľbe dostatočne malého ε vieme dokázať požadované tvrdenie. Vieme, že

$$ab = \frac{1}{(1 - \varepsilon)^{n-2}} := 1 + \delta.$$

Vidíme, že $\delta \geq 0$. Zároveň, ak $\delta > 0$, potom vieme zvoliť ε tak, aby δ bolo tak malé, ako len potrebujeme. Ako malé ho potrebujeme? Chceme v podstate dokázať $a + b = a + 1 + c < 1 + 1.5$ (takto už samotné a, b porušia našu nerovnosť a ostatné členy $1 - \varepsilon$ to nemôžu vykompenzovať). Spravme substitúciu $a = \frac{1+\delta}{b} = \frac{1+\delta}{1+c}$ a prenásobme $1 + c$. Po ekvivalentných úpravách dostaneme

$$\delta < 0.5 + 0.5c - c^2 = -(c - 1)(c + 0.5).$$

Táto funkcia dosahuje kladné hodnoty pre $-0.5 < c < 1$, čo vieme, že c spĺňa. Preto pre ľubovoľné takéto c, vieme si my zvoliť δ ako jednoducho kladné číslo ešte menšie ako $-(c - 1)(c + 0.5)$ a na základe toho potom aj ε. Ukázali sme týmto, že $\{x_1\} + \{x_2\} + \cdots + \{x_n\} < n - 0.5$, čo je spor s pôvodným predpokladom o pôvodnej spornej postupnosti.

3.10 Karty Miesto Stravy

Zadanie. *Keď sa vedúci KMSka konečne vrátili na chatu, už sa im nechcelo variť. Namiesto toho si zahrali hru OhNoStroje. Lukáš a Teri si občas čítajú myšlienky, čím v hre OhNoStroje občasne vynikajú. V tento večer sa rozhodli staviť na svoje šťastie a vyzvali Jožka na súboj. Balíček kariet hry OhNoStroje pozostáva z* 50 *kariet. Každá karta je*

[2] Uvažovať nejaké veľmi malé ε je veľmi bežné v dôkazoch mnohých vysokoškolských matematických tvrdení a mnohí prváci na matfyze majú preto o ε nočné mory.

jednej z piatich farieb (červená, žltá, zelená, modrá alebo biela) a má celočíselnú hodnotu od 1 do 5. Z každej farby je v balíčku 10 kariet: 3 jednotky, 2 dvojky, 2 trojky, 2 štvorky a 1 päťka. Farba a číslo sa nachádzajú na lícovej strane karty. Všetky karty majú rovnakú rubovú stranu.

Na začiatku Jožko vyberie z balíku 4 karty (podľa svojej voľby) a dá ich Lukášovi do ruky tak, aby Lukáš videl z nich len rubovú stranu a aby Teri videla lícovú stranu (zoradenie Lukášových kariet si tiež zvolí Jožko). Potom Jožko napíše na papier jednu z kariet, ktoré dal Lukášovi, a papier ukáže Teri tak, aby ho Lukáš nevidel. Následne Teri dá Lukášovi nápovedu o jeho kartách nasledovne: vyberie si buď hodnotu alebo farbu, ***povie ju Lukášovi*** *a ukáže na všetky jeho karty vybranej hodnoty alebo farby. Teri pri tom musí ukázať na aspoň jednu kartu. Na záver Lukáš vyberie jednu kartu z ruky a vyloží ju pred seba.*

Pokiaľ Lukáš vyloží kartu, ktorá bola napísaná na papieri, tak Teri s Lukášom vyhrávajú. V opačnom prípade vyhráva Jožko. V prípade, že má Lukáš na ruke dve alebo tri totožné karty (teda s rovnakou farbou aj hodnotou), môže vyložiť ľubovoľnú z nich. Rozhodnite, či si Teri s Lukášom vie dohodnúť stratégiu, ktorá im zaručí výhru nad Jožkom.

Riešenie. opravuje **Lukáš** (lukas.gaborik@trojsten.sk)

Označme si pozície kariet na Lukášovej ruke z Lukášovho pohľadu zľava doprava indexami 1 až 4. Teda, keď povieme, že Lukáš zahral kartu na pozícii 2, myslíme tým, že zahral druhú zľava.

Ukážeme, že Lukáš s Teri nemajú proti Jožkovi žiadnu šancu. Pôjdeme na to sporom. Budeme teda predpokladať, že Lukáš s Teri majú víťaznú stratégiu, ktorá im umožní vyhrať bez ohľadu na to, aké karty dá Jožko Lukášovi na ruku a taktiež bez ohľadu na to, akú kartu napíše na papier pre Teri.

Nech má Lukáš na ruke zľava doprava postupne červenú jednotku, červenú dvojku, žltú jednotku a žltú dvojku (ďalej to budeme značiť symbolicky ako Č1 | Č2 | Ž1 | Ž2). V takom prípade mu Teri môže dať štyri rôzne nápovede[3]:

- na indexoch 1, 2 máš červenú kartu
- na indexoch 3, 4 máš zelenú kartu
- na indexoch 1, 3 máš jednotky
- na indexoch 2, 4 máš dvojky

Nápovede budeme odteraz značiť symbolicky ako $(\text{Č}, 12)$, $(\text{Ž}, 34)$, $(1, 13)$, $(2, 24)$. Keďže pre spor predpokladáme, že Lukáš s Teri majú víťaznú stratégiu, musí Lukáš vedieť vyložiť ktorúkoľvek z kariet (keďže všetky štyri sú rôzne). Keďže mu však Teri vie dať iba štyri nápovede, každou z nich musí cieliť na iný index karty, ktorú vyložiť.

Nech teda i_1 označuje index karty, ktorú má Lukáš vyložiť po nápovede $(\text{Č}, 12)$. Toto budeme odteraz symbolicky značiť $(\text{Č}, 12) \Rightarrow i_1$. Analogicky si označme $(\text{Ž}, 34) \Rightarrow i_2$, $(1, 13) \Rightarrow i_3$ a $(2, 24) \Rightarrow i_4$. Aby išlo o víťaznú stratégiu, očividne musí platiť $\{i_1, i_2, i_3, i_4\} = \{1, 2, 3, 4\}$, a teda indexy i_1 až i_4 musia byť po dvoch rôzne.

Predpokladajme teraz, že Lukáš má na ruke Č1 | Č2 | Z1 | Z2. Teri mu vie dať nápovede $(\text{Č}, 12)$, $(\text{Z}, 34)$, $(1, 13)$, $(2, 24)$. My už však vieme, že pri troch z nich už Lukáš vie, čo vykladať – konkrétne $(\text{Č}, 12) \Rightarrow i_1$, $(1, 13) \Rightarrow i_3$ a $(2, 24) \Rightarrow i_4$. Lukáš však musí vedieť vyložiť aj kartu na indexe i_2, a preto nutne $(\text{Z}, 34) \Rightarrow i_2$. Nie je náročné si domyslieť, že podobne ukážeme aj $(\text{M}, 34) \Rightarrow i_2$, $(\text{B}, 34) \Rightarrow i_2$ a $(\text{Z}, 12) \Rightarrow i_1$, $(\text{M}, 12) \Rightarrow i_1$, $(\text{B}, 12) \Rightarrow i_1$.

[3] Ak vám to znie divne, vedzte, že nápoveda je čechizmus a správne slovenské slovo je nápoveď (ktoré má mimo iného rovnaký koreň slova ako slová odpoveď, spoveď, predpoveď, výpoveď, … .

Začína sa to javiť, že (farba, 34) $\overset{?}{\Rightarrow} i_2$ platí bez ohľadu na to, na akú farbu ukážeme. Už to aj skoro máme ukázané, ešte by sme potrebovali (Č, 34) $\overset{?}{\Rightarrow} i_2$. To sa však dá ľahko nahliadnuť z kariet Z1 | Z2 | Č1 | Č2. Máme teda, že (farba, 34) $\Rightarrow i_2$ bez ohľadu na farbu a analogicky vieme ukázať aj (farba, 12) $\Rightarrow i_1$, (číslo, 13) $\Rightarrow i_3$ a (číslo, 24) $\Rightarrow i_4$.

Toto však ešte vieme rozšíriť. Totiž, pri ruke $f_1 1 \mid f_2 2 \mid f_2 1 \mid f_1 2$ pre farby $f_1 \neq f_2$ vidíme, že $(1, 13) \Rightarrow i_3$, $(2, 24) \Rightarrow i_4$, a teda $(f_1, 14)$, $(f_2, 23)$ musia v nejakom poradí napovedať pozície i_1, i_2. Potom ale z ruky $f_1 1 \mid f_2 1 \mid f_2 2 \mid f_1 2$ vidíme, že keďže $(f_1, 14)$, $(f_2, 23)$ napovedajú v nejakom poradí i_1, i_2, tak nápovede $(1, 12)$, $(2, 34)$ musia v nejakom poradí napovedať i_3, i_4. Nakoniec sa ešte pozrime na ruku $f_1 1 \mid f_2 1 \mid f_1 2 \mid f_2 2$. Nápovede $(1, 12)$, $(2, 34)$ v nejakom poradí napovedajú i_3, i_4, čo ale znamená, že $(f_1, 13)$, $(f_2, 24)$ musia v nejakom poradí napovedať i_1, i_2. Všimnime si, že nech dávame farebnú nápoveď na dve karty na akýchkoľvek pozíciách, vždy napovedá na kartu buď na pozícii i_1 alebo na pozícii i_2. Symbolicky, (farba, dve karty) $\Rightarrow i_1/i_2$. Analogicky vieme ukázať, že (číslo, dve karty) $\Rightarrow i_3/i_4$.

V tomto momente by nám už intuícia mohla začať hovoriť, že víťazná stratégia existovať nebude. Totiž, ukázali sme, že keď Teri ukáže na dve karty, tak nezáleží, akú farbu (ak povie farbu), resp. číslo (ak povie číslo) k nim povie – tým pádom by akákoľvek víťazná stratégia bola dosť oklieštená.

Pozrime si teraz ruku, kde na pozíciách i_1, i_2 sú karty $F1$ a na pozíciách i_3, i_4 sú karty $F2$ pre farbu F. Už vieme, že $(1, i_1 i_2)$, $(2, i_3 i_4)$ napovedajú v nejakom poradí karty na pozíciách i_3, i_4. Znamená to, že obe číselné nápovede napovedajú kartu $F2$. Lukáš však musí vedieť zahrať aj kartu $F1$, čiže nápoveď $(F, 1234)$ musí napovedať niektorú z pozícii i_1, i_2. Analogicky vieme ukázať, že (číslo $\neq 5$, 1234) $\Rightarrow i_3/i_4$[4].

Označme j pozíciu, ktorú napovedá nápoveď (Č, 1234). Vieme, že $j = i_1$ alebo $j = i_2$. Označme ďalej druhú z týchto pozícii j'.

Nech teraz máme ruku, kde na pozíciách j, i_3, i_4 je karta Č1 a na pozícii j' zas karta Č2. Vieme, že (Č, 1234) $\Rightarrow j$. Potom ale aspoň jedna z nápovedí $(1, j i_3 i_4)$, $(2, j')$ napovedá pozíciu j'.

Zoberme ďalej ruku, kde na j, i_4 je karta Č1, na j' je karta Z2 a na i_3 je karta Z1. Vieme, že (Č, $j i_4$) $\Rightarrow j/j'$, (Z, $j' i_3$) $\Rightarrow j/j'$ a aspoň jedna z nápovedí $(1, j i_3 i_4)$, $(2, j')$ napovedá pozíciu j'. Keďže ale Lukáš musí byť schopný zahrať aj Z1 na i_3, musí ju napovedať druhá z tých nápovedí – a teda $(1, j i_3 i_4)$, $(2, j')$ napovedajú v nejakom poradí pozície j', i_3.

Nakoniec už vyskúšajme iba takú ruku, kde vymeníme Č1 so Z1 – a teda Č1 je na j, i_3, Z1 na i_4 a Z2 na j'. Vieme, že (Č, $j i_3$) $\Rightarrow j/j'$, (Z, $j' i_4$) $\Rightarrow j/j'$ a nápovede $(1, j i_3 i_4)$, $(2, j')$ napovedajú v nejakom poradí pozície j', i_3. Všimnime si, že Teri nevie Lukášovi napovedať pozíciu i_4, a teda Lukáš nie je schopný z tejto ruky zahrať kartu Z1. To je však očividne spor s tým, že Lukáš a Teri majú víťaznú stratégiu.

Zaujímavosť na záver

Hra OhNoStroje nie je tak úplne vymyslená. Totiž, rovnaký balíček kariet má aj kooperatívna hra Hanabi, v ktorej je cieľom tímu korektne vyložiť čo najviac farebných ohňostrojov. Ak teda hľadáte tip na vianočný darček, tu jeden máte.

[4] Totiž, pre číslo = 5 nemáme v balíčku dve päťky rovnakej farby, a teda by sme takú ruku zostaviť nevedeli.