Korešpondenčný matematický seminár
XLIV. ročník, 2022/2023
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Riešenia 2. kola letnej časti

2.1 Kasíno Mokrých Spŕch ($\kappa \leq 1$)

Zadanie. *Žirafka Kubko bola, ako každý štvrtok večer, v kasíne na dámskych sprchách zahrať si kocky. Avšak tento štvrtok tam nebola žiadna konkurencia. Kubka to úplne zarmútilo, ako si má žirafka zahrať hazard, keď má výhru skoro istú. A tak sa radšej išla hrať s n kockami. Keď si z nich všetkých chcela postaviť štvorec (t. j. kváder $1 \times a \times a$ pre nejaké prirodzené číslo a), zistila, že jej jedna chýba. Keď si z nich chcela postaviť kocku, opäť jej jedna chýbala. Ukážte, že n nie je prvočíslo.*

Riešenie. opravuje **Skaloš** (jakub.skalos@trojsten.sk)

Zapíšme si, čo nám hovorí zadanie. n kocočiek sme (skoro) poukladali do štvorca, ale jedna chýbala. Teda ak a je strana tohto štvorca, tak platí $n = a^2 - 1$. Obdobne sme kocočky (skoro) poukladali do väčšej kocky, len jedna chýbala. Keď označíme stranu kocky b, tak platí $n = b^3 - 1$. (Obe a aj b sú prirodzené čísla.)

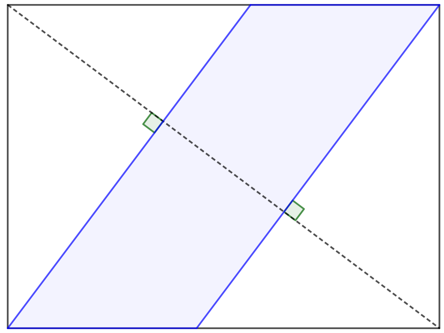
Keď už máme aspoň trošku skúseností s výrazmi a vzorčekmi, ľahko si uvedomíme, že platí $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$. Teda číslo n vieme zapísať ako súčin dvoch prirodzených čísel. Ak by bolo n prvočíslo, tak jedno z nich musí byť 1. Nutne to musí byť $a - 1$, lebo je z tých dvoch menšie. Preto $a = 2$ a $n = 3$.

Máme však aj druhú rovnosť, a to že $n = b^3 - 1$ pre nejaké prirodzené b. V našom prípade by tak malo platiť $b^3 = 4$, avšak také b zjavne nie je prirodzené. Teda ten jediný prípad, kedy je $(a-1)(a+1)$ prvočíslo, nevyhovuje druhej podmienke, a tak n je vždy zložené.

2.2 Kde Most Stavať? ($\kappa \leq 2$)

Zadanie. *Žirafka Pedro sa potulovala po svojom obdĺžnikovom výbehu, keď tu si všimla, že jej výbehom prechádza rieka, ktorá tam nikdy predtým nebola. Podišla bližšie, aby ju mohla preskúmať.*

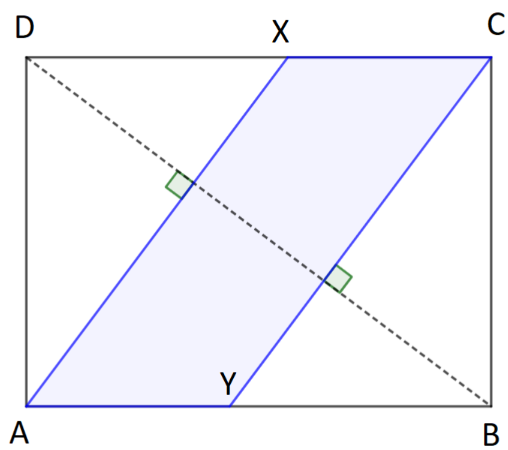
Brehy riek sa tiahli rovno od protiľahlých vrcholov kolmo na uhlopriečku výbehu spájajúcu ostatné dva vrcholy až ku protiľahlým stranám, ako na obrázku 2.1 (obrázok je len ilustračný). Akú časť Pedrovho výbehu zaberala rieka, ak boli rozmery výbehu 30 m × 40 m?



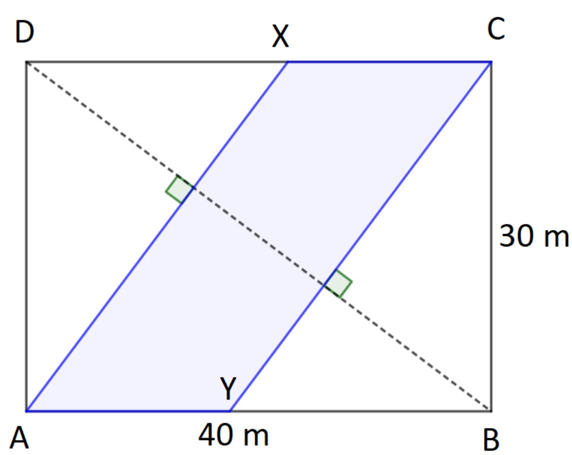
Obrázok 2.1: *Výbeh*

Riešenie. opravuje **Filip** (filip.kotoc@trojsten.sk)

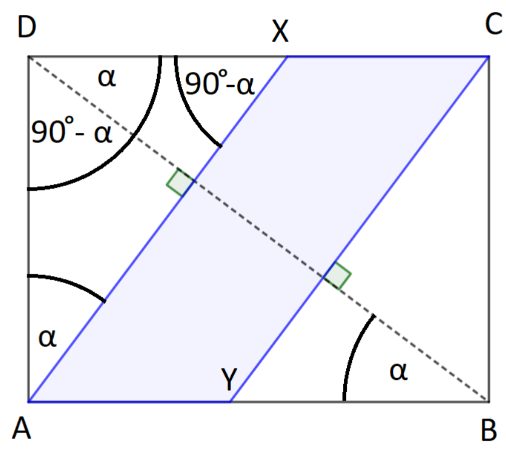
Začnime tým, že si v obrázku pomenujeme potrebné body.



Uvedomme si, že keďže bod X, ktorý vznikol pomocou kolmice na uhlopriečku DB, sa nachádza na úsečke CD, tak potom úsečka CD musí byť dlhšia strana obdĺžnika. Označme si teda v našom obrázku aj dĺžky strán.



Následne si v ňom označíme $|\sphericalangle ABD| = \alpha$ a za tým zo súčtu uhlov trojuholníka ABD vieme, že $|\sphericalangle ADB| = 180° - |\sphericalangle BAD| - |\sphericalangle ABD| = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$. Potom si vieme dopočítať uhol $\sphericalangle BDC$ ako $90° - |\sphericalangle ADB| = \alpha$. Ďalej vidíme, že uhlopriečka BD nám zviera $90°$ uhol s úsečkou AX, teda nám vznikajú 2 pravouhlé trojuholníky s dvomi uhlami, v ktorých si ľahko dopočítame tretí.



Keďže úsečky AX a YC sú obe kolmé na uhlopriečku BD, tak musia byť navzájom rovnobežné, taktiež vieme, že úsečky AY a XC sú navzájom rovnobežné, a teda celý štvoruholník $AXCY$ musí byť rovnobežník. Teraz si na obrázku môžeme rýchlo všimnúť, že na základe vety *uu* sú trojuholníky $\triangle ABD \sim \triangle DAX$ podobné.

Zistime si teda koeficient podobnosti k a na základe známych dĺžok strán dopočítame $|DX|$.

$$k = \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AD|}{|DX|},$$

$$k = \frac{40\text{ m}}{30\text{ m}} = \frac{30\text{ m}}{|DX|},$$

$$|DX| = \frac{30\text{ m} \cdot 30\text{ m}}{40\text{ m}},$$

$$|DX| = 22{,}5\text{ m}.$$

Keďže $|DC| = 40$ m a $|DX| = 22{,}5$ m, tak potom $|XC| = 40\text{ m} - 22{,}5\text{ m} = 17{,}5$ m. Obsah rieky teda vypočítame ako podstava krát výška.

$$S_{\text{rieka}} = |XC| \cdot |BC| = 17{,}5\text{ m} \cdot 30\text{ m} = 525\text{ m}^2.$$

Obsah celej záhrady je

$$S = |AB| \cdot |BC| = 40\text{ m} \cdot 30\text{ m} = 1200\text{ m}^2$$

Celá rieka zaberá $\frac{S_{\text{rieka}}}{S} = \frac{525\text{ m}^2}{1200\text{ m}^2} = \frac{7}{16}$ záhrady.

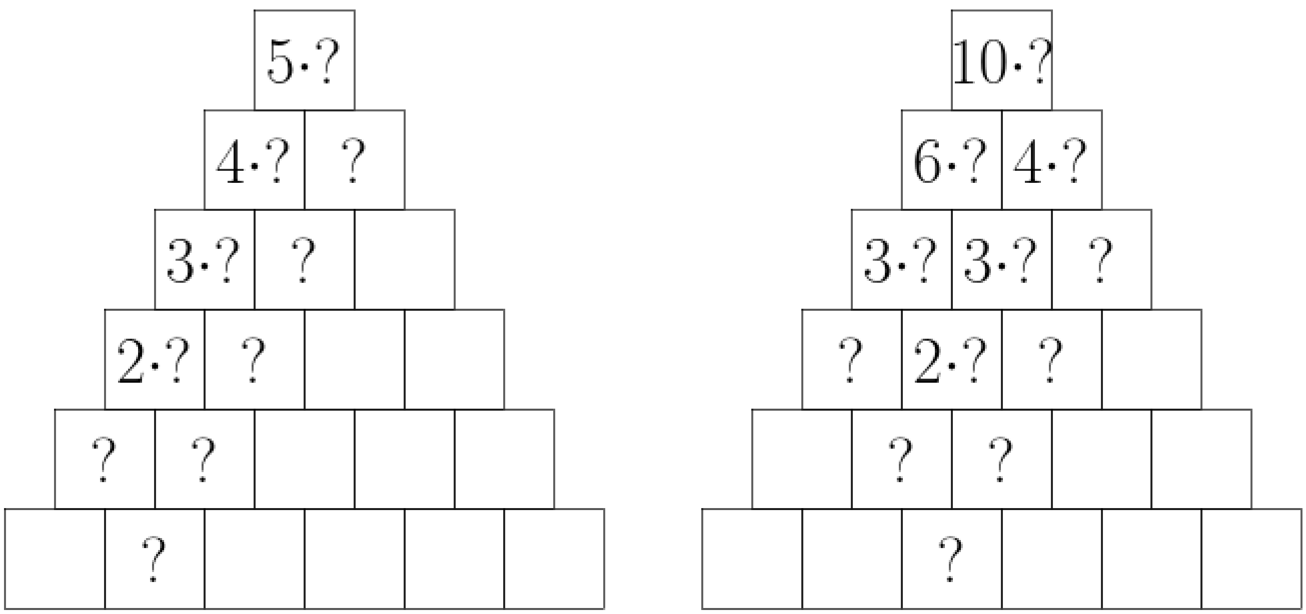
2.3 Kradneme Mačku Sfingu ($\kappa \leq 3$)

Zadanie. *Žirafka Mati sa prechádzala púšťou, keď tu kútikom oka zbadala veľké trojuholníkové objekty. Po chvíli úpenlivého hľadenia si uvedomila, že to vyzerá ako jej obľúbené sčítacie pyramídy. Tu sa však nič nesčituje! Bola z toho rozhorčená, a tak si začala do piesku kresliť klasickú sčítaciu pyramídu.*

Sčítaciu pyramída má základňu veľkosti 6[1] *a naspodu má 6 po sebe idúcich čísel, v ľubovoľnom poradí. Keď pyramídu žirafka vyplnila, navrchu jej vyšlo číslo 2022. Avšak keď sa o rok vrátila pozrieť pyramídy, svoju už v piesku nenašla. Aké čísla mohli byť na spodnom poschodí pôvodnej pyramídy, a v akom poradí? Nájdite všetky možnosti.*

Riešenie. opravuje **Adri** (adrianka.janackova@trojsten.sk)

Než sa pustíme do samotného riešenia, zamyslime sa nad tým, ako ovplyvňuje pozícia čísla v spodnom riadku hodnotu na vrchole pyramídy. Pri počítaní nasledujúceho riadku sa krajné čísla zarátajú vždy len v jednom políčku. Stredné políčka riadku majú naopak nad sebou 2 nové políčka, do ktorých sa zarátajú. Číslo, ktoré bolo v spodnom riadku na kraji sa teda saráta iba raz. Políčko vedľa sa zaráta 5-krát, a číslo z políčok uprostred sa zaráta až 10-krát. To si koniec koncov môžeme všimnúť aj na obrázku 3.1.



Obrázok 3.1: *Vplyv čísel na spodku pyramídy na číslo na jej vrchole*

Prejdime k našej úlohe. Označme si x najmenšie číslo zo šestice v spodnom riadku. Ostatné čísla budú (v nejakom neznámom poradí) $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$, $x+5$. Aby sme mohli počítať s umiestnením v spodnom riadku, povedzme, že číslo vľavo bude $x+a$, vedľa neho $x+b$, potom $x+c$, $x+d$, $x+e$ až $x+f$. Číslo na vrchu pyramídy tak môžeme napísať ako

$$(x+a)+5\cdot(x+b)+10\cdot(x+c)+10\cdot(x+d)+5\cdot(x+e)+(x+f)=32x+a+5b+10c+10d+5e+f.$$

[1] Teda číslo je vždy súčtom tých dvoch pod ním a úplne naspodku je 6 čísel.

Vieme, že číslo na vrchu pyramídy je 2022. Dostaneme ho teda ako 32-násobok najmenšieho čísla v spodnom riadku plus $a + 5b + 10c + 10d + 5e + f$, pričom a, b, c, d, e, f sú navzájom rôzne celé čísla od 0 po 5. Na obmedzenie možných x nám pomôže zistiť, aké hodnoty môže mať $a + 5b + 10c + 10d + 5e + f$. Keď najmenšie čísla vezmeme najmenej ráz a najväčšie najviac, dostaneme najväčší súčet, ktorý je

$$0 + 5 \cdot 2 + 10 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 1 = 116.$$

Naopak, ak vezmeme najmenšie čísla najviackrát a najväčšie najmenejkrát, dostaneme najmenší súčet, ktorý má hodnotu

$$5 + 5 \cdot 3 + 10 \cdot 1 + 10 \cdot 0 + 5 \cdot 2 + 4 = 44.$$

Takže $32x$ bude medzi číslami 1906 $(= 2022 - 116)$ a 1978 $(= 2022 - 44)$. Jediné násobky 32 v tomto rozmedzí sú 1920 a 1952. Vidíme, že $1920 : 32 = 60$ a $2022 - 1920 = 102$ a $1952 : 32 = 61$ a $2022 - 1952 = 70$. Jediné možné vyhovujúce množiny čísel sú teda 60 až 65 s $a+5b+10c+10d+5e+f = 102$ a 61 až 66 s $a+5b+10c+10d+5e+f = 70$. Zadanie sa ale pýta na konkrétne poradia, preto musíme nájsť aj tie.

Všimnime si, že vymenením a, f neovplyvníme hodnotu súčtu $a+5b+10c+10d+5e+f$, podobne ani vymenením b, e či c, d. Preto môžeme predpokladať, že $a < f, b < e, c < d$, pričom pre každé takéto riešenie sa môžeme rozhodnúť ľubovoľné dvojice prehodiť. To však znamená, že pre každú dvojicu máme 2 možnosti (prehodiť/neprehodiť) a dokopy je všetkých možných preusporiadaní preto $2^3 = 8$.

Čísla 60 až 65

Vieme, že $a + 5b + 10c + 10d + 5e + f = 102$. To však znamená, že $a + f$ dáva zvyšok 2 po delení piatimi. Keďže ale $a, f \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ a taktiež $a < f$, tak možné dvojice (a, f) sú $(0, 2)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$.

Pre dvojicu $(0, 2)$ dostávame $5b + 10c + 10d + 5e = 100 \Leftrightarrow b + 2c + 2d + e = 20$, a teda $b + e$ musí byť párne, a teda b, e musia mať rovnakú paritu. Nakoľko nám však ostávajú už len čísla $\{1, 3, 4, 5\}$, možné dvojice (b, e) sú $(1, 3)$, $(1, 5)$, $(3, 5)$. Z nich sú už c, d očividne jednoznačne určené. Hodnota súčtu $b + 2c + 2d + e$ je pre tieto dvojice postupne $22, 20, 18$, čiže vyhovuje len šestica $60, 61, 63, 64, 65, 62$ a jej spomínané preusporiadania.

Pre zvyšné dve dvojice očividne platí $a + f = 7$, a preto $5b + 10c + 10d + 5e = 95 \Leftrightarrow b + 2c + 2d + e = 19$. Vidíme teda, že $b + e$ musí byť nepárne, čiže b, e musia mať rozličnú paritu.

Pri dvojici $(2, 5)$ nám ostávajú čísla $\{0, 1, 3, 4\}$, takže možné dvojice (b, e) sú $(0, 1)$, $(0, 3)$, $(1, 4)$, $(3, 4)$. Pre ne súčet $b + 2c + 2d + e$ nadobúda hodnoty $15, 13, 11$ a 9, čiže pre túto dvojicu nemáme riešenie.

No a pri dvojici $(3, 4)$ máme ešte k dispozícii $\{0, 1, 2, 5\}$, preto možné dvojice (b, e) sú $(0, 1)$, $(0, 5)$, $(1, 2)$, $(2, 5)$ a im prislúchajúce súčty vychádzajú $15, 11, 13, 9$, čiže ani tu ďalšie riešenia nenájdeme.

Čísla 61 až 66

Teraz má súčet $a + 5b + 10c + 10d + 5e + f$ hodnotu 70. To však znamená, že $b + e$ musí byť deliteľné piatimi. Možné dvojice (a, f) sú teda $(0, 5)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$. Všimnime si, že vo všetkých platí $a + f = 5$, čiže vieme vo všeobecnosti povedať, že $5b + 10c + 10d + 5e = 65 \Leftrightarrow b + 2c + 2d + e = 13$, a teda b, e musia mať rozličnú paritu.

Začnime dvojicou $(0, 5)$. Zostávajú nám čísla $\{1, 2, 3, 4\}$, pre ktoré možné dvojice (b, e) sú $(1, 2)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$ a im prislúchajúce súčty sú $17, 15, 15, 13$. Vyhovuje teda šestica $61, 64, 62, 63, 65, 66$.

Následne vezmime dvojicu $(1,4)$. Pre zostávajúce čísla $\{0,2,3,5\}$ sú možnými dvojicami (b,e) dvojice $(0,3)$, $(0,5)$, $(2,3)$, $(2,5)$. Hodnoty $b+2c+2d+e$ pre tieto dvojice sú $17, 15, 15$ a 13, čiže v tejto vetve vyhovuje šestica $62, 63, 61, 64, 66, 65$.

Nakoniec nám ostáva už len dvojica $(2,3)$. Tentokrát vyberáme b, e z čísel $\{0,1,4,5\}$, čiže možné dvojice sú $(0,1)$, $(0,5)$, $(1,4)$, $(4,5)$. Im prislúchajú súčty $19, 15, 15$ a 11, čiže tu sme ďalšie riešenie nenašli.

Riešeniami sú teda šestice $(60,61,63,64,65,62)$, $(61,64,62,63,65,66)$, $(62,63,61,64,66,65)$ a ich permutácie, kde prehodíme prvé číslo so šiestym, druhé s piatym a/alebo tretie so štvrtým. Z každej z týchto možností teda vieme vyrobiť 7 ďalších (dokopy ich je $2^3 = 8$) a celkovo máme 24 možností.

2.4 Krv z Miech Špliecha ($\kappa \leq 5$)

Zadanie. *Žirafka Lucka bola na exkurzii v nemocnici, kde bola svedkom chirurgickej operácie. To ju zaujalo natoľko, že sa rozhodla s touto operáciou pohrať doma (samozrejme len na plyšových zvieratkách).*

Nech operácia $a * b$ je definovaná ako $a * b = a + b - \lfloor a+b \rfloor$.[2] Uvažujme čísla tvaru x, $x * x$, $(x * x) * x$, $((x * x) * x) * x$, ... až po ľubovoľné konečné opakovanie operácie $*$. Dokážte, že existuje nekonečne veľa čísel $x \in \langle 0; 1)$, pre ktoré sa žiadne z týchto čísel nerovná nule.

Riešenie. opravujú **Marek** (marek.tkac@trojsten.sk) a **David** (david.belobrad@trojsten.sk)

Najprv si dokážeme vlastnosť dolnej celej časti, ktorú budeme potrebovať. Ukážeme, že ak z patrí celým číslam a a je ľubovolné reálne číslo, tak $\lfloor z+a \rfloor = z + \lfloor a \rfloor$. Z definície dolnej celej časti ľahko vyplýva nerovnosť $a - 1 < \lfloor a \rfloor \leq a$. Z toho vidíme, že platí nerovnosť $z + a - 1 < z + \lfloor a \rfloor \leq z + a$. No vieme, že $z + \lfloor a \rfloor$ je celé číslo a keďže medzi číslami $z + a - 1$ a $z + a$ je len jedno celé číslo, tak je $z + \lfloor a \rfloor$ aj najväčšie celé číslo menšie rovné $z + a$. Ale z definície potom $\lfloor z+a \rfloor = z + \lfloor a \rfloor$.

Teraz sa pozrime na x, $x * x$, $(x * x) * x$, $((x * x) * x) * x, \ldots$. Najprv, definujme $x^{(k)} := \underbrace{(\cdots((x * x) * x)\cdots) * x}_{k-1 \text{ operácií}}$.

Teda $x^{(1)} = x$, $x^{(2)} = x * x$, $x^{(3)} = (x * x) * x$, atď. Indukciou teraz ukážeme, že pre $x \in \langle 0; 1)$ platí $x^{(k)} = kx - \lfloor kx \rfloor$ (ak s indukciou nie ste ešte až tak skusení, na tréning je vhodná napríklad zbierka úloh KMS, sekcia 1.2). V indukcií potrebujeme spraviť dva podstatné kroky. Konkrétne ukázať, že to platí pre najmenšiu možnú hodnotu premennej (v našom prípade $k = 1$) a potom ukázať, že ak naše tvrdenie platí pre nejaké konkrétne k, bude platiť aj pre $k + 1$.

Prvý krok: Pre $k = 1$, $x^{(1)} = x = x - 0 = x - \lfloor x \rfloor$, pretože $x \in \langle 0; 1)$.

Druhý krok: Nech v tomto prípade $k = i$, potom predpokladáme, že $x^{(i)} = ix - \lfloor ix \rfloor$. Potom

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} * x = (ix - \lfloor ix \rfloor) * x = ix + x - \lfloor ix \rfloor - \lfloor ix + x - \lfloor ix \rfloor \rfloor.$$

Keďže $-\lfloor ix \rfloor$ je celé číslo, tak

$$x^{(i+1)} = ix + x - \lfloor ix \rfloor - \lfloor ix + x - \lfloor ix \rfloor \rfloor = ix + x - \lfloor ix \rfloor - (-\lfloor ix \rfloor + \lfloor ix + x \rfloor) =$$
$$= ix + x - \lfloor ix + x \rfloor = (i+1)x - \lfloor (i+1)x \rfloor,$$

[2] Dolná celá časť $\lfloor a+b \rfloor$ je definovaná ako najväčšie celé číslo z také, že $z \leq a + b$, teda $\lfloor 0,9 + 1,8 \rfloor = \lfloor 2,7 \rfloor = 2$ alebo $\lfloor -3,2 + 0,4 \rfloor = \lfloor -2,8 \rfloor = -3$.

čo sme chceli dokázať. Teraz už ľahko nájdeme x, ktoré hľadáme. Nech n je náš počet opakovaní operácie. Potom hľadáme čísla x také, že pre všetky $i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ je $x^{(i)} \neq 0$. Ale to je

$$0 \neq x^{(i)} = ix - \lfloor ix \rfloor$$

Ľahko vidíme, že ak zoberieme ľubovolné $x \in (0, \frac{1}{n+1})$, tak $0 < ix < 1$, a teda $x^{(i)} = ix - \lfloor ix \rfloor = ix - 0 = ix$, čo je rôzne od nuly pre všetky $i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$. Keďže medzi 0 a $\frac{1}{n+1}$ je nekonečne veľa čísel, sme hotoví.

Poznámka: Existuje dokonca nekonečne veľa čísel, pre ktoré je $x^{(i)}$ rôzne od nuly pre ľubovolné $i \in \mathbb{N}$. Uvažujme ľubovolné iracionálne číslo, označme ho a. Sporom, ak by existovalo $i \in \mathbb{N}$ také, že $a^{(i)} = 0$, tak:

$$0 = a^{(i)} = ai - \lfloor ai \rfloor \implies ai = \lfloor ai \rfloor \implies a = \frac{\lfloor ai \rfloor}{i},$$

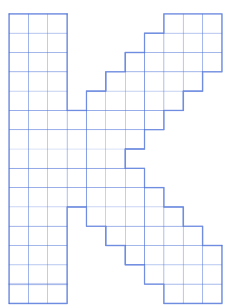
čo je spor, pretože $i \in \mathbb{N}, \lfloor ai \rfloor \in \mathbb{N}_0$, a teda by a malo byť racionálne. Teda ľubovolné iracionálne číslo je riešenie našej úlohy, a vieme, že iracionálnych čísel medzi nulou a jednotkou je nekonečne veľa.

2.5 Krotil Medveď Strelcov? ($\kappa \leq 8$)

Zadanie. *Medveď Daniel bol na lukostreleckej súťaži, na ktorej povedal faaakt zlý vtip o žirafách. Žirafky to nemohli nechať len tak, takže Medveďa Daniela zmlátili. Zhabali mu aj všetky luky a šípy, a tak sa z nich stali žirafí strelci.*

Majme prvú KMS šachovnicu ako na obrázku 5.1. Žirafí strelec sa vie hýbať diagonálne o ľubovoľný počet políčok, ale počas svojho pohybu nesmie opustiť šachovnicu.

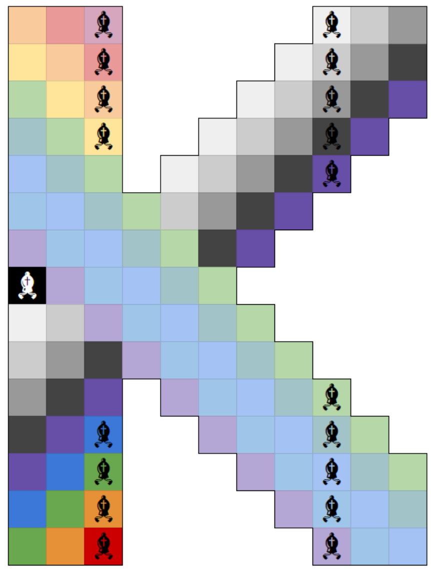
1. *Koľko najviac žirafích strelcov možno umiestniť na šachovnicu tak, aby sa žiaden žirafí strelec nedokázal jedným ťahom pohnúť na políčko iného žirafieho strelca?*
2. *Koľko najmenej farieb je potrebných na ofarbenie políčok šachovnice tak, aby medzi ľubovoľnými dvoma políčkami rovnakej farby bolo možné spraviť jeden ťah žirafím strelcom?*



Obrázok 5.1: *Prvá z troch KMS šachovníc*

Riešenie. opravuje **Danko** (daniel.teplan@trojsten.sk)

Je pomerne nenáročné umiestniť na šachovnicu 19 strelcov tak, aby sa navzájom neohrozovali. Napríklad ako na obrázku nižšie. K týmto 19 strelcom vieme tiež pomerne jednoducho šachovnicu zafarbiť 19 farbami tak, aby každá bola na jednej diagonále, teda sa jedným ťahom dá dostať medzi všetkými políčkami jednej farby (dokonca aj každý strelec stojí na inej farbe).



Potrebujeme však ešte dôkaz, že viac ako 19 strelcov umiestniť nevieme, a nevieme šachovnicu ofarbiť menej ako 19 farbami. Našťastie, tento dôkaz už máme pred sebou. Ak by sme mali na šachovnicu umiestniť 20 (a viac) strelcov, museli by sme na niektorú z farieb položiť dvoch strelcov. Tí by sa však ohrozovali, keďže z každého políčka sa dá pohnúť na všetky ostatné rovnakej farby. Teda sa určite nedá umiestniť 20 alebo viac strelcov. A pre 19 sme rozloženie našli.

Ak by sme mali ofarbiť šachovnicu iba 18 (alebo menej) farbami, museli by na niektorej farbe stáť dvaja strelci z našich 19 umiestnených. Tí sa však určite neohrozujú, čiže medzi týmito políčkami sa nebude dať dostať na jeden ťah. Teda sa určite nedá ofarbiť menej ako 19 farbami, a pre 19 farieb sme ofarbenie našli.

2.6 (NE)Konvexne Miznú Škvrny

Zadanie. *Žirafka Viktor sa rozhodla, že sa pôjde kúpať do Bermudského trojuholníka. Keď vyliezla z vody, všimla si na sebe niečo podivné. Namiesto zvyčajných škvŕn mala zrazu po celom tele nekonvexné trolluholníky. Nevedela, čo s tým spraviť, tak sa išla poradiť za miestnou čarodejnicou Kajou. Tá jej povedala, že jediný spôsob ako to vyliečiť, je vyriešiť nasledujúcu úlohu.*

V ostrouhlom trojuholníku ABC označme D pätu výšky na stranu BC. Zvoľme bod G ľubovoľne na úsečke AD. Ďalej označíme X pätu kolmice z bodu A na priamku BG a Y pätu kolmice z A na CG. Dokážte, že body B, C, X, Y ležia na kružnici.

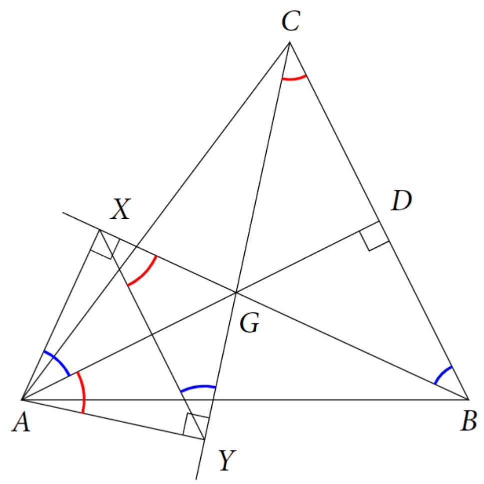
Riešenie. opravuje **Kubo P.** (jakub.poljovka@trojsten.sk)

Dokázať, že štyri body sú na kružnici vieme napríklad tak, že nájdeme dva uhly nad spoločnou úsečkou so zhodnou veľkosťou. Poďme sa teda pozrieť na niektorý z takýchto uhlov v štvoruholníku $BCXY$.

Pri riešení úlohy by sme takisto chceli využiť aj informácie o pravých uhloch zo zadania. Po preskúmaní náčrtu si môžeme všimnúť, že trojuholníky GDB a GXA zdieľajú jeden vrcholový a jeden pravý uhol, čiže sú si podobné. Z toho vieme určiť aj rovnosť uhlov $\sphericalangle DBG$ a $\sphericalangle GAX$.

Ďalšie dôležité pozorovanie vieme spraviť pri štvoruholníku $AYGX$. Protiľahlé uhly pri vrcholoch Y a X sú oba pravé a dávajú dokopy $180°$, čím robia zo štvoruholníka $AYGX$ tetivový štvoruholník. Tým pádom vieme povedať, že uhly $\sphericalangle GAX$ a $\sphericalangle XYG$ sú zhodné, nakoľko sú to obvodové uhly.

Spojením predchádzajúcich dvoch rovností dostávame taktiež rovnosť uhlov $\sphericalangle CBX$ a $\sphericalangle CYX$. Nakoľko tieto dva uhly sú nad spoločnou úsečkou CX, sú tieto dva uhly obvodové a body B, C, X, Y ležia na kružnici.



Iné riešenie

Zo zadania vyplýva istá symetria konfigurácie cez výšku AD. Rovnakým postupom by sme sa vedeli dopracovať k rovnosti uhlov $\sphericalangle YCB$ a $\sphericalangle YXB$, čím by sme taktiež dospeli k rovnakému výsledku.

2.7 Krásna Modrooká Snehulienka

Zadanie. *Žirafka Laura sa prechádzala po svojom žirafom zámku a obzerala si svoju zbierku zrkadiel. Keď si spomenula na svoju obľúbenú rozprávku o Snehulienke, tak neodolala a opýtala sa: „Zrkadielko, zrkadielko, povedz mi, kto je najkrajší na svete?“ Kupodivu jedno zo zrkadiel žirafke Laure spokojne odpovedalo: „No predsa Miško!“ To žirafku Lauru úplne vyviedlo z miery až tak, že výraz jej tváre stál za samostatnú úlohu.*

Majme výraz $n^4 + k$, kde n, k sú celé kladné čísla. Dokážte, že existuje nekonečne veľa čísel k takých, že pre všetky čísla n je daný výraz zložené číslo.

Riešenie. opravuje **Michal Staník** (michal.stanik@trojsten.sk)

Najjednoduchší spôsob, ako ukázať, že hodnota nejakého výrazu je zložené číslo, je rozložiť ho na súčin. V niektorých úlohách sa dá nájsť prvočíslo, ktoré delí všetky hodnoty výrazu, ale dá sa tušiť, že toto v našej úlohe použiť nepôjde. Je veľmi nepravdepodobné, že $n^4 + k$ (pre nejaké k) bude pre všetky n deliteľné jedným a tým istým prvočíslom.

Ak by sme mali výraz $n^4 - k$, bola by naša úloha veľmi jednoduchá, pretože by nám stačilo vziať k, ktoré je druhou mocninou prirodzeného čísla, a využiť vzorec $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ (každá štvrtá mocnina je zároveň druhou mocninou).

Pokúsme sa však našu myšlienku využiť a nejako ju vylepšiť. Povedzme, že by sme náš výraz chceli dostať ako druhú mocninu nejakého výrazu tvaru $(n^2+k_1)^2$. Toto priamočiaro aplikovať nejde, pretože namiesto $n^4+k_1^2$ dostaneme $n^4+2k_1n^2+k_1^2$, čo je presne o $2k_1n^2$ viac, než by sme chceli. Nevadí, poďme to opraviť:

$$n^4+k_1^2=(n^2+k_1)^2-2k_1n^2.$$

Nezabudnite, že k si volíme, môžeme si teda dávať podmienku typu, že je to štvorec nejakého čísla k_1 a podobne, len musí stále existovať nekonečne veľa k, ktoré podmienky spĺňajú.

Získaný výraz nám pripomína rozdiel dvoch štvorcov. Jediné, čo na to potrebujeme, je, aby bol $2k_1n^2$ štvorec, čo je ekvivalentné s tým, že $2k_1$ je štvorec. Nech teda $k_1=2k_2^2$, potom budeme mať $2k_1=4k_2^2=(2k_2)^2$, čo je štvorec[3]. Rozložením výrazu teraz dostaneme

$$n^4+k_1^2=(n^2+k_1)^2-2k_1n^2=(n^2+2k_2^2)^2-4k_2^2n^2=(n^2+2k_2^2)^2-(2k_2n)^2=(n^2+2k_2^2-2k_2n)(n^2+2k_2^2+2k_2n).$$

Výborne, rozklad na súčin je na svete. Ostáva overiť, že žiadna zo zátvoriek nie je $+1$ ani -1, pretože taký rozklad by nám k ničomu nepomohol. Podobne nechceme, aby niektorá zátvorka bola 0, pretože vtedy by celý výraz bol nulový. Druhá zátvorka je súčtom troch prirodzených čísel, takže je aspoň 3. Prvá zátvorka pripomína druhú mocninu rozdielu s tým, že je tam niečo navyše. Upravíme ju na

$$n^2+2k_2^2-2k_2n=(n-k_2)^2+k_2^2.$$

Máme súčet druhých mocnín, ktorý je vždy nezáporný. Navyše, pre $k_2\geq 2$ je vždy aspoň $4>1$, ako sme chceli.

Našli sme teda nekonečne veľa vhodných k, ktoré sú tvaru $k=k_1^2=(2k_2^2)^2=4k_2^4$ pre prirodzené $k_2\geq 2$. Týchto čísel je zrejme nekonečne veľa, pretože pre rôzne k_2 dostávame rôzne kladné celé čísla k, čím je úloha hotová.

2.8 Kropíme Matúša Skúsenosťami

Zadanie. *Žirafky šli spokojne lesom, keď tu zrazu na nich vybehol nebezpečný Matúš, ktorého sa bojí celé okolie. Žirafky začali utekať. Našťastie nabrali veľa skúseností z hororov a vedeli, že najlepšie, čo môžu spraviť, je rozdeliť sa. A tak sa začali zamýšľať nad delením.*

Pre kladné celé číslo n značí $d(n)$ počet rôznych deliteľov čísla n (vrátane 1 a n). Nech $a>1$ a $m>0$ sú celé čísla také, že a^m+1 je prvočíslo. Dokážte, že potom $d(a^m-1)\geq m$.

Riešenie. opravuje **Mimi** (matej.hanus@trojsten.sk)

Najprv nejako využijeme informáciu, že a^m+1 je prvočíslo. Tu sa nám zíde rozklad súčtu alebo rozdielu mocnín.

Zapíšme si teda m v tvare $2^r\cdot s$, kde r je nezáporné celé a s nepárne celé (to sa pre každé nenulové celé m dá, dokonca iba jedným spôsobom). Potom

$$a^m+1=a^{2^rs}+1^{2^rs}=(a^{2^r}+1)(a^{2^r(s-1)}-a^{2^r(s-2)}+\cdots+a^{2\cdot 2^r}-a^{2^r}+1)=(a^{2^r}+1)\sum_{i=0}^{s-1}(-1)^i a^{2^ri}.$$

Vidíme, že $a^{2^r}+1$ je deliteľ a^m+1. Zjavne je väčší ako 1, čiže z prvočíselnosti a^m+1 sa mu musí rovnať. A akonáhle $a^{2^r}+1=a^m+1$, tak $m=2^r$.

[3] Mohli sme povedať, že $k_1=a^2/2$ pre nejaké a, ale chceme sa vyhnúť zlomku a následnému hľadaniu podmienok pre celočíselnosť.

Keďže $a > 1$, $a^m + 1$ je prvočíslo väčšie než 2 a a musí byť párne.

Použijeme rozklad súčtu alebo rozdielu mocnín opäť, teraz na $a^m - 1$:

$$a^m - 1 = a^{2^r} - 1 = (a^{2^{r-1}} + 1)(a^{2^{r-2}} + 1)\dots(a^2 + 1)(a + 1)(a - 1) = (a - 1)\prod_{i=0}^{r-1}(a^{2^i} + 1).$$

Rozložili sme takto $a^m - 1$ na súčin $r+1$ dvojčlenov. Navyše, pre každé $j \in \{1, \dots, r\}$ súčin prvých j z nich (dvojčlenu $a-1$ a prvých $j-1$ činiteľov veľkého súčinu) je rovný $a^{2^{j-1}}-1$ a $(j+1)$. dvojčlen je rovný $a^{2^{j-1}}+1$. Tieto dve hodnoty sú po sebe idúce nepárne čísla, čiže nesúdeliteľné. Každý dvojčlen je tým pádom nesúdeliteľný so súčinom všetkých predchádzajúcich, teda je nesúdeliteľný aj so všetkými predchádzajúcimi dvojčlenmi jednotlivo. To znamená, že naše dvojčleny sú navzájom nesúdeliteľné. Pritom posledných r je väčších ako 1. Tým pádom vždy, keď vyberieme niektoré z týchto r činiteľov (môžeme aj žiadne alebo všetky) a vynásobíme ich, dostaneme iného deliteľa ich súčinu, a teda aj čísla $a^m - 1$. To je spolu $2^r = m$ rôznych deliteľov, čím je dôkaz dokončený.

2.9 Kradneme Modernú Skrinku

Zadanie. *V malej dedinke menom Európa boli tri žirafky, Červená, Zelená a Modrá. Jedného dňa zbadali obrovské lietadlo, ktoré sa rútilo k zemi. Ani chvíľu neváhali a okamžite bežali na miesto pádu. Bohužiaľ, nikto z pasažierov neprežil (pasažieri boli samozrejme len plyšové zvieratká). Rozhodli sa preto vypátrať čiernu skrinku a prísť na dôvod pádu lietadla.*

Keď sa im ju podarilo nájsť a otvoriť, našli v nej len 31 červených, 41 zelených a 59 modrých kameňov. Tri žirafky sa rozhodli zahrať si nasledujúcu hru. Žirafky sa postupne striedajú v ťahoch v poradí Červená, Zelená a Modrá a každá žirafka môže urobiť jeden z nasledujúcich ťahov:

- *vybrať tri kamene rovnakej farby zo skrinky, alebo*
- *vymeniť dva kamene rôznej farby v skrinke za dva kamene ostávajúcej farby (žirafky majú dostatočnú zásobu kameňov z každej farby).*

Hra končí, keď všetky kamene v skrinke majú rovnakú farbu. Víťazom sa stáva tá žirafka, ktorej meno sa zhoduje s farbou kameňov v skrinke. V závislosti od začínajúcej žirafky rozhodnite, či má niektorá žirafka víťaznú stratégiu (t. j. vie vyhrať bez ohľadu na to, ako budú hrať ostatné žirafky),. a ak áno, ktorá.

Riešenie. opravuje **Lukáš** (lukas.gaborik@trojsten.sk)

Pri mnohých kombinatorických úlohách je výhodné hľadať niečo, čo ostáva nemenné – tzv. **invariantné**. Poďme sa pokúsiť niečo podobné nájsť aj tu.

Označme R_n počet červených, G_n zelených a B_n modrých kameňov po n ťahoch od začiatku hry. Ak by žirafka v nejakom ťahu napríklad vybrala zo skrinky 3 modré kamene, tak by platilo

$$R_{n+1} = R_n, \qquad G_{n+1} = G_n, \qquad B_{n+1} = B_n - 3. \tag{9.1}$$

Ak by naopak vymenila napríklad modrý a červený kameň za dva zelené, mali by sme

$$R_{n+1} = R_n - 1, \qquad G_{n+1} = G_n + 2, \qquad B_{n+1} = B_n - 1. \tag{9.2}$$

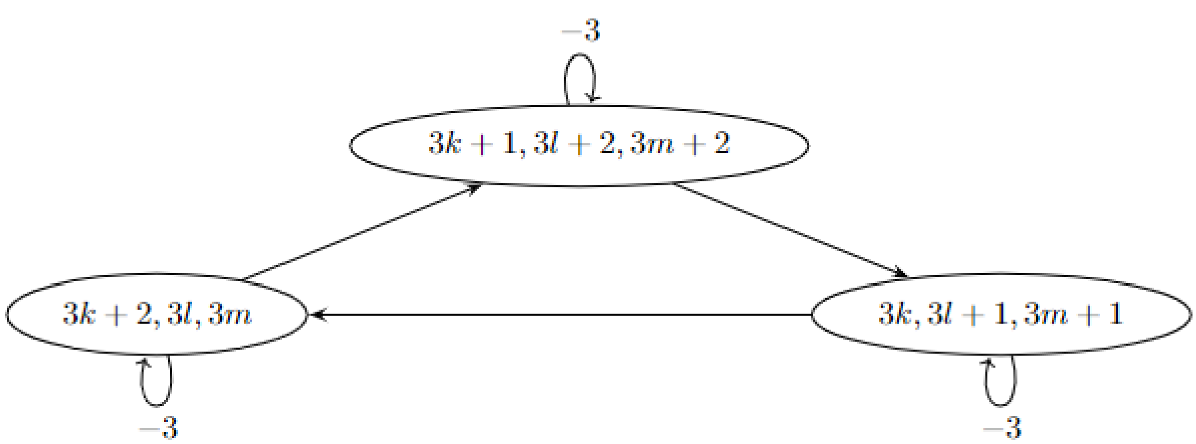
Keď sa na rovnice lepšie zapozeráme, poprípade sa skúšame hrať s počtami kameňov a zisťovať, ako sa menia, vieme si všimnúť, že rozdiel $R_n - G_n$ sa v každom ťahu môže znížiť o 3, nezmeniť alebo zvýšiť o 3. Konkrétne, z (9.1) vidíme, že $R_{n+1} - G_{n+1} = R_n - G_n$ a pre (9.2) platí $R_{n+1} - G_{n+1} = R_n - 1 - (G_n + 2) = (R_n - G_n) - 3$. Môžete si premyslieť, že podobne by to fungovalo, aj keby sme v (9.1), (9.2) zamenili farby. Uvidíte tak aj spôsob, akým môžeme $R_n - G_n$ zvýšiť o tri – tak, že modrý a zelený kameň vymeníme za dva červené. Ďalej sa vieme pozrieť aj na rozdiely $G_n - B_n$, $B_n - R_n$. Jednotlivých kameňov je síce na začiatku hry rôzne veľa, no ťahy, ktoré s nimi môžeme robiť, sú v istom slova zmysle „symetrické“ – preto bude rovnaká vlastnosť platiť aj pre tieto dva rozdiely.

Dostali sme teda, že všetky tri rozdiely $R_n - G_n, G_n - B_n, B_n - R_n$ sa v jednom ťahu môžu zmeniť o číslo z množiny $\{-3, 0, 3\}$. To vieme interpretovať aj tak, že ich zvyšok po delení tromi zostáva po celú hru rovnaký. Ako sme si tým však pomohli? Zamyslime sa, ako by hra vyzerala vtedy, keď by napríklad Modrá žirafka po N krokoch vyhrala. Potom by nutne muselo platiť $R_N = G_N = 0$, a teda aj $R_N - G_N = 0$. My však vieme, že $R_N - G_N \equiv R_0 - G_0 \pmod 3$. Zároveň, $R_0 = 31$, $G_0 = 41$ (pretože počet kameňov po nula ťahoch je očividne počet kameňov na začiatku hry), a preto $R_0 - G_0 \equiv -10 \equiv 2 \pmod 3$. Tu už ale začíname vetriť spor. Totiž, keďže $R_0 - G_0 \equiv 2 \pmod 3$, celú hru musí zvyšok rozdielu počtu červených a zelených kameňov ostať rovný dvom. Potom ale nie je možné, aby $R_N - G_N \equiv 0 \pmod 3$, a teda Modrá nevie vyhrať. Smutný príbeh…

Podobnú úvahu vieme urobiť aj pre Zelenú. Všimnime si, že $B_0 - R_0 = 59 - 31 = 28 \equiv 1 \pmod 3$, a teda ani Zelená vyhrať nevie. Keď sa však pozrieme na $G_0 - B_0 = 41 - 59 = -18 \equiv 0 \pmod 3$, zisťujeme, že tu spor nedostaneme. To však ešte neznamená, že Červená má víťaznú stratégiu – len sa nám to zatiaľ nepodarilo vylúčiť. Poďme sa teda bližšie pozrieť na jej situáciu.

Odteraz budeme trojicou čísel označovať postupne počty červených, zelených a modrých kameňov v jednotlivom ťahu. Už sme si všimli, že v tejto úlohe sú zaujímavé zvyšky po delení tromi, budeme ich teda skúmať.

Počty kameňov v prvom ťahu sú $(31, 41, 59) = (3 \cdot 10 + 1, 3 \cdot 13 + 2, 3 \cdot 19 + 2)$. Prvým typom ťahu sa zvyšky po delení tromi očividne nezmenia. Tým druhým, keďže $-1 \equiv +2 \pmod 3$, sa všetky tri zvyšky znížia o 1 (poprípade sa ešte vedia zvýšiť o 3, keby mali ísť do záporných čísel). Tým si vieme zakresliť nasledovný pomerne jednoduchý graf prechodov medzi zvyškami.



Obrázok 9.1: *Zvyškové triedy počtu červených, zelených a modrých kameňov a ich zmeny ťahmi*

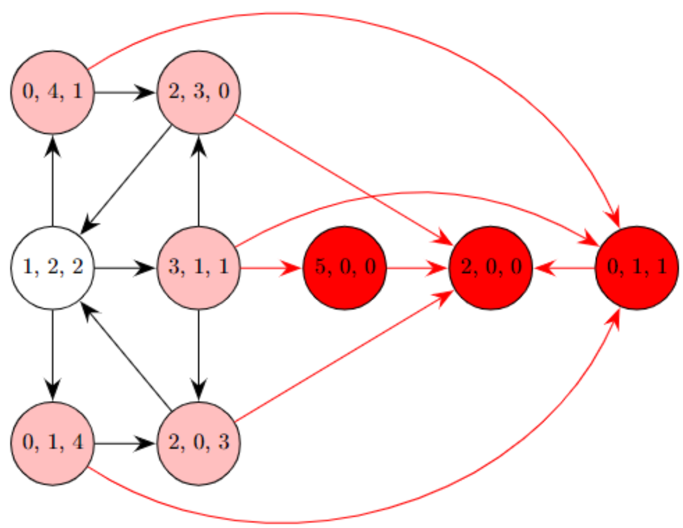
Teraz si môžeme uvedomiť nasledovnú vec – ak vieme, ktorá žirafka začínala, vieme, koľko kameňov je aktuálne v hre a vieme, aké sú ich zvyšky po delení tromi, vieme z toho jednoznačne určiť, ktorá žirafka je na ťahu. Totiž, keďže počet kameňov sa môže meniť len tak, že sa zníži o 3, vieme presne určiť, koľko ťahov prvého typu sa udialo. Zároveň, keďže zvyškové triedy kameňov sú v cykle dĺžky 3, vieme určiť, aký je zvyšok počtu týchto ťahov po delení tromi. Tým vieme určiť aj zvyšok počtu všetkých ťahov po delení tromi, z čoho už s využitím informácie o začínajúcej žirafke vieme určiť tú aktuálne na ťahu.

Vieme si uvedomiť, že toto platí aj obrátene – ak vieme počiatočnú žirafku, žirafku aktuálne na ťahu a počet kameňov, vieme z toho určiť zvyšky počtov kameňov po delení tromi.

Ďalej nám ešte môže pomôcť pozrieť sa, čo sa deje, keď už je kameňov v hre málo. Skúmajme, čo sa deje, keď máme najviac 5 kameňov. S využitím grafu 9.1 vieme, že možností na ich počty nie je až tak veľa. Zakreslime si šípkami možné pohyby ťahmi medzi nimi.

Počty $(5, 0, 0)$ a $(2, 0, 0)$ sú také, v ktorých Červená už podľa pravidiel vyhrala. Z počtu $(0, 1, 1)$ je možné urobiť len jeden ťah, a to taký, že sa dostaneme do $(2, 0, 0)$. Znamená to, že ak sa takéto počty kameňov vyskytnú v skrinke, je už nezvratné, že vyhrá Červená. Vyfarbime tieto stavy červenou a poďme zistiť, akým spôsobom sa dajú dosiahnuť.

Vyfarbime červenou aj všetky hrany, ktorými sa dá dostať do červených stavov. Ďalej si uvedomme, že keď je Červená v stave, z ktorého vedie červená hrana, použije ju a vyhrala. Vyfarbime preto takéto stavy svetločervenou.



Obrázok 9.2: *Malé prípady*

Všimnime si, že nám ostal jediný nezafarbený stav, a to $(1, 2, 2)$. To znamená, že ak sa žirafky dostanú na počet kameňov nanajvýš 5, jediný spôsob, akým môžu zvyšné dve vyhrať nad Červenou, je v každom ťahu ju dostať do $(1, 2, 2)$.

Teraz si však spomeňme, že z grafu 9.1 vieme na základe počiatočnej žirafky, žirafky aktuálne na ťahu a počtu kameňov určiť zvyšky kameňov po delení tromi.

Poďme teda preskúmať, čo sa deje, keď by začínali jednotlivé žirafky.

Ak by začínala **Modrá**, predpokladajme, že by sa Červená dostala na ťah, v ktorom by v skrinke zostávalo 5 kameňov. Keďže Červená ide hneď po Modrej, muselo doposiaľ ubehnúť $3n + 1$ ťahov pre nejaké $n \in \mathbb{N}_0$. Z nich

$\frac{1}{3}(31+41+59-5) = 42$ sa využilo na znižovanie počtu kameňov, čiže zvyšnými $3n-41 = 3(n-14)+1$ sa menili zvyšky kameňov. Potom ale z grafu 9.1 vidíme, že zvyšky kameňov na ťahu Červenej musia byť $(3k, 3l+1, 3m+1)$, čo jej umožňuje potiahnuť do víťaznej pozície.

Treba ešte ukázať vyššie uvedený predpoklad, a to, že sa vieme dostať do situácie, kedy je Červená na ťahu a v skrinke je päť kameňov. To je však očividné, lebo ak by ich bolo viac, na základe zvyškov ich musí byť aspoň 8, a potom už z Dirichletovho princípu existuje aspoň jedna farba, z ktorej sú aspoň tri kamene. To ale znamená, že Červená vie v každom ťahu, v ktorom je v skrinke viac ako 5 kameňov, odobrať tri kamene nejakej farby. Keďže však nevieme kamene pridávať, v najneskôr 43. ťahu sa jej podarí, že bude mať na svojom ťahu 5 kameňov v skrinke.

Situácia je podobná, keď začína **Zelená** – Červená sa vie dostať do stavu, že na svojom ťahu je 5 kameňov v skrinke, dovtedy muselo ubehnúť $3n+2$ ťahov, z ktorých 42 znižovalo počty kameňov, čiže $3(n-14)+2$ menilo zvyšky. Preto zvyšky na ťahu Červenej sú $(3k+2, 3l, 3m)$, a teda sa vie dostať do víťaznej pozície.

Ešte ostáva prípad, kedy začína **Červená**. Ak by sme skúmali, s akými zvyškami bude pri piatich kameňoch, zistili by sme, že sú to zrovna neblahé $(3k+1, 3l+2, 3m+2)$. Tieto z grafu 9.2 očividne majú len jeden stav, a to $(1,2,2)$. Intuitívne to teda vyzerá tak, že Červená nevie vyhrať. Poďme teda ukázať, že zvyšné dve žirafky vedia Červenej prekaziť výhru.

Ak Červená odoberie tri kamene nejakej farby, Zelená aj Modrá odoberú tiež tri kamene nejakej farby. No a pokiaľ Červená vymení kamene dvoch rôznych farieb za dva kamene tretej farby, Zelená a Modrá urobia analogický ťah pre zvyšné dve farby.

Je očividné, že keď vie odobrať tri kamene Červená, vedia ich odobrať aj Zelená a Modrá. To platí, lebo vždy odoberajú po deviatich a $31+41+59 = 9 \cdot 14 + 5$, pričom keď má Červená 5 kameňov, musí ich mať v počtoch $(1,2,2)$, a teda nevie ďalšie tri odobrať. Zároveň, ak je na stole viac ako 5 kameňov (čo je vzhľadom na zvyšky aspoň 8), tak z Dirichletovho princípu sú na nejakej kôpke aspoň tri z nich, teda Modrá a Zelená odoberať vedia.

Očividne má Červená na začiatku svojho ťahu aspoň jeden červený kameň, aspoň dva zelené a aspoň dva modré. Ak teda vymení

- červený a zelený za dva modré, Zelená môže vymeniť zelený a modrý za dva červené a Modrá červený a modrý za dva zelené,
- červený a modrý za dva zelené, Zelená môže vymeniť zelený a modrý za dva červené a Modrá červený a zelený za dva modré,
- zelený a modrý za dva červené, Zelená môže vymeniť červený a modrý za dva zelené a Modrá červený a zelený za dva modré.

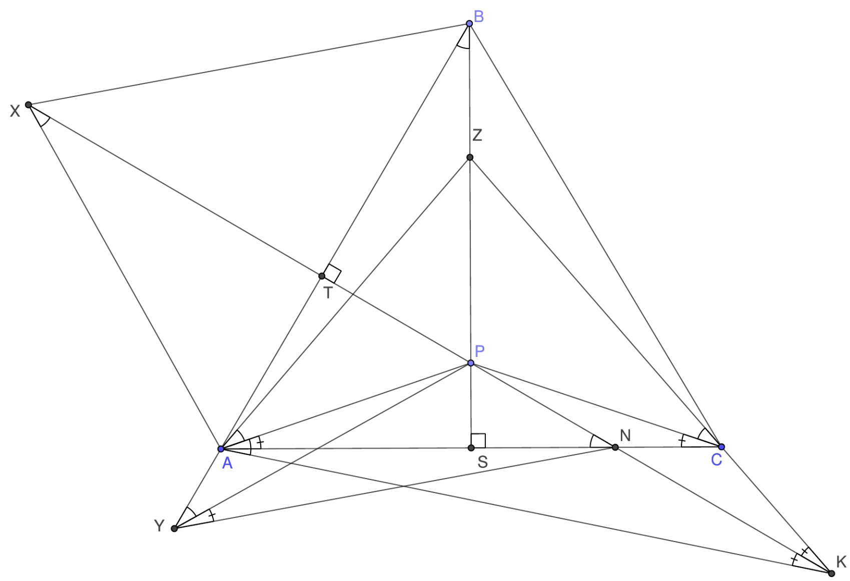
Dostali sme teda, že Zelená a Modrá skutočne vedia svoje ťahy uskutočniť, a teda neumožnia Červenej vyhrať. To však znamená, že ak Červená nezačína, tak má víťaznú stratégiu, inak víťaznú stratégiu nemá nikto.

2.10 Kráčam Mojou Školou

Zadanie. *Žirafka Lukáš sa chcela niečomu novému priučiť, a tak pobehovala po výške a hľadala prednášku o úvode do planimetrie. Žirafku Teri to zaujalo a začala si všímať zaujímavé vlastnosti. Otvorila GeoGebru a išla si celú situáciu zakresliť.*

Majme rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AC. Nech P je ľubovoľný bod na výške na stranu AC. Kružnica opísaná trojuholníku ABP pretína úsečku AC druhýkrát vo vnútornom bode M. Nech N je taký bod na úsečke AC, že $|AM| = |NC|$ a $M \neq N$. Druhý priesečník priamky NP s kružnicou opísanou APB označme X a druhý priesečník priamky AB a kružnice opísanej APN označme Y. Dotyčnica v bode A ku kružnici opísanej APN pretína výšku na stranu AC v bode Z. Dokážte, že priamka CZ je dotyčnicou ku kružnici opísanej PXY.

Riešenie. opravuje **Pedro** (peter.sukenik@trojsten.sk)



Na začiatok si jedným rýchlym vyuhlením úlohu preformulujeme tak, aby sme sa zbavili nedôležitého bodu M. Označme si veľkosť uhla PMN ako δ. Rovnakú veľkosť má, očividne, aj uhol PNM. Keďže body A, M, P, B ležia na kružnici (ako vieme zo zadania, tak v tomto poradí) tak $|\sphericalangle ABP| = 180 - |\sphericalangle AMP| = |\sphericalangle PMN| = \delta$. Podobne vďaka obvodovým uhlom dostávame aj $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle AXP| = \delta$. Označme pätu výšky z bodu B na stranu AC ako S a priesečník priamok PX a AB ako T. Potom nakoľko $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle TBS| = |\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle PNS|$, musia podľa vety o obvodových uhloch body S, T, B, N ležať na kružnici. To ale, opäť využitím obvodových uhlov, znamená, že $|\sphericalangle PTB| = 90°$. Navyše nakoľko $|\sphericalangle AXN| = |\sphericalangle ANX|$, tak trojuholník ANX je rovnoramenný so základňou XN a priamka AB je osou úsečky NX (vieme, že $|\sphericalangle ATN| = 90°$). To už sme sa nielen pekne pohli s našou úlohou, ale tiež teraz môžeme zabudnúť na bod M a skonštruovať bod N ako priesečník priamky AC a priamky PT, kde T definujeme priamo ako pätu kolmice z bodu P na priamku AB.

Teraz sa poďme pozrieť, aké uhly vieme dostať pri bode Y. Využitím obvodových uhlov (keďže body Y, A, P, N podľa zadania ležia na kružnici) vieme, že $|\sphericalangle AYP| = |\sphericalangle ANP| = \delta$. Potom ale trojuholník YPB musí byť rovnoramenný so základňou YB a navyše priamka PX je osou úsečky BY. To ale znamená, že kružnica opísaná trojuholníku YPX je obrazom kružnice opísanej trojuholníku XPB (o ktorej vieme, že na nej leží aj bod A) v osovej súmernosti podľa priamky PX.

Teraz sa už konečne dostávame k pointe úlohy a to k dôkazu, že nejaká priamka je dotyčnicou ku kružnici. Všimnime si, že tvrdenie, že priamka CZ je dotyčnicou ku kružnici opísanej trojuholníku PXY je ekvivalentné takému, že obraz priamky CZ v osovej súmernosti podľa priamky PX je dotyčnicou ku kružnici opísanej štvoruholníku $APBX$. Prečo je intuitívne, že by sme radšej dokazovali toto nové tvrdenie? Dôvody sú hneď dva. Prvým je, že kružnica opísaná trojuholníku PYX je v úlohe akosi „navyše“. Je relatívne neprirodzená a teraz sme si ukázali, že jednoduchou geometrickou operáciou (preklopenie cez priamku) ju vieme zobraziť na oveľa prirodzenejšiu kružnicu, ktorá sa v zadaní vyskytuje hneď od začiatku. Druhým dôvodom, prečo by sme chceli dokazovať toto nové tvrdenie je, že priamka CZ je taktiež relatívne ťažko uchopiteľná a ako uvidíme, jej obraz bude oveľa prirodzenejší.

Aby sa nám dobre pracovalo s obrazom priamky CZ, označme si jej priesečník s priamkou XP ako K. Ukážeme si, že K je veľmi pekný bod. Začnime pozorovaním, že $|\sphericalangle ZAP| = \delta$, pretože priamka AZ bola definovaná ako dotyčnica ku kružnici opísanej trojuholníku APN, a teda uhol ZAP je úsekový k uhlu ANP. Zo symetrie podľa priamky PB taktiež platí $|\sphericalangle ZCP| = \delta$. Označme ešte $|\sphericalangle PAC| = \varphi$. Potom zo symetrie vieme aj $|\sphericalangle PCA| = \varphi$. Uhol CNK je vrcholový k uhlu PNA, a teda veľkosťou rovný δ. Nakoľko uhol ZCA, ktorý je vo veľkosti rovný $\delta + \varphi$, je susedný s uhlom NCK a ten je doplnkom súčtu uhlov KNC a NKC do $180°$, musí platiť $|\sphericalangle CKN| = \varphi$. Potom ale vďaka obvodovým uhlom nad tetivou CP musia body A, P, C, K ležať na kružnici. Opäť použitím obvodových uhlov, tentokrát nad tetivou AP vieme, že $|\sphericalangle PKA| = |\sphericalangle PCA| = \varphi$.[4] Ajhľa, čo sa nám to ale práve podarilo ukázať? Keďže $|\sphericalangle AKP| = |\sphericalangle CKP| = \delta$, potom priamka AK musí byť obrazom priamky ZK v osovej súmernosti podľa priamky PK. Teda priamka AK je tá priamka, o ktorej chceme ukázať, že je dotyčnicou ku kružnici opísanej štvoruholníku $XAPB$. Toto je ale výrazné zjednodušenie, lebo nakoľko vieme, že táto kružnica prechádza bodom A, podobne ako aj priamka AK, potom táto priamka sa musí tejto kružnice dotýkať priamo v bode A. Toto zjednodušuje situáciu, lebo vďaka tomu už nám iba stačí dokázať úsekovosť uhlov PAK a ABP. Takúto vymoženosť by sme pri pôvodnej priamke CZ a pôvodnej kružnici opísanej PXY nemali, lebo by sme vlastne nevedeli, kde sa pretínajú, či naozaj v jednom bode a aké úsekové uhly teda vlastne dokazovať.

Toto je však už hračka. Vieme, že $|\sphericalangle ABP| = \delta$, a teda nám stačí ukázať to isté pre uhol PAK. Keďže body $APCK$ ležia na kružnici, vieme: $|\sphericalangle PAK| = 180° - |\sphericalangle PCK| = |\sphericalangle ZCP| = |\sphericalangle ZAP| = |\sphericalangle PNA| = |\sphericalangle ABP| = \delta$. A tým sme úlohu dokázali.

Na záver ešte poznamenáme, že sú len dve validné konfigurácie a uhlenie je pre ne takmer rovnaké. Prvá konfigurácia je tá, ktorú sme popisovali vo vzoráku a aká je nakreslená na obrázku. Druhá konfigurácia by vznikla, ak P by bol „vysoko“, v tom prípade Y by bol vnútri úsečky AB a Z by bol nad bodom B. Hoci by to chcelo formálne dokázať, že tieto dve konfigurácie sú jediné, ktoré môžu nastať, nebudeme to robiť a nebudeme to ani vyžadovať v riešení.

2.11 integrály Konečne Spočítame

Zadanie.

Miško bol celý nešťastný, lebo termín skúšky z analýzy sa neoddialiteľne blížil. Takže vedel, že mu neostáva nič iné, než sa úporne učiť. Preto mal celý čas otvorenú Geogebru a vymýšľal si úlohy, keď tu zrazu dostal super nápad, s ktorým sa ihneď išiel pochváliť svojim žirafkám.

Je daný ostrouhlý trojuholník ABC s ortocentrom H a so stredom kružnice opísanej O. Označme O_A, O_B a O_C body, ktoré dostaneme preklopením O postupne podľa strán BC, AC a AB. Označme P, Q, R postupne priesečníky $HO_A \cap BC$, $HO_B \cap AC$ a $HO_C \cap AB$. Dokážte, že priesečníky $BC \cap RQ$, $AC \cap PR$ a $AB \cap PQ$ ležia na priamke.

Riešenie. opravuje **Michal P.** (michal.pecho@trojsten.sk)

Vzorové riešenie tejto úlohy si môžeš pozrieť aj ako video na našom YouTube kanáli `www.youtube.com/KorMatSem`.

[4]Všimnite si, že bod P je v tejto konfigurácií Švrčkovým bodom oproti bodu K v trojuholníku ACK.