Riešenia 1. kola letnej časti

1.1 Kika Menežuje Stoky ($\kappa \leq 1$)

Zadanie. *Kika bola farmárka, ktorá žila blízko malej vodnej nádrže na svojom pozemku. Mala tri rúry, ktoré mohla použiť na naplnenie vodnej nádrže: Hornú rúru, Dolu rúru a Strednú rúru. Kika si všimla, že každá rúra má konštantný prietok, ktorý nie je ovplyvnený prietokom v ostatných rúrach. Jedného dňa sa Kika rozhodla naplniť prázdnu vodnú nádrž. Vedela, že naplnenie vodnej nádrže Dolnou a Hornou rúrou by trvalo* 3 *dni, použitím Hornej a Strednej rúry* 4 *dni a pomocou Dolnej a Strednej rúry by to trvalo až* 6 *dní.*

Ako dlho bude Kike trvať naplniť celú vodnú nádrž, ak použije Dolnú, Strednú a Hornú rúru naraz?

Riešenie. opravujú **Adri** (adri@ksp.sk) a **David** (david.belobrad@trojsten.sk)

Označme si objem nádrže ako V. Potom čas, za ktorý sa nádrž naplní, môžeme vypočítať ako podiel objemu a prietoku. V prípade dolnej (D) a hornej (H) rúry teda bude celkový prietok súčtom prietokov jednotlivých rúr. Vo výsledku tak dostaneme

$$\frac{V}{D+H} = 3\,\text{dni}.$$

Obdobné rovnice dostaneme aj pre hornú a strednú (S) a aj dolnú a strednú rúru:

$$\frac{V}{S+H} = 4\,\text{dni}, \qquad \frac{V}{D+S} = 6\,\text{dní}.$$

Upravme si teraz rovnice vyššie, nech zistíme trochu viac. Konkrétne z prvej vieme dostať, že dolná a horná rúra naplnia za 1 deň $\frac{V}{3}$ (prenásobili sme rovnicu $D+H$ a predelili 3). Obdobne zo zvyšných rovníc zistíme, že S a H za deň naplnia $\frac{V}{4}$ a S a D za deň naplnia $\frac{V}{6}$. Sčítaním upravených rovníc dostaneme, že dvojnásobok súčtu všetkých prietokov za deň naplní $\frac{3V}{4}$. Teda ak použijeme všetky rúry naraz, za deň naplníme $\frac{3V}{8}$. Potom ale počet dní, ktoré bude treba na naplnenie celej nádrže, bude podiel objemu a denného prietoku, teda $\frac{8}{3}$. Ešte by bolo dobré spraviť skúšku správnosti (keďže sčítanie rovníc nie je ekvivalentná úprava), ale vzhľadom k tomu, že úloha musí mať zo svojej povahy jednoznačne určený výsledok a my sme sa dostali k jedinému výsledku, je tento výsledok správny.

1.2 Kúzelník Miloš Šťastný ($\kappa \leq 2$)

Zadanie. *Miloš bol veľkým fanúšikom kúziel a vždy hľadal spôsoby, ako sa ich naučiť viac. Kedysi dávno počul o veľmi silnom kúzle, v ktorom sa vyskytovali čísla, ktoré ale dlho nevedel nájsť.*

Kúzelník Miloš bol šťastný, pretože po dlhých rokoch hľadania konečne našiel všetky prirodzené čísla N, ktoré sa v desiatkovej sústave skladajú presne z 1112 *cifier a spĺňajú všetky tieto podmienky:*

- *súčet všetkých cifier čísla N je deliteľný* 2000*;*
- *súčet všetkých cifier čísla $N+1$ je tiež deliteľný* 2000*;*

- *číslo N obsahuje cifru* 1.

Určte všetky čísla, ktoré kúzelník Miloš našiel.

Riešenie. opravuje **BaškaJ** (barbora.javorova@trojsten.sk)

Začnime tým, že sa pozrieme na to, ako sa zmení ciferný súčet, keď k číslu pripočítame 1. Najjednoduchší prípad nastane, keď číslo končilo niektorou z cifier od 0 po 8. Táto cifra sa zvýši o jedna a ostatné cifry zostanú nezmenené. Nový ciferný súčet teda bude o 1 väčší.

Predstavme si, že na konci čísla je cifra 9. Pripočítaním jednotky sa posledná cifra zmení na 0 a k predošlej cifre budeme musieť pripočítať 1 – „prechod cez desiatku“. Ak však pred našou deviatkou bola ďalšia deviatka, proces sa zopakuje. Aj predposledná cifra sa zmení na 0 a k cifre pred ňou sa opäť pripočíta 1. Takto to pôjde ďalej až nenarazíme na cifru rôznu od 9, alebo sa nám neminú cifry. V druhom prípade jednoducho pred číslo dopíšeme jednotku.

Označme m počet deviatok na konci hľadaného čísla N. Určite platí $0 \leq m \leq 1112$. Ako sme si všimli vyššie, číslo $N+1$ dostaneme tak, že každú z m deviatok na konci nahradíme 0 a cifru pred deviatkami zvýšime o 1. (Alebo pridáme 1 na začiatok ak $m = 1112$.) Ciferný súčet sa zníži o $9 \cdot m$ za zmenené deviatky a zvýši o 1 za zmenu (resp. pridanie) cifry pred deviatkami.

Vráťme sa k podmienkam zo zadania. Označme c ciferný súčet čísla N. Ciferný súčet čísla $N+1$ bude, podľa postupu vyššie, rovný $c+1-9m$. Podľa zadania majú byť obe tieto hodnoty násobkami 2000. Potom ale aj rozdiel týchto dvoch hodnôt, t. j. $9m-1$, musí byť násobkom 2000. To nám samo o sebe nič nezaručí, ale obmedzí nám to možné hodnoty m. Keďže $m \leq 1112$, nutne $9m-1 \leq 10\,007$. Správny násobok 2000 je teda jeden z 0, 2000, 4000, 8000, 10 000. Vieme tiež, že $9m$ je násobok 9, čo platí len pre hodnotu 8001, takže vyhovujúci násobok je 8000 a jediné vyhovujúce m bude 889.

Prišli sme na to, že N má na konci 889 deviatok (a že pred nimi je iná cifra ako 9). Vieme tiež, že $N+1$ má ciferný súčet o 8000 menší. Keďže $N+1$ má mať ciferný súčet, ktorý je násobkom 2000, musí to byť najmenej 2000. Ciferný súčet N bude teda aspoň 10 000. Aký najväčší ciferný súčet môže číslo N mať? Najviac to bude $10\,008 = 1112 \cdot 9$, čo je prípad, kedy každá cifra N je deviatka. Jediný vyhovujúci ciferný súčet pre N je teda práve spomínaných 10 000.

Ako teda môže číslo N vyzerať? Na konci má 889 deviatok, pred ktorými je cifra menšia ako 9. Ak by to bola cifra 8 a všetky ostatné cifry by boli 9 ciferný súčet by bol 10 007, nie 10 000. Cifry takéhoto čísla nemôžeme zvyšovať, len znižovať. Tiež musíme pamätať na poslednú podmienku zo zadania – číslo N obsahuje cifru 1. Ak by sme niektorú z deviatok v našom čísle nahradili 1 dostali by sme číslo s ciferným súčtom menším ako 10 000. Jediná cifra, ktorú vieme nahradiť jednotkou, je teda jediná rôzna od 9, a to je 8 na 890. mieste sprava.

Takže jediné možné N začína $1112-889-1 = 222$ deviatkami, potom nasleduje 1 jednotka a nakoniec 889 deviatok. Mali by sme ešte overiť, že toto číslo skutočne spĺňa všetky tri podmienky zo zadania. Jeho ciferný súčet je $1111 \cdot 9 + 1 = 10\,000$. $N+1$ má ciferný súčet $222 \cdot 9 + 2 = 2000$. Jednotku naše N má, takže je skutočne riešením.

1.3 Kde Máme Sneh ($\kappa \leq 3$)

Zadanie. *Lukáš je mladý a nadšený lyžiar, preto sa rozhodol zúčastniť sa pretekov v zjazdovom lyžovaní, ktorých sa zúčastnilo $n \geq 17$ pretekárov. Preteky sa skladali z 5 kôl, každý deň od pondelka do piatka prebehlo jedno kolo. V pondelok skončil Lukáš na 17. a v utorok na 15. mieste. V stredu sa dostal na 14. miesto. Vo štvrtok trochu znervóznel a skončil na 16. mieste. V piatkovom, poslednom, zjazde sa Lukášovi darilo o trochu viac a skončil na*

13. *mieste. Na konci bolo všetkých n pretekárov zoradených do celkového poradia podľa súčtu časov za všetkých päť kôl. V závislosti od n zistite, ako najlepšie mohol Lukáš skončiť v celkovom poradí.*

Riešenie. opravuje **BaškaN** (barbora.novosadova@trojsten.sk)

Máme zistiť, ako najlepšie sa mohol Lukáš umiestniť, takže koľko najviac ľudí mohlo mať väčší súčet časov za päť dní. Je zrejmé, že ak sa niekto každý deň umiestnil pred Lukášom, mal každý deň kratší čas, teda aj celkovo bol rýchlejší a Lukáš ho nepredbehol ani v celkovom poradí.

Relevantní sú pre nás tí ľudia, ktorých Lukáš v niektorom kole predbehol. Na to, aby Lukáš v celkovom poradí mohol poraziť nejakého pretekára, mu stačí predbehnúť ho v jediný deň, pokiaľ si Lukáš spraví dostatočný náskok. Ak je napríklad Lukášov celkový súčet časov L, stačí ak pretekár, ktorého predbehne, má v daný deň čas väčší ako L, a už bude mať určite väčší čas aj v celkovom poradí. (pre lepšiu predstavu, nech Lukáš má celkový čas za 5 dní 10 sekúnd a pretekár, ktorého predbehne v jeden deň, má v ten deň čas 1 minútu.) Chceme, aby čo najviac ľudí bolo v celkovom poradí za Lukášom. To dosiahneme, to dosiahneme, ak každý deň skončia za Lukášom iní ľudia, resp. nikto nebude Lukášom porazený 2-krát, kým Lukáš každého neporazí aspoň raz. Ešte všeobecnejšie, Lukáš nikoho nepredbehne $(n+1)$-krát, pokiaľ každého nepredbehne n-krát.

Vezmime si $n = 17$. V prvom kole Lukáš predbehol 0 pretekárov, v druhom 2, v treťom 3, vo štvrtom 1 a v piatom 4. V takomto prípade je v celkovom poradí za Lukášom $2 + 3 + 1 + 4 = 10$ ľudí, čo znamená, že Lukáš mohol byť najlepšie na 7. mieste.

Pre $n = 18$ je situácia podobná. V prvom kole Lukáš predbehol 1 pretekára, v druhom 3, v treťom 4, vo štvrtom 2 a v piatom 5. Najviac teda mohol predbehnúť 15 pretekárov a umiestniť sa na 3. mieste.

Pre $n = 19$ Lukáš celkovo predbehol $2+4+5+3+6 = 20$ pretekárov, čo znamená, že každého mal možnosť poraziť aspoň raz, niektorých dokonca 2-krát, takže sa mohol umiestniť na prvom mieste. Rovnako to platí aj pre $n \geq 19$, pretože Lukáš mal v priebehu piatich dní možnosť obehnúť $(n-17)+(n-15)+(n-14)+(n-16)+(n-13) = 5n-75 = n+4n-75 \geq n+4\cdot 19-75 = n+76-75 > n-1$ pretekárov, čiže určite mohol každého obehnúť aspoň raz.

1.4 Kráľovstvo Múdreho Svetovládcu ($\kappa \leq 5$)

Zadanie. *Kráľ bol veľmi múdry a rád sa zaoberal matematikou. Jedného dňa si vzal mapu svojho kráľovstva a začal na nej skúmať rôzne tvary. Zaujali ho najmä štvorce a kružnice. Keď sa pozrel na mapu bližšie, zistil, že niektoré štvorce sú obklopené kružnicami. A tak sa rozhodol, že skúsi zistiť, či je možné, aby stredy kružníc ležali vo vrcholoch nejakého štvorca.*

Majme štvorec $ABCD$ a bod E, ktorý leží vnútri uhlopriečky BD. Nech O_1 je stred kružnice, ktorá prechádza cez body A, B, E, a nech O_2 je stred kružnice, ktorá prechádza cez body A, D, E. Dokážte, že AO_1EO_2 je štvorec.

Riešenie. opravujú **Lukáš** (lukas.gaborik@trojsten.sk) a **Marek** (marek.tkac@trojsten.sk)

Označme $|\sphericalangle BAE|$ ako α a $|\sphericalangle BAO_1|$ ako β. Keďže O_1 je stred kružnice opísanej trojuholníku ABE, tak $|AO_1| = |BO_1|$, preto trojuholník ABO_1 je rovnoramenný a $|\sphericalangle ABO_1| = |\sphericalangle BAO_1| = \beta$. Podobne aj $|AO_1| = |EO_1|$, čiže AO_1E je rovnoramenný, a teda $|\sphericalangle AEO_1| = |\sphericalangle EAO_1| = |\sphericalangle EAB| + |\sphericalangle BAO_1| = \alpha + \beta$. Keďže BD je uhlopriečka štvorca, tak $|\sphericalangle ABD| = 45°$. Potom ale z toho, že $|BO_1| = |EO_1|$ (opäť z kružnice opísanej ABE) máme, že trojuholník BEO_1 je rovnoramenný, z čoho $|\sphericalangle BEO_1| = |\sphericalangle EBO_1| = |\sphericalangle EBA| + |\sphericalangle ABO_1| = 45° + \beta$.

Pozrime sa ďalej na súčet uhlov v trojuholníku ABE. Platí $180° = |\sphericalangle ABE| + |\sphericalangle BEA| + |\sphericalangle EAB| = 45° + (45° + \alpha + 2\beta) + \alpha = 90° + 2(\alpha + \beta)$. Potom ale $2(\alpha + \beta) = 90°$, a preto $\alpha + \beta = 45°$. Všimnime si, že trojuholník AEO_1 je rovnoramenný s uhlami 45° pri základni, a teda oproti nej má uhol $|\sphericalangle AO_1E| = 180° - 2 \cdot 45° = 90°$.

Teraz postupujme podobne pre druhú stranu: Označme si $|\sphericalangle DAO_2|$ ako γ a $|\sphericalangle EAO_2|$ ako δ. Potom z rovnoramenného DAO_2 vieme, že $|\sphericalangle O_2DA| = |\sphericalangle DAO_2| = \gamma$. Vieme, že $|\sphericalangle EDA| = 45°$ z vlastností uhlopriečok štvorca. Teda $|\sphericalangle EDO_2| = |\sphericalangle EDA| - |\sphericalangle O_2DA| = 45° - \gamma$. Z rovnoramennosti trojuholníka EDO_2 vieme, že $|\sphericalangle EDO_2| = |\sphericalangle O_2ED| = 45° - \gamma$. Nakoniec sa pozrieme na rovnoramenný trojuholník AEO_2. Vieme, že $|\sphericalangle O_2AE| = \delta$, a z toho aj $|\sphericalangle AEO_2| = |\sphericalangle O_2AE| = \delta$.

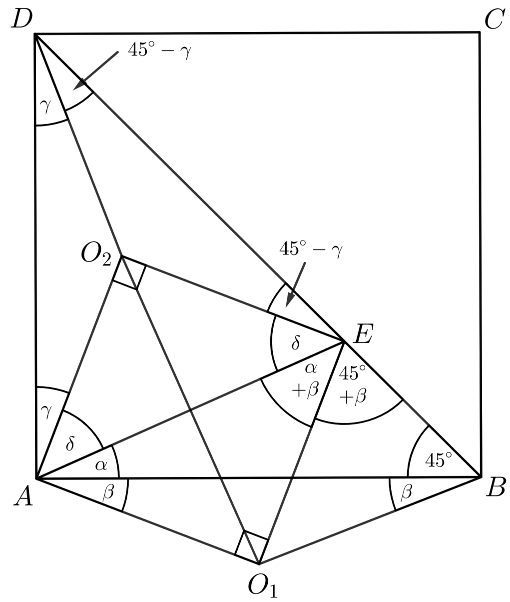
Už poznáme všetky uhly na to, aby sme zistili čo potrebujeme. Zo súčtu uhlov v trojuholníku AED vidíme, že $180° = 2\gamma + 2 \cdot (45° - \gamma) + 2\delta = 90° + 2\delta$, z čoho vidíme, že $\delta = 45°$, a $|\sphericalangle AEO_2| = |\sphericalangle O_2AE| = \delta = 45°$. Opäť si všimnime, že trojuholník AEO_2 je rovnoramenný s uhlami 45° pri základni, a teda oproti nej má uhol veľkosti $|\sphericalangle EO_2A| = 180° - 2 \cdot 45° = 90°$.

Práve sme celkom pracne pre konkrétny uhol 45° dokázali, že veľkosť uhla, ktorý zviera tetiva so stredom, je dvojnásobkom uhla, ktorý zviera s ľubovoľným bodom na „správnej“ strane kružnice. Toto je v geometrických úlohách pomerne často používaná vlastnosť nazývaná aj *veta o obvodovom a stredovom uhle*. Ak ste o nej ešte nepočuli, odporúčame si niečo o tom prečítať (napríklad v Zbierke úloh KMS[1], Kapitola 2, sekcia 1) a potom sa zamyslieť, ako veľmi by to zjednodušilo toto riešenie.

Teda sme zistili, že trojuholníky O_1EA a O_2AE sú pravouhlé a rovnoramenné. Ďalej, pre veľkosti uhlov $\sphericalangle EAO_1$, $\sphericalangle O_1EA$, $\sphericalangle AEO_2$ a $\sphericalangle O_2AE$ platí $|\sphericalangle EAO_1| = |\sphericalangle O_1EA| = |\sphericalangle AEO_2| = |\sphericalangle O_2AE| = 45°$, z čoho dostávame $|\sphericalangle AO_1E| = |\sphericalangle O_1EO_2| = |\sphericalangle EO_2A| = |\sphericalangle O_2AO_1| = 90°$. Teda útvar AO_1EO_2 je obdĺžnik. No keďže z rovnoramennosti napr. trojuholníka AO_1E sú dve susedné strany útvaru AO_1EO_2 rovnakej veľkosti, jedná sa o štvorec.

Zamyslime sa ešte, čo by sa stalo, keby situácia vyzerala inak ako na našom nákrese. Všimnime si, že uhly v trojuholníku ADE a uhly v trojuholníku ABE sme spočítali „nezávisle“. To znamená, že 45° a 90° uhly nám vyjdú na správnych miestach aj vtedy, keď je stred kružnice opísanej mimo štvorca, aj vtedy, keď je stred kružnice opísanej v štvorci. A čo keby bol ten stred na hrane štvorca? Jednoducho by sme mali $\beta = 0°$ (resp. $\gamma = 0°$) a celý dôkaz by prebehol tiež.

[1] https://kms.sk/248/plugin/attachments/download/393/



1.5 Kúzelné Matúšove Sústavy ($\kappa \leq 8$)

Zadanie. *Jedného dňa sa objavil v kráľovstve mladý kúzelník menom Matúš. Bol veľmi talentovaný a rád sa zaoberal matematikou. Keď sa dozvedel o sústave rovníc, ktorú kráľ potreboval vyriešiť, rozhodol sa, že mu pomôže. Matúš sa zamyslel a po chvíli sa mu podarilo túto sústavu vyriešiť. Keď sa kráľ dozvedel o jeho úspechu, bol veľmi potešený a odmenil ho kúzelným prstom, ktorý dokázal vyriešiť akékoľvek matematické úlohy. Matúš bol veľmi šťastný a vďačný za tento darček a vďaka nemu sa stal najmocnejším kúzelníkom v kráľovstve.*

Nájdite všetky trojice reálnych čísel (x, y, z), ktoré sú riešením sústavy rovníc

$$x = \sqrt{2y + 3},$$

$$y = \sqrt{2z + 3},$$

$$z = \sqrt{2x + 3}.$$

Riešenie. opravuje **David** (david.belobrad@trojsten.sk)

Ako prvé si všimnime, že každá neznáma je rovná nejakej odmocnine. To znamená, že $x, y, z \geq 0$. Najprv intuitívne vyskúšajme $x = y = z$. Potom napríklad $x = \sqrt{2x + 3}$, po umocnení dostaneme $x^2 = 2x+3$. Riešením tejto rovnice je $x = 3$ a $x = -1$. Druhý z koreňov pre nezápornosť riešenia môžeme vylúčiť a dostaneme riešenie $(x, y, z) = (3, 3, 3)$, ktoré po spravení skúšky správnosti aj skutočne sedí. Teraz, keď vieme, že x môže byť 3, sa pozrime na situácie, kedy tomu tak nie je.

$x < 3$: Skúsme si nejako porovnať vzťah x a z. Ak $x < 3$, tak $2x + 3 < 9$. Tým pádom je ale $z = \sqrt{2x + 3} < \sqrt{9} = 3$. Skúsime dokázať, že $x < z$: Na to treba, aby platilo, $x < \sqrt{2x + 3}$. Roznásobením a úpravou dostaneme $x^2 < 2x + 3$, teda dostaneme výraz $(x-3)(x+1) < 0$. Prvá zátvorka bude vždy záporná a druhá vždy kladná, teda ich súčin bude vždy záporný, čím sme práve ukázali platnosť $x < z$. Obdobným spôsobom (keďže už vieme, že $z < 3$) zistíme, že

$y < 3$ a $z < \sqrt{2z+3} = y$. Z toho potom môžeme rovnakou úvahou dostať $y < \sqrt{2y+3} = x$. Potom ale $x < z < y < x$, čo je spor.

$x > 3$: Ak $x > 3$, tak $2x + 3 > 9$. Tým pádom je ale $z = \sqrt{2x+3} > \sqrt{9} = 3$. Pozrime sa teraz na výraz $(x-3)(x+1)$. Prvá zátvorka bude vždy kladná a druhá vždy kladná, teda ich súčin bude vždy kladný. Asi už začíname tušiť, že sa nám bude opakovať postup z prvého prípadu, len sa budú meniť smer nerovnosti. Skúste si teda tento postup zopakovať sami.

Tým sme došli k tomu, že x nemôže byť menšie a ani väčšie ako 3. Teda ak má táto sústava riešenie, tak musí $x = 3$. Doriešením v tomto prípade dostaneme riešenie $(x, y, z) = (3, 3, 3)$, skúšku správnosti pre toto riešenie sme spravili vyššie.

1.6 Kráľov Milovaný Štvorček

Zadanie. *V kráľovstve bol malý kúzelný Štvorček, ktorý bol schopný vyriešiť akékoľvek matematické úlohy. Kráľ sa o ňom dozvedel a rozhodol sa, že ho použije na vyriešenie zložitej úlohy so šachovnicou. Keď Štvorček dostal úlohu, zamyslel sa a po chvíli mu bolo jasné, ako to urobiť. Kráľ bol nadšený, keď sa dozvedel výsledok, a rozhodol sa, že Štvorček bude jeho oficiálnym poradcom pre všetky matematické úlohy. A tak sa aj stalo!*

Štvorčekovou úlohou bolo pre dané $n \geq 2$ vyplniť šachovnicu $n \times n$ číslami 1 a -1 tak, aby v každom štvorci 2×2 bol súčet čísel na jeho políčkach rovný 0. V závislosti od n určte, koľkými spôsobmi mohol Štvorček takto šachovnicu vyplniť.

Riešenie. opravujú **Mišo M.** (michal.molnar@trojsten.sk) a **Skaloš** (jakub.skalos@trojsten.sk)

Naše riešenie započnime pohľadom na čiastočne vyplnený štvorec 2×2. Ak máme vyplnené tri čísla štvorca, zvyšné číslo je jednoznačne určené. Jednoducho sčítame už existujúce čísla a výsledok musíme odčítať. Tu je tiež dobré uvedomiť si, že ak má byť súčet 0, musíme mať rovnako veľa 1 ako -1. V každom štvorci sú teda po dva kusy každého čísla a na začiatku sme nemohli mať v jednom štvorci 2×2 tri rovnaké.

Predstavme si ďalej, že máme v štvorci 2×2 vyplnené len dve čísla. Pre jednoduchosť (a pre ďalší postup) predpokladajme, že máme vyplnený prvý riadok. Ak sú vyplnené čísla rovnaké, máme len jednu možnosť, ako doplniť druhý riadok – musíme dopísať dvakrát to číslo, ktoré v tabuľke zatiaľ chýba. Naopak, ak sú doplnené jedna 1 a jedna -1, máme možnosti dve. Dopisujeme tiež jednu 1 a jednu -1, takže môžeme dopísať buď rovnaké čísla pod seba, alebo rôzne pod seba. T. j. buď pod 1 dopíšeme 1 a pod -1 dopíšeme -1, alebo naopak.

Pri dvoch vyplnených číslach teda vždy vieme doplniť daný štvorec 2×2 tak, aby spĺňal zadanie. Vidíme teda, že ak budeme mať v štvorci 2×2 jedno alebo žiadne číslo, môžeme najprv doplniť štvorec na dve ľubovoľne a stále budeme vedieť pokračovať v dopĺňaní.

Skúsme prejsť na počítanie možných vyplnení tabuľky $n \times n$. Prvé pozorovanie, ktoré môžeme spraviť na základe predošlého odseku je, že prvý riadok môžeme doplniť ľubovoľne. Po takomto doplnení budú v každom štvorci 2×2 najviac dve čísla, a teda sme zatiaľ nič nepokazili. Pre každé z n políčok sme zvolili jedno z 2 čísel. Máme teda 2^n možných doplnení prvého riadku.

Rozlíšime dva typy doplnenia prvého riadku. Buď sa v tomto riadku nachádza dvakrát to isté číslo vedľa seba, alebo nie. Začneme druhým prípadom. Tu máme len dve možné doplnenia. Keďže sa striedajú 1 a -1, celý riadok je určený začiatočným číslom. Možnosti sú teda $1, -1, 1, -1, \ldots$ a $-1, 1, -1, 1, \ldots$. V takomto prípade má každý štvorec 2×2 vo vrchnom rade určený prvý riadok a v ňom sú dve čísla. Možnosti na doplnenie zvyšku štvorca 2×2 sú teda dve – buď doplníme pod seba rovnaké čísla, alebo rôzne.

Tu je dôležité si uvedomiť, že takáto voľba v jednom štvorci 2×2 nám dá jednoznačné doplnenie celého riadku. Akonáhle doplníme jeden štvorec, susedný štvorec (posunutý o 1 políčko vpravo/vľavo) bude mať doplnené políčka 3, a teda len jednu možnosť. Ešte by sme mali overiť, že táto možnosť bude existovať. Teoreticky by sme sa mohli takýmto doplnením dostať do stavu, keď tieto tri vyplnené čísla sú rovnaké, čo by nevyhovovalo zadaniu. Predpokladali sme však, že vo vrchnom riadku sú dve čísla rôzne, takže táto možnosť nenastane.

Po vyplnení druhého riadku máme opäť riadok striedajúcich sa čísel. Vieme teda opäť rovnako postupovať pri vypĺňaní tretieho, štvrtého, a tak ďalej. V každom z $n-1$ riadkov (od druhého po n-tý) sme teda zvolili jednu z dvoch možností. Rovnako sme na tom boli aj v riadku prvom, dostávame tak 2^n vyhovujúcich vyplnení tabuľky.

Prejdime teraz na zvyšné vyplnenia prvého riadku. To je zvyšných $2^n - 2$ možností. V nich sú vždy niekde dve políčka vedľa seba vyplnené rovnakým číslom. Tieto dve políčka majú pod sebou ďalšie dve, s ktorými tvoria štvorec 2×2. Ako sme riešili na začiatku, máme jedinú možnosť ako doplniť tieto dve políčka – doplniť dvakrát opačné číslo, ako je v prvom riadku. Po tomto doplnení dostaneme opäť susedný štvorec (alebo štvorce) 2×2, ktoré majú vyplnené tri čísla, a teda máme daný aj zvyšok druhého riadku.

Aj tu nastáva otázka, či sa niečo nemohlo pokaziť. Nemohlo. Do nového riadku sme totiž pod jedno číslo dopísali opačné číslo. A nie len na začiatku. Majme v štvorci 2×2 doplnené tri čísla a to štvrté označme a. Vieme, že vedľa a sú nad sebou napísané dve rôzne čísla, takže susedný stĺpec má súčet 0. Aby bol aj celkový súčet štvorca 2×2 rovný nule, a musí dávať s číslom nad sebou tiež súčet 0. Ak je nad a číslo -1, tak $a = 1$, ak je nad a číslo 1, tak $a = -1$. Takže sme pod ďalšie číslo dopísali číslo opačné. Ľahko si všimneme, že takto doplnený druhý riadok bude vždy fungovať.

Koľko máme teda možností? Druhý riadok sme mohli dopísať len jedným spôsobom. Tým sme dostali rovnaký riadok ako prvý, len s opačnými znamienkami, takže opäť sú vedľa seba niekde dve rovnaké čísla. Rovnako ako bol jednoznačne určený druhý riadok, bude aj ten tretí, potom štvrtý, a tak ďalej. Pre každé z týchto $2^n - 2$ vyplnení prvého riadku tak máme len 1 možnosť ako vyplniť zvyšok.

Odpoveď: Šachovnicu môžeme podľa zadania vyplniť dokopy $2^{n+1} - 2$ spôsobmi.

1.7 Kruh Mágie Sadu

Zadanie. *V kráľovstve bol kúzelný kruh, ktorý sa nachádzal uprostred záhrady. Bol veľmi záhadný a nikto nevedel, odkiaľ sa vzal. Keď sa o ňom dozvedel kráľ, rozhodol sa, že ho využije na vyriešenie zložitej úlohy s uhlami.*

Na kružnicu nakreslil štyri body A, B, C a D tak, že $|AB| = |BC| = |CD|$. Potom nariadil svojim matematikom, aby vypočítali veľkosť uhla ABC, ak vedia, že osi uhlov ABD a ACD sa pretínajú v bode E a priamky AE, CD sú rovnobežné. Nájdite veľkosť uhla ABC aj vy.

Riešenie. opravuje **Viki** (viktoria.pravdova@trojsten.sk)

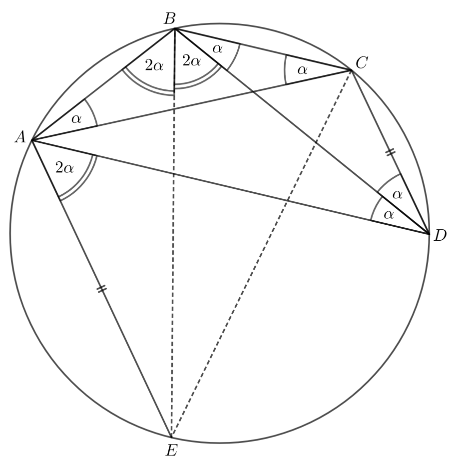
V prvom rade nás asi bude zaujímať, kde sa bude nachádzať bod E. Skúsenejší z nás v bode E hneď spoznajú Švrčkov bod trojuholníkov ABD a ACD. Pre bežných smrteľníkov: je známe, že v trojuholníku sa os strany a os uhla oproti nej pretnú na kružnici tomuto trojuholníku opísanej v bode, ktorý sa nazýva Švrčkov bod (danej strany, resp. daného vrcholu oproti strane).[2]

[2] Ak ťa Švrčkov bod zaujal, odporúčam `https://prase.cz/library/SvrckuvBodMV/SvrckuvBodMV.pdf`.

V tomto prípade máme stranu AD a nad ňou dva trojuholníky na rovnakej kružnici. Priesečník osi strany AD a kružnice je teda Švrčkov bod tejto strany a budú ním prechádzať osi uhla oproti AD v akomkoľvek trojuholníku nad AD, a teda aj v ABD aj v ACD.

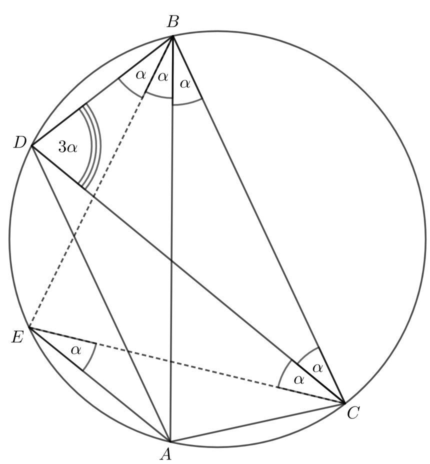
Keď už vieme, že E bude na kružnici, poďme vyťažiť niečo z faktu $|AB| = |BC| = |CD|$. O ABC aj BCD vieme, že sú rovnoramenné, teda majú rovnaké uhly pri základni: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA$ a $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CDB$. A keďže $\sphericalangle BAC$ je obvodový ku $\sphericalangle BDC$ vieme, že všetky 4 tieto uhly sú zhodné, nazvime ich α.

Teraz príde čas uvedomiť si, že úloha môže mať dve konfigurácie. Ak by totiž bola vzdialenosť $|AB|$ dosť veľká, môže sa stať, že bod D bude medzi A a B. Konkrétne, keď sú od seba vzdialené viac ako tretinu kružnice, D už bude za A. Vtedy sa úsečky AB a CD budú pretínať, inak sa pretínať nebudú. Poďme sa najskôr pozrieť na tú, kde sa nepretínajú.



Ešte sme nevyužili rovnobežnosť CD a AE. Všimnime si napríklad, že $\sphericalangle EAD = \sphericalangle ADC$, keďže sú striedavé. Prenesieme si po kružnici ešte $\sphericalangle BCA$ $(= \alpha)$ do $\sphericalangle BDA$ a zistíme, že $\sphericalangle ADC = 2\alpha = \sphericalangle EAD$. Uhol $\sphericalangle EAD$ $(= 2\alpha)$ potom vieme po kružnici preniesť do $\sphericalangle EBD$ $(= 2\alpha)$. Vďaka tomu, že BE je os uhla ABD vieme, že $\sphericalangle ABE = \sphericalangle EBD$ $(= 2\alpha)$.

Teraz sa už len pozrieme na trojuholník ABC, ktorého súčet vnútorných uhlov je 180°. Pri základni máme dva razy α a $\sphericalangle ABC = 5\alpha$. $\sphericalangle ABC$ je teda $\frac{5}{7} \cdot 180° = \frac{900°}{7}$.



Teraz druhá konfigurácia. Tentokrát si v trojuholníkoch ABC a BCD pomenujeme α uhol oproti základni, teda $\sphericalangle BCD$ a $\sphericalangle ABC$, ktorého hodnotu máme nájsť. Z obvodových uhlov vieme, že $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AEC\ (= \alpha)$. Následne opäť využijeme striedavé uhly: $\sphericalangle AEC = \sphericalangle ECD\ (= \alpha)$ a nakoniec zase raz obvodové uhly $\sphericalangle ECD = \sphericalangle DBE\ (= \alpha)$. Vďaka osi uhla BE vieme, že $\sphericalangle DBE = \sphericalangle EBA\ (= \alpha)$. Keďže trojuholník DBC je rovnoramenný, uhly pri jeho základni sú rovnaké, teda $\sphericalangle DBC = \sphericalangle BDC = 3\alpha$.

A na záver, podobne ako v predošlej konfigurácií, sa pozrieme na trojuholník BCD, v ktorom máme až 7α, ktoré majú mať súčet $180°$. $\sphericalangle ABC$ však má veľkosť len jedna α, a teda $\sphericalangle ABC = \frac{180°}{7}$.

1.8 Konštantu Mišo Stopuje

Zadanie. *Jožo s Mišom sa boli prejsť po kráľovstve a aby sa nenudili, vymysleli si hru. Jožo si vybral celé číslo od 1 do 2023 (vrátane) a Mišo sa ho snažil uhádnuť. Mišo si mohol vybrať ľubovoľné kladné celé číslo d a spýtať sa Joža otázku: „Je tvoje číslo deliteľné číslom d?“ Jožo na otázku pravdivo odpovedal áno alebo nie. Takýchto otázok sa Mišo spýtal niekoľko, až nakoniec vedel s istotou povedať, aké číslo si Jožo vybral.*

Najmenej koľko otázok Mišovi určite stačilo, aby vedel jednoznačne určiť Jožovo číslo?

Riešenie. opravuje **Mati** (matus.zelko@trojsten.sk)

V úlohe sa nás pýtajú, koľko otázok Mišovi stačilo, aby sa číslo d dalo jednoznačne určiť. Typicky budeme dokazovať, že potrebujeme aspoň niekoľko otázok a potom ukážeme stratégiu, ktorej tento počet otázok stačí.

Začnime tým, koľko otázok potrebujeme. Najprv predpokladajme, že si Jožko vybral 1 a pozrime sa na prvočísla. Akým spôsobom vieme prvočíslo odlíšiť od 1? Sú len 2 otázky, na ktoré, pokiaľ by bolo Jožkovo číslo prvočíslo p, Jožko Mišovi odpovedal áno, a to „Je tvoje číslo deliteľné číslom p?“ a „Je tvoje číslo deliteľné číslom 1?“, pričom iba prvá z týchto dvoch otázok dokáže odlíšiť prvočíslo od jednotky. Ak teda existuje prvočíslo ≤ 2023, na ktoré sa Mišo nespýta, tak si nemôže byť istý, či má Jožko jednotku alebo dané prvočíslo. Prvočísel do 2023 je 306, a tak potrebujeme aspoň 306 otázok.

306 otázok už bude stačiť. Nech p_i, predstavuje i-te prvočíslo, kde $i \in \{1, \ldots, 306\}$. Potom prvá Mišova otázka bude „Je tvoje číslo deliteľné číslom $p_1 = 2$?“. Ďalej postupujme nasledovne. Kým Jožko odpovedá áno, Mišo zvyšuje mocninu prvočísla, na ktoré sa pýtal. To znamená, že ak na otázku pre $d = 2^1$ Jožko odpovie áno, Mišo sa opýta otázku pre $d = 2^2$. Akonáhle však Jožko povie nie na p_i^k (pričom, keďže sa ho to Mišo pýtal, tak predtým dostal odpoveď áno na p_i^{k-1}), vieme, že $k - 1$ je najvyššia mocnina, v ktorej sa p_i v pôvodnom čísle vyskytuje. Posunieme sa teda na ďalšie prvočíslo p_{i+1}, ktoré preveríme podobným spôsobom.

A to je Mišova stratégia. Stačí iba ukázať, že Mišo sa za maximálne 306 otázok dostane k cieľu.

- **Pokiaľ všetky Jožkove odpovede sú nie**, potom vieme, že Jožkovo číslo nie je deliteľné žiadnym prvočíslom do 2023 (Mišo postupne prejde cez všetkých 306 prvočísel), a teda je to 1.

- **Pokiaľ Jožko odpovie nie na prvočísla do** $\sqrt{2023} \leq 45$, potom prvá odpoveď áno je už naše hľadané číslo a, lebo najmenšie zložené číslo pripadajúce do úvahy je jeho druhá mocnina (žiadne menšie nie je deliteľom d, lebo odpovede boli nie). Druhá mocnina je už ale veľmi veľká – $a^2 \geq 45^2 = 2025$. Výsledok teda bude prvočíslo a, to odhalíme na maximálne 306 otázok.

- **Pokiaľ Jožko odpovie áno na číslo do** 45, toto číslo je aspoň 2, a teda číslo n nie je deliteľné žiadnym prvočíslom $p \geq 1012$, inak by $n \geq 2 \cdot p \geq 2024$, čo nejde. Takýchto prvočísel, ktoré sú väčšie ako 1012, a teda sa na ne nebudeme musieť pýtať, je 137. Avšak Jožko nám môže povedať áno maximálne 10-krát.

Ak by nám povedal áno 11-krát, tak by v prvočíselnom rozklade čísla n muselo byť minimálne 11 činiteľov, z ktorých je každý aspoň 2. Takže n by muselo byť aspoň $2^{11} = 2048$, čo je už príliš veľa. Bude nám určite stačiť $306 - 137 + 10 \leq 306$ otázok, aby sme odhalili prvočíselný rozklad čísla n, a tým ho jednoznačne určili.

1.9 Kolosálne Medziľudské Spoločnosti

Zadanie. *V krajine ďaleko, ďaleko za horami sú dve spoločnosti, ktoré sa rozhodli spojiť sily a vytvoriť jednu veľkú firmu. Manažéri týchto spoločností sú umiestnení na dvoch miestach* 1000 *kilometrov od seba. Na úsečke medzi nimi sa nachádza n rôznych bodov, na ktorých sú umiestnení matematici.*

Každú sekundu sa v rovnakom momente pohne každý matematik do stredu úsečky spájajúcej jeho s najbližším matematikom alebo manažérom. Ak je matematik rovnako vzdialený od dvoch ľudí, tak si vyberie, ktorým smerom sa posunie. Ak sa náhodou vyskytnú dvaja matematici na rovnakom mieste, mladší z nich je zastrašený jeho starším kolegom, a tak radšej zavesí svoje povolanie matematika na klinec a navždy odíde.

Keď sa matematik dostane do vzdialenosti najviac 1 *meter od niektorého manažéra, môže si s ním podať ruku (a keď je ďalej, tak nie). Pri podávaní rúk sa nikto neposúva.*

Ukážte, že bez ohľadu na rozhodnutia matematikov bude po konečnom počte sekúnd každý zo zostávajúcich matematikov vzdialený nanajvýš 1 *meter od niektorého manažéra, a teda si s ním bude môcť podať ruku.*

Riešenie. opravuje **Ivka** (ivona.hrivova@trojsten.sk)

Úlohu budeme riešiť matematickou indukciou vzhľadom na počet matematikov. Použijeme tú formu, pri ktorej predpokladáme, že úlohu vieme vyriešiť pre všetky nižšie počty. Pre 0 matematikov tvrdenie triviálne platí. Najmenší počet matematikov, ktorý má význam uvažovať, je 1. V prípade že je daný matematik presne v strede, v prvej sekunde si vyberie jedného manažéra, ku ktorému vykročí a následne sa k nemu bude blížiť na polovičnú vzdialenosť, až kým k nemu v konečnom počte krokov nepríde. To sa ale určite aspoň za $\log_2(500000)$ krokov stane. Ak nie je presne v strede, priebeh bude analogický až na to, že manažér, ku ktorému sa začne hneď na začiatku približovať, je dopredu určený, keďže je najbližšie. Týmto je prvý krok indukcie dokázaný.

Predpokladajme teraz, že danú úlohu vieme vyriešiť pre $a < n$ matematikov a poďme sa pozrieť na prípad, kedy je matematikov n. Indukcia je v tomto prípade užitočná preto, že akonáhle eliminujeme aspoň jedného matematika, tvrdenie vieme z indukcie prehlásiť za dokázané.

Najprv uvažujme postupnosť $1 < m$ matematikov. Tí majú medzi sebou $m - 1$ medzier. To je iba $m - 1$ pozícií, kam sa môžu pohnúť, keďže vždy idú do stredu nejakej medzery. Takže ak sa najľavejší matematik rozhodne ísť doprava a najpravejší doľava, tak z Dirichletovho princípu sa aspoň 2 matematici stretnú, čím celkový počet matematikov klesne a úlohu nám dorieši indukčný predpoklad.

Takže v žiadnom kroku neexistuje úsek, na ktorého koncoch by sa matematici rozhodli ísť proti sebe. Zoberme prvého matematika zľava, ktorý sa rozhodol vykročiť doprava a nazvime ho Jožko. Ak taký neexistuje, tak Jožkom nazvime manažéra. Dôkaz prebehne rovnako - všetci matematici pred Jožkom šli prvý krok doľava, Jožko a tí za ním doprava. To nám garantuje, že postupnosť vzdialeností medzi matematikmi až po Jožka je neklesajúca. Ak by aspoň raz táto postupnosť klesla, tak vzdialenosť k-teho od $(k+1)$-vého matematika je menšia ako k-teho od $(k-1)$-vého, a teda k-ty matematik by musel spraviť krok doprava. Keďže je pred Jožkom, tak ide o spor. Podobne postupnosť vzdialeností matematikov za Jožkom by musela byť nerastúca. Ak by aspoň raz vzrástla, tak by sme mali matematika za Jožkom, ktorý musí spraviť krok doľava, lebo od svojho ľavého suseda má menšiu medzeru ako od pravého. S Jožkom by však vytvorili škripec, kvôli ktorému by sa aspoň dáky matematik medzi nimi stretol s iným a úlohu by nám doriešil indukčný predpoklad. Všimnime si, že nerastúcosť a neklesajúcosť týchto postupností sa po kroku nezmení.

Jožko týmto stratil možnosť ísť doľava (aj keď predtým ju nemusel nutne mať), jeho vzdialenosť od matematika pred ním sa zväčšila (triviálne) a vzdialenosť od matematika za ním sa zmenšila alebo nezmenila. Je to preto, že ak bol od matematika za ním vzdialený o d, matematik za ním bol od svojho pravého suseda vzdialený maximálne o d (už sme si ukázali, že ide o nerastúcu postupnosť). Jožko sa teda pohol o $\frac{d}{2}$ doprava a matematik za ním o maximálne $\frac{d}{2}$ doprava, a teda ich vzdialenosť sa nezväčšila. Uvedomme si, že sa už nikdy nezväčší. Keďže každý matematik, ktorý je vpravo od Jožka, má pravého matematika bližšie alebo rovnako ďaleko ako ľavého, tak jeho posun doprava je nanajvýš rovnako veľký (polovica nanajvýš rovnakej vzdialenosti) ako posun jeho ľavého kamaráta doprava, takže sa jeho vzdialenosť od ľavého kamaráta nezväčší. Teoreticky by sa tá vzdialenosť mohla zmenšiť natoľko, že by musel spraviť krok doľava, ale to by nám vznikol škripec a úlohu by nám doriešil indukčný predpoklad. Takže matematici v nerastúcich rozostupoch pekne kráčajú k svojmu manažérovi alebo sa vrhajú do pazúrov indukčného predpokladu.

Takže Jožko a všetci za ním pôjdu doprava a tí pred ním úplne rovnako doľava. Ostáva si rozmyslieť, či niekedy dôjdu do cieľa. Najprv je matematikov iba konečný počet, takže existuje ten, ktorý je najbližšie pravému manažérovi. Ten sebavedomo skracuje vzdialenosť medzi sebou a manažérom na polovicu, až kým dôjde do vzdialenosti 0.5 metra, čo určite vie, lebo nech začíname s ľubovoľným x, tak vieme nájsť n dosť veľké, že $\frac{x}{2^n}$ bude menej ako 0.5. Druhý matematik zľava síce neskracuje vzdialenosť priamo k manažérovi, ale k prvému matematikovi. Ten je však v konečnom čase za métou 0.5 m od manažéra. Teda druhý matematik sa k manažérovi začne približovať aspoň tak rýchlo, akoby delil vzdialenosť medzi sebou a 0.5 m na polku, preto po nejakom čase bude $\frac{1}{4}$ m od $\frac{1}{2}$ m, čo je 0.75 m od manažéra. Tretí matematik začne poliť svoju vzdialenosť od 0.75 m od manažéra, až sa dostane na $\frac{1}{8}$ na od $\frac{1}{4}$ m od $\frac{1}{2}$ m. A tak ďalej. Všimnime si, že všetci sa takýmto spôsobom do toho 1 m zmestia :).

1.10 Krtko Mýlil Sa

Zadanie. *V kráľovstve ďaleko, ďaleko za horami bol kráľ, ktorý bol veľmi bohatý. Mal nekonečné množstvo zlata a drahých kameňov, ale jedna vec mu chýbala – poklad. Chcel nájsť poklad, ktorý by bol tak cenný, že by ho nikto iný nemal.*

Jedného dňa prišiel Krtko s neobvyklým riešením. Povedal kráľovi, že existuje poklad, ktorý sa skrýva v dvojiciach celých čísel (x, y), ktoré spĺňajú rovnicu

$$x^2 - y^3 = 999.$$

Kráľ sa veľmi tešil, že sa mu podarilo nájsť taký vzácny poklad.

Krtko začal hľadať dvojice čísel, ktoré spĺňali rovnicu. Bol veľmi trpezlivý a dôsledný a po dlhom hľadaní našiel nasledovné dvojice čísel: $(27, 9), (32, 8), (36, 7)$. Kráľ bol veľmi rozhorčený, keď zistil, že Krtkovo riešenie je zle! Pomôžte kráľovi nájsť jeho vysnený poklad a nájdite všetky celočíselné riešenia danej rovnice.

Riešenie. opravuje **Michal Staník** (michal.stanik@trojsten.sk)

$$x^2 - y^3 = 999.$$

Máme pred sebou rovnicu v celých číslach, môžeme teda začať tým, že sa na ňu pozrieme modulo nejaké malé číslo a budeme skúmať zvyšky po delení, ktoré dávajú jednotlivé strany.

Ak by y bolo párne, bolo by y^3 deliteľné 8 a mali by sme $x^2 \equiv 999 \equiv 7 \pmod 8$, čo ale nastať nemôže, pretože druhé mocniny majú zvyšky modulo 8 iba 0, 1 a 4. Môžete sa presvedčiť tak, že si umocníte jednotlivé zvyšky od 0 do 7 na druhú. V skutočnosti stačí overovať len po 4, pretože napríklad $6^2 \equiv (-2)^2 \equiv 2^2 \pmod 8$.

Preto je y nepárne, čiže $y = 2k + 1$ pre nejaké celé číslo k.

Rovnicu upravíme do tvaru

$$x^2 + 1 = y^3 + 1000 = (y + 10)(y^2 - 10y + 100) =$$

$$= (2k + 11)(4k^2 + 4k + 1 - 20k - 10 + 100) = (2k + 11)(4k^2 - 16k + 91).$$

Druhá zátvorka má zvyšok $91 \equiv 3 \pmod 4$, preto musí byť deliteľná nejakým prvočíslom p tvaru $4l + 3$. Dvojkou byť deliteľná nemôže a keby bola deliteľná len prvočíslami tvaru $4l+1$, mala by zvyšok 1 modulo 4 (všetky jednotky by sa vynásobili na jednotku modulo 4).

Ešte by sa to dalo obísť tak, že by bola záporná (napr. -5 alebo -1 majú zvyšok 3 po delení 4 a nie sú deliteľné žiadnym prvočíslom tvaru $4l + 3$). Avšak to sa nám stať nemôže, pretože $(4k^2 - 16k + 91) = (2k - 4)^2 + 75$, čo je vždy kladné.

Potom p delí pravú stranu rovnice, takže delí aj ľavú, čiže $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$. To je ale spor, pretože -1 nikdy nie je kvadratický zvyšok (zvyšok x^2 pre nejaké x) modulo prvočíslo tvaru $4l + 3$. Rovnica preto nemá žiadne celočíselné riešenie.

To, že -1 nie je kvadratický zvyšok modulo žiadne prvočíslo tvaru $4l + 3$, je známe tvrdenie, ale tých, čo ho nepoznáte, to asi neuspokojí. Poďme si to teda poriadne zdôvodniť. Každé číslo x nesúdeliteľné s modulom má svoj tzv. rád, čo je najmenšia kladná mocnina, na ktorú ho musíme umocniť, aby sme dostali 1, teda $x^r \equiv 1 \pmod p$, kde r je rád x modulo p. Zvyšky mocnín x sa potom opakujú s periódou rovnou jeho rádu.

Predpokladajme, že platí $x^2 \equiv -1 \pmod p$. Aký môže byť rád r čísla x? Z nášho predpokladu vieme, že $x^4 = (x^2)^2 \equiv (-1)^2 = 1 \pmod p$. Teda rád musí byť 1, 2 alebo 4 (rozmyslite si, prečo nemôže byť 3). Z Malej Fermatovej vety vieme, že $x^{p-1} = x^{4l+2} \equiv 1 \pmod p$. Z toho plynie, že rád musí deliť $4l + 2$ (pretože je to najmenšia perióda a $4l + 2$ je nejaký neznámy počet celých periód), a teda $r \neq 4$.

Ak $r = 1$, tak máme $x \equiv 1 \pmod p$. Ak $r = 2$, tak máme $x^2 \equiv 1 \pmod p$. V oboch prípadoch platí $-1 \equiv x^2 \equiv 1 \pmod p$, z čoho nutne musí byť $p = 2$, ale to nie je tvaru $4l + 3$. Tým sme ukázali, že -1 nemôže byť kvadratický zvyšok pre žiadne prvočíslo tvaru $4l + 3$ a náš dôkaz je hotový.