Korešpondenčný matematický seminár
XLIV. ročník, 2022/2023
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Riešenia 3. kola letnej časti

3.1 Krátiť Minúty Spoločne ($\kappa \leq 1$)

Zadanie. *Vedúci KMSka idú na sústredko. Ich cesta začala na stanici v Bratislave. S rukami plnými eráru zistili, že zabudli, kedy im odchádza vlak. Neboli by to ale vedúci matematického seminára, keby si aspoň jeden z nich nepamätal čas odchodu vlaku na sústredko pomocou matematickej úlohy.*

Vedúci vedia, že v čase, keď odchádza vlak, sú hodinová a minútová ručička presne oproti sebe na jednej priamke. A vlak na sústredko odchádza niekedy medzi štrnástou a pätnástou hodinou. Ak sa hodinová ručička hýbe rovnomerne, kedy odchádza vlak na sústredko?

Riešenie. opravuje **Mišo M.** (michal.molnar@trojsten.sk)

V zadaní máme dve informácie o pozíciách ručičiek v čase odchodu vlaku. Prvá hovorí o tom, že ručičky majú byť oproti sebe, druhá, že hodinová ručička je niekde medzi dvojkou a trojkou (lebo sme medzi 14. a 15. hodinou). Z toho vieme hneď vyvodiť, že minútová ručička bude niekde medzi osmičkou a deviatkou. Otázkou zostáva, kde presne?

Povedzme si teraz niečo o hodinách. Minútová spraví za hodinu jedno celé kolečko. Hodinová prejde z neho $\frac{1}{12}$, čo zodpovedá úseku medzi dvoma číslami. Môžeme teda povedať, že je 12-krát pomalšia. Okrem toho vieme, že presne o štrnástej bola minútová ručička hore na dvanástke, kým hodinová presne na dvojke.

Dopočítajme teda, kde majú byť pri odchode vlaku. Označme x počet dielikov – minút (nemusí byť celé číslo), o koľko bude minútová ručička za osmičkou. Vieme, že nemôže dôjsť za deviatku, takže $x \leq 5$. Od druhej hodiny teda ubehne $40 + x$ minút, veľká sa tak od dvojky posunie o $\frac{40+x}{12}$ dielikov. Na to, aby boli oproti sebe musí byť toto číslo rovné x. Platí tak

$$\frac{40+x}{12} = x,$$

$$40 + x = 12 \cdot x,$$

$$x = \frac{40}{11} \approx 3{,}636.$$

Vidíme, že od 14:40 musí ubehnúť $\frac{40}{11}$ minúty, aby boli ručičky oproti sebe. Vlak tak odchádza $40 + \frac{40}{11} = \frac{480}{11}$ minút po druhej, čo je približne o 14:43:38.

3.2 Krúžime Medzi Stanicami ($\kappa \leq 2$)

Zadanie. *Na nástupišti čakal na vedúcich vlak, ktorý ich mal okružnou cestou cez Margecany zaviezť až do Brezna. Vedúci stlačili tlačidlo na dverách vlaku, ale dvere nič. Tak ho stlačili znova, ale dvere znovu nič. Po treťom pokuse dvere začali pomaličky spolupracovať. Kým sa dokorán otvorili, aby vedúci mohli nastúpiť, sa Števka zamyslela nad tvarom tlačidla na otváranie dverí.*

Šesťuholník ABCDEF má nasledujúce 3 vlastnosti:

1. *diagonály AC, CE a EA majú rovnakú dĺžku,*
2. *uhly ABC a CDE sú pravé,*
3. *dĺžky strán šesťuholníka sú navzájom rôzne celé čísla.*

Aký je najmenší možný obvod šesťuholníka, ak má diagonála AC dĺžku $\sqrt{85}$?

Riešenie. opravuje **Michal** (michal.pecho@trojsten.sk)

Zo zadania vieme, že $|AC| = |CE| = \sqrt{85}$ a keďže trojuholníky ABC a CDE sú pravouhlé s preponami postupne AC, CE, z Pytagorovej vety musí platiť

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2 = 85,$$

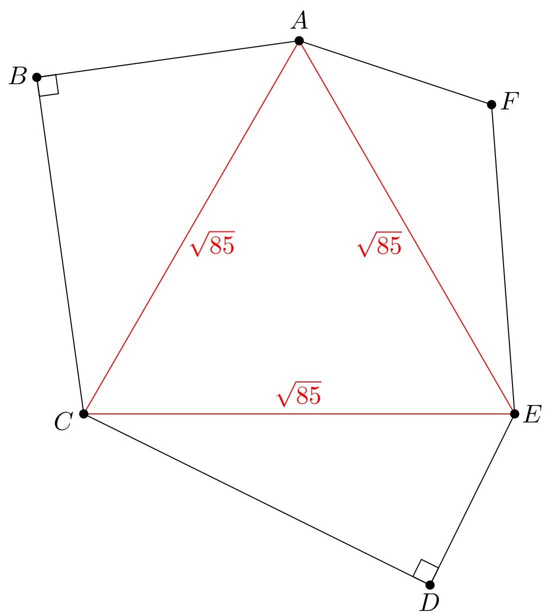
$$|CD|^2 + |DE|^2 = |CE|^2 = 85.$$

Všimnime si, že nie je veľa spôsobov, ako zapísať 85 ako $a^2 + b^2$, kde a, b sú prirodzené čísla. Ak by bolo $a \geq 10$, potom $a^2 + b^2 \geq 100 > 85$, preto nutne $1 \leq a \leq 9$. Teraz nám už stačí vyskúšať všetky tieto a a nájsť vyhovujúce b, ktoré bude spĺňať

$$b = \sqrt{85 - a^2},$$

čomu vyhovujú dvojice $(a, b) \in \{(2, 9), (9, 2), (6, 7), (7, 6)\}$. Tieto dvojice obsahujú štyri rôzne čísla 2, 6, 7, 9 a keďže $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DE|$ sú po dvoch rôzne, musia byť tieto dĺžky rovné týmto číslam v nejakom poradí, preto

$$|AB| + |BC| + |CD| + |DE| = 2 + 6 + 7 + 9 = 24.$$



Už nám stačí iba odhadnúť $|AF| + |FE|$. Použijeme trojuholníkovú nerovnosť, musí platiť

$$|EF| + |FA| > \sqrt{85} > 9,$$

preto $|AF| + |FE| \geq 10$. Všimnime si však, že nemôžeme dostať 10 ako súčet dvoch rôznych prirodzených čísel bez použitia 2, 6, 7, 9, preto $|EF| + |FA| \geq 11$, pričom rovnosť nastane napríklad pre $|EF| = 10$, $|FA| = 1$.

Dostávame tak, že obvod šesťuholníka je aspoň

$$|AB| + |BC| + |CD| + |DE| + |EF| + |FA| \geq 24 + 11 = 35,$$

pričom šesťuholník splňujúci podmienky zo zadania s obvodom 35 je napríklad taký, v ktorom $|AB| = 6$, $|BC| = 7$, $|CD| = 9$, $|DE| = 2$, $|EF| = 8$, $|FA| = 3$.

3.3 Kamaráti Musia Sedieť ($\kappa \leq 3$)

Zadanie. *Keď vedúci konečne vošli do vlaku, zistili, že ich vozeň má* 100 *sedadiel očíslovaných číslami* 1 *až* 100*, ktoré sú rozmiestnené do mriežky* 10×10*. Dokážte, že Mati a Danko si vedia sadnúť na* 2 *susediace sedadlá (vedľa seba alebo tesne za sebou), ktorých čísla majú rozdiel aspoň* 6*, bez ohľadu na to, ako sú sedadlá očíslované.*

Riešenie. opravuje **Michal Staník** (michal.stanik@trojsten.sk)

Zamyslime sa na začiatok nad tým, prečo by malo platiť, že si Mati a Danko vedia sadnúť na 2 susediace sedadlá, ktorých čísla sa líšia aspoň o 6. Čo by muselo platiť, ak by to tak nebolo? Potom by všetky dvojice susediacich sedadiel museli mať čísla s rozdielom nanajvýš 5, čo je veľmi málo. Intuitívne, s takýmito malými rozdielmi by mohol byť problém vojsť do vozňa sedadlá s veľmi odlišnými číslami – najextrémnejší prípad sú sedadlá 1 a 100. Zrejme by museli byť ďaleko od seba, ak by sa to vôbec dalo.

Poďme teda tvrdenie dokázať poriadne. Použijeme techniku nazývanú dôkaz sporom. Budeme predpokladať opak dokazovaného tvrdenia, teda že Mati a Danko si nevedia sadnúť na dve sedadlá podľa zadania, a dospejeme k niečomu, čo zrejme nemôže byť pravda. To bude znamenať, že náš predpoklad bol nepravdivý, a teda Mati a Danko si vedia sadnúť na vhodné sedadlá.

Nech teda každé dve susedné sedadlá majú rozdiel čísel nanajvýš 5. Pozrime sa na polohu sedadla 1, polohu sedadla 100 a cestu medzi nimi. Cestou rozumieme postupnosť sedadiel od jedného k druhému, kde po sebe idúce sedadlá na ceste sú vedľa seba alebo tesne za sebou. Uvážime ľubovoľnú z najkratších ciest medzi sedadlami 1 a 100. Jedna z týchto ciest vyzerá tak, že najskôr ide o niekoľko sedadiel (možno nula) v jednom smere a potom o niekoľko sedadiel (možno nula) v kolmom smere.

Je jednoduché si rozmyslieť, že sedadlá 1 a 100 budú od seba najďalej, ak budú v protiľahlých rohoch vozňa. Cesta medzi protiľahlými rohmi obsahuje 19 sedadiel vrátane krajných, cesta medzi sedadlami 1 a 100 má teda takúto dĺžku alebo menšiu.

Označme si čísla sedadiel na tejto ceste ako $a_1 = 1, a_2, a_3, \ldots, a_n = 100$, pričom $n \leq 19$. Z nášho predpokladu plynie, že

$$
\begin{aligned}
a_2 &\leq a_1 + 5 = 6 = 1 + 1 \cdot 5,\\
a_3 &\leq a_2 + 5 \leq 11 = 1 + 2 \cdot 5,\\
a_4 &\leq a_3 + 5 \leq 16 = 1 + 3 \cdot 5,\\
&\vdots\\
a_n &\leq 1 + (n-1) \cdot 5 \leq 1 + 18 \cdot 5 = 91.
\end{aligned}
$$

Zjednodušene povedané, cesta začína sedadlom 1 a obsahuje najviac 18 krokov na ďalšie sedadlo, pričom každý krok zvýši číslo sedadla najviac o 5. Z toho plynie, že posledné sedadlo má číslo najviac $1 + 18 \cdot 5 = 91$. Jeho číslo však má byť rovné 100. Došli sme teda ku sporu s naším predpokladom, že rozdiel čísel každých dvoch susedných sedadiel je najviac 5.

To znamená, že existujú dve susedné sedadlá, ktorých rozdiel čísel je aspoň 6 a Mati s Dankom si na ne vedia sadnúť.

3.4 Komparzistov Motivačiek Stanovujeme ($\kappa \leq 5$)

Zadanie. *Keďže sa už vedúci usadili, môžu si zosumarizovať dej a rozdeliť dejové postavy. Keď si ich však rozdelili rovným dielom, zistili, že každý ich bude v jednom momente stvárňovať dve.*

Nájdite všetky celé nezáporné čísla a, b také, že $a^2 = b \cdot (b + 7)$.

Riešenie. opravuje **Lucka** (lucka.krajcoviechova@trojsten.sk)

Ukážeme si tri riešenia tejto úlohy.

Prvé riešenie

Zo zadania máme $b \geq 0$, takže

$$a^2 = b(b+7) = b^2 + 7b \geq b^2.$$

Keďže a, b sú nezáporné, môžeme obe strany odmocniť, čím dostaneme $a \geq b$. Zároveň a, b sú celé, takže existuje nezáporné celé číslo c také, že $a = b + c$. Dosadením do rovnice v zadaní dostaneme

$$(b+c)^2 = b(b+7),$$

z čoho po odčítaní b^2 z oboch strán máme

$$2bc + c^2 = 7b,$$

a teda

$$b(7 - 2c) = c^2.$$

Číslo $7 - 2c$ je nepárne, takže to nie je nula, a teda ním môžeme obe strany vydeliť. Dostaneme tak

$$b = \frac{c^2}{7 - 2c}. \tag{4.1}$$

Ak $c = 0$, tak máme $b = 0$, a potom aj $a = b + c = 0$. Dosadením do zadania overíme, že $a = b = 0$ je jedným riešením. Ďalej môžeme predpokladať, že c je kladné. Potom pravá strana v (4.1) je nenulová a ľavá strana je nezáporná, takže v skutočnosti sú obe kladné. Keďže čitateľ na pravej strane je kladný, tak aj menovateľ musí byť, teda $7 - 2c > 0$, z čoho po ekvivalentných úpravách dostaneme $c < \frac{7}{2}$.

Zostáva nám teda overiť len možnosti $c \in \{1, 2, 3\}$. Pre tieto hodnoty c je pravá strana rovná postupne $\frac{1}{5}, \frac{4}{3}$ a 9. Keďže ľavá strana je celočíselná, aj pravá musí byť, takže c môže byť len 3. Vtedy $b = 9$ a $a = b + c = 9 + 3 = 12$. Pre tieto hodnoty platí

$$a^2 = 12^2 = 144 = 9 \cdot 16 = b(b + 7),$$

teda rovnica zo zadania je vtedy splnená.

Úloha tak má dve riešenia, a to $(a, b) = (0, 0)$ a $(a, b) = (12, 9)$.

Druhé riešenie

Pravú stranu upravíme doplením do štvorca a potom spravíme niekoľko ekvivalentných úprav:

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 + 7b &= \left(b + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}, \\ 4a^2 + 49 &= (2b + 7)^2, \\ 49 &= (2b + 7)^2 - 4a^2, \\ 7 \cdot 7 &= (2b + 7 - 2a)(2b + 7 + 2a). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Poznamenajme, že k tejto rovnici sa dá dostať aj tak, že sa na rovnicu v zadaní pozrieme ako na kvadratickú rovnicu v b, vyjadríme jej korene a upravíme.

Ľavá strana rovnice (4.2) je kladná a druhá zátvorka na pravej strane je kladná (keďže a, b sú nezáporné), takže aj $2b+7-2a$ je kladné. Navyše obe zátvorky na pravej strane sú celočíselné a $2b+7-2a \leq 2b+7+2a$, a tak sú len dve možnosti – buď je prvá rovná 1 a druhá 49, alebo sa obe rovnajú 7. V prvej možnosti sčítaním oboch zátvoriek dostaneme $4b + 14 = 50$, z čoho $b = 9$ a potom $a^2 = 9 \cdot (9 + 7) = 144$ platí práve pre $a = 12$. V druhej možnosti, teda keď sú obe zátvorky rovné 7, ich odčítaním dostaneme $a = 0$. Potom $0 = b(b + 7)$ platí práve pre $b = 0$, keďže pre nezáporné b je $b + 7$ kladné.

Rovnica zo zadania tak má práve dve riešenia, a to $(a, b) = (12, 9)$ a $(a, b) = (0, 0)$.

Tretie riešenie

Ak $b = 0$, tak $a = b(b+7) = 0 \cdot 7 = 0$. Ak $a = 0$, tak $b(b+7) = 0$, a keďže $b+7 > 0$, tak nutne $b = 0$. Teda ak je jedno z čísel a, b rovné nule, tak obe sú. Dosadením do zadania overíme, že obe strany rovnice majú vtedy hodnotu nula, a teda $a = b = 0$ je jedným riešením. Po zvyšok riešenia už môžeme predpokladať, že a aj b sú kladné. Potom $b(b + 7) \geq 7$, a teda a^2 aj $b(b + 7)$ majú prvočíselný rozklad.

Nech d je najväčší spoločný deliteľ čísel b a $b+7$ (keďže sú obe kladné, tak existuje). Potom d delí aj ich rozdiel, teda 7. No a keďže 7 je prvočíslo, tak d môže byť len 1 alebo 7.

Ak $d = 1$, tak každé prvočíslo p, ktoré delí ľavú stranu rovnice v zadaní, delí aj pravú, a keďže čísla b a $b+7$ sú nesúdeliteľné, tak p delí práve jedno z nich. Keďže ľavá strana je štvorec, tak maximálna mocnina, v ktorej p delí ľavú stranu, je párna. Keďže p delí len jedno z čísel $b, b+7$, tak maximálna mocnina, v ktorej ho delí, je tiež párna. Toto platí pre všetky prvočísla deliace a a zjavne hociaké prvočíslo, ktoré delí b alebo $b+7$, delí pravú stranu, takže delí aj ľavú stranu rovnice v zadaní, a teda delí aj a. Máme tak, že každé prvočíslo, ktoré delí b, ho delí v párnej mocnine, takže b je štvorec (všimnime si, že toto tvrdenie platí aj keď $b = 1$). Podobne aj $b+7$ je štvorec. Existujú teda prirodzené čísla k, l také, že $b = k^2$ a $b + 7 = l^2$. Potom ich odčítaním dostaneme $l^2 - k^2 = 7$, a teda

$$(l-k)(l+k) = 7.$$

Keďže k, l sú prirodzené, platí $l + k \geq 2$, no jediný taký deliteľ čísla 7 je 7. Takže $l + k = 7$, a potom $l - k = 1$. Odčítaním druhej rovnice od prvej dostaneme $2k = 6$, a teda $k = 3$. Potom $b = k^2 = 9$. Rovnica v zadaní potom platí práve vtedy, keď $a^2 = 9 \cdot (9+7) = 144$, čo je pre nezáporné celé a práve vtedy, keď $a = 12$.

Ak $d = 7$, tak podobnou úvahou dostaneme $b = 7k^2, b + 7 = 7l^2$ pre nejaké prirodzené k, l. Opäť odčítaním jednej rovnice od druhej dostaneme

$$7(l^2 - k^2) = 7,$$

$$(l-k)(l+k) = 1.$$

No obe zátvorky na ľavej strane sú celé čísla a navyše $l + k \geq 2$, ale 2 nedelí 1, takže žiadne iné riešenie neexistuje.

Úloha tak má dve riešenia, a to $(a, b) = (0, 0)$ a $(a, b) = (12, 9)$.

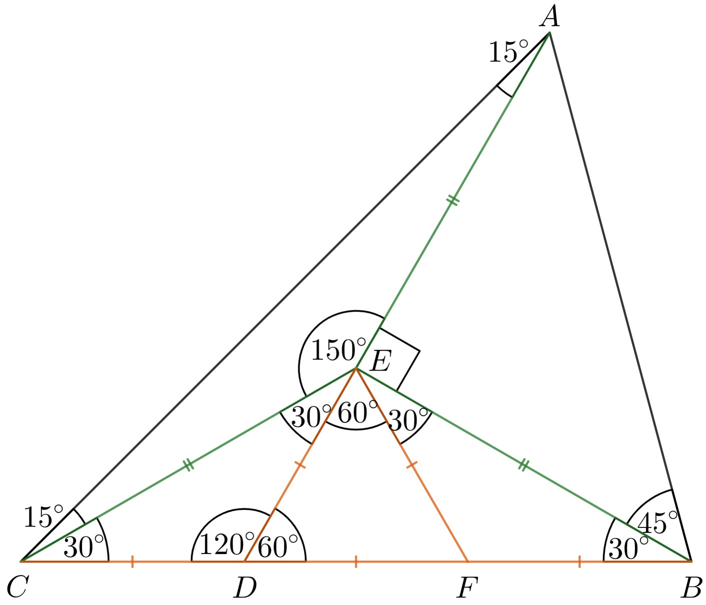
3.5 Kontrolu Maximalizujeme Sklonom ($\kappa \leq 8$)

Zadanie. *Vedúci by radi mali prehľad o tom, kde vo vlaku sedia ktorí účastníci. Na to je potrebné pozerať sa na nich pod správnym uhlom. Na niektorých pod* 60*-stupňovým, na iných pod* 45*-stupňovým. Pomôžte im nájsť všetky potrebné uhly.*

V trojuholníku ABC zvolíme bod D na strane BC tak, aby $|BD| = 2 \cdot |CD|$. Vieme, že $|\sphericalangle BDA| = 60°$ a $|\sphericalangle BCA| = 45°$. Určte veľkosť uhla ABC.

Riešenie. opravujú **Kubo P.** (jakub.poljovka@trojsten.sk) a **Andy** (martin.andricik@trojsten.sk)

Základ je si čo najintuitívnejšie označiť obrázok a potom to už pôjde. Preto vrchol A umiestnime hore a B vpravo dole.



Dobre, $|\sphericalangle BDA| = 60°$, vďaka tomu k nemu susedný uhol $\sphericalangle CDA$ má veľkosť 120°. Zo zadania vieme, že $|\sphericalangle DCA| = 45°$, takže uhol $\sphericalangle CAD$ ľahko dorátame a dostávame $|\sphericalangle CAD| = 180° - 120° - 45° = 15°$.

Teraz nám môže napadnúť si nájsť bod E tak, že $|\sphericalangle ACE| = 15°$. Motivácia za tým je vyrobiť si rovnoramenný trojuholník $\triangle CEA$. Vďaka tomu $|AE| = |CE|$ a zároveň vieme dopočítať uhol $|\sphericalangle CEA| = 180° - 15° - 15° = 150°$. Zo susednosti s uhlom $|\sphericalangle CEA| = 150°$, rovno máme, že $|\sphericalangle CED| = 30°$. Podobne aj uhol $|\sphericalangle ECD| = |\sphericalangle DCA| - |\sphericalangle ACE| = 45° - 15° = 30°$. $\triangle CDE$ je tiež rovnoramenný, čo v nás vzbudzuje dôveru, že dokresliť bod E bol správny krok. Zároveň máme, že $|CD| = |DE|$.

V tomto momente je dobré si dokresliť bod F. Pôvodne som tak robil, aby som získal $|DF| = |BF| = |CD|$. Ale vďaka tomu, že aj dĺžka úsečky DE je rovnaká tak získavame napríklad z Tálesovej vety, že $\triangle CEF$ je pravouhlý. Ešte o kúsok dôležitejšie je však pozorovanie, že $|\sphericalangle BDA| = 60°$, a teda $\triangle EFD$ je rovnostranný. V tomto momente vidíme, že trojuholníky $\triangle CEF$ a $\triangle BED$ sú dokonca zhodné podľa vety sus, $|CF| = |DB|$, $|FE| = |DE|$ a $|\sphericalangle BDA| = 60° = |\sphericalangle CFE|$. Teda už vieme, že všetky úsečky rovnakej farby majú rovnakú dĺžku.

Ďalej si spomenieme, že $|\sphericalangle ECD| = 30°$ a zo zhodnosti trojuholníkov $\triangle CEF$ a $\triangle BED$ dostávame, že $|\sphericalangle DBE| = 30°$ tiež. Posledná vec, čo nás čaká, je ukázať, že $|\sphericalangle BEA| = 90°$. Už vieme, že $|\sphericalangle CEA| = 150°$, $|\sphericalangle CED| = 30°$ a $|\sphericalangle DEB| = 90°$ (spomeňme si, že $\triangle CEF$ a $\triangle BED$ sú zhodné a $\triangle CEF$ je pravouhlý). Potom $|\sphericalangle BEA| = 360° - 150° - 30° - 90° = 90°$. $\triangle BEA$ je rovnostranný s pravým uhlom pri vrchole E, takže $|\sphericalangle EBA| = 45°$. Dokopy dostávame $|\sphericalangle CBA| = 75°$. Podotknime, že tento odsek sa dal nahliadnuť aj cez obvodové a stredové uhly.

3.6 Ktorého Magora Stena

Zadanie. *Ako vedúci a účastníci prechádzali ponad Poprad*[1] *a popod Tatry, tešili sa na krásne výhľady. Nepríjemne ich preto prekvapila protihluková stena, ktorá sa stále zvyšovala a stále viac a viac im uberala z výhľadu na malebné hory a slnečný svit aj Svit. Začalo ich preto zaujímať, akú funkciu má taká vysoká protihluková stena a aká najmenej vysoká musela byť.*

[1] rieku

Nech f je funkcia z kladných celých čísel do kladných celých čísel spĺňajúca

1. $f(ab) = f(a)f(b)$ *pre všetky celé kladné čísla* a, b,
2. $f(a) < f(b)$ *pre všetky* $a < b$,
3. $f(3) \geq 7$.

Nájdite najmenšiu možnú hodnotu, ktorú môže nadobúdať $f(3)$.

Riešenie. opravuje **Lukáš** (lukas.gaborik@trojsten.sk)

Zadanie na prvý pohľad môže vyznievať ba priam až nezmyselne jednoducho. Máme nájsť najmenšiu možnú hodnotu $f(3)$, pričom zároveň tretia podmienka nám hovorí, že $f(3) \geq 7$. Tak potom najmenšia možná hodnota $f(3)$ je 7, nie?

No a tu prichádza ten zvrat. Hodnota $f(3) = 7$ je síce najmenšia hodnota, ktorá nie je v rozpore s treťou z podmienok. No pokiaľ budeme hľadať funkciu, ktorá bude spĺňať všetky tri podmienky, nemusí sa nám podariť nájsť takú, že $f(3) = 7$.

No a čo je to vlastne funkcia? To sú dvojice (vzor, obraz), pričom funkciu vieme vnímať ako „stroj", do ktorého „vhodíme" vzor, funkcia sa pozrie, aký má k tomuto vzoru priradený obraz a „vyhodí" tento obraz.

Funkcie môžu vyzerať všelijako. Môžu byť jednoduché, napríklad

- taká, ktorá vyhodí to isté číslo, ktoré sme do nej hodili,
- taká, ktorá zvýši vhodené číslo o 1 a vyhodí výsledok,
- taká, ktorá vyhodí 42 bez ohľadu na to, ktoré číslo sme do nej vhodili.

Funkciami sú však napríklad aj

- taká, ktorá pre vhodené číslo x vyhodí najmenšie číslo, ktoré má práve x deliteľov,
- taká, ktorá pre vhodené číslo x nájde x-té slovo v *Sládkovičovej Maríne* (ak je x priveľké a dostane sa až na koniec, pokračuje ďalej od začiatku) a vyhodí počet písmen v ňom,
- taká, ktorá vyhodí 42, ak sme do nej vhodili číslo z prvočíselnej dvojičky[2] a 17 inak.

Tie z prvej skupiny by sme vedeli pomerne jednoducho popísať operáciami plus, mínus, krát, atď., no tie z druhej skupiny už veľmi nie. Dokonca o poslednej z nich ani nevieme povedať, ako sa správa, lebo keby sme to vedeli, vyriešili by sme otvorený problém. Argumentácia tým, že prešetríme všetky možnosti, ako môže vyzerať predpis funkcie, preto nefunguje, lebo nie každá funkcia je definovaná jednoduchým vzorčekom.

Ale teraz späť k úlohe. Povedzme, že $f(3)$ by mohlo byť 7. Čo vieme povedať ďalej? No napríklad, že $f(9) = f(3 \cdot 3) = f(3) \cdot f(3) = 49$. Podobne dostaneme aj, že $f(27) = 343$. Čo ale vieme o hodnote $f(2)$? Funkcia musí byť rastúca, preto $f(2) < f(3) = 7$, a teda $f(2)$ je najviac 6. Zároveň $7 = f(3) < f(4) = f(2) \cdot f(2)$. Z tohto zas vidíme, že $f(2)$ musí byť aspoň 3. Ak by totiž hodnota $f(2)$ bola 1 alebo 2, potom by $f(4)$ bolo 1 alebo 4, čo je však menej ako 7, a teda by naša funkcia nerástla.

Aktuálne sú teda možné hodnoty $f(2)$ čísla 3, 4, 5 a 6. Skúsme nájsť ešte nejaké blízke mocniny dvojky a trojky, aby sme vedeli viac okresať možnosti na hodnotu $f(2)$. Najbližšie máme 8 a 9, pričom vieme, že $f(2) \cdot f(2) \cdot f(2) = f(8) <$

[2] https://cs.wikipedia.org/wiki/Prvo%C4%8D%C3%ADseln%C3%A1_dvojice

$f(9) = 49$. Ak by $f(2)$ bolo 4 alebo viac, tak $f(2)^3$ je 64 alebo viac, čo je ale viac ako 49. Preto je aktuálne jediná prípustná hodnota $f(2)$ rovná 3. Skúsme však ešte overiť, či sa to nepokazí pre nejaké vyššie mocniny. Napríklad 27 a 32. Vieme, že $f(27)$ je 343. To musí byť menšie ako $f(32) = f(2) \cdot f(2) \cdot f(2) \cdot f(2) \cdot f(2)$, čo však v prípade, že $f(2)$ je rovné trom, vychádza 243. No a 343 nie je ani zďaleka menšie ako 243, čiže ani $f(2) = 3$ nemôže platiť.

Keď sme teda skúsili nájsť takú funkciu, že $f(3) = 7$, dospeli sme k tomu, že akákoľvek hodnota $f(2)$ by viedla k rozporu či už s prvou alebo druhou podmienkou zadania. Preto nie je možné, aby $f(3)$ mala hodnotu 7.

Veľmi podobne by to skončilo, aj keby sme skúsili, že $f(3) = 8$. Totiž, potom $f(9) = 64$ a $f(27) = 512$. Zo vzťahu $f(27)$ a $f(32)$ vieme, že $f(2)^5 = f(32) > f(27) = 512$, a teda $f(2) \geq 4$. Porovnaním $f(8)$ a $f(9)$ naopak dostávame, že $f(2)^3 = f(8) < f(9) = 64$, čiže $f(2) < 4$, čo je dokopy spor.

No a keď by sme začali s predpokladom, že $f(3) = 9$, podobne ako vyššie by sme

- vzťahom medzi $f(2)$ a $f(3)$ dostali, že $f(2) \leq 8$,
- vzťahom medzi $f(3)$ a $f(4)$ dostali, že $f(2) \geq 4$ a
- vzťahom medzi $f(8)$ a $f(9)$ zas, že $f(2) \leq 4$.

Čiže $f(2)$ môže byť jedine 4. Toto by nám už však nikde vyššie rozpory nespôsobovalo. Tiež by sme mohli skúšať, čo vieme zistiť o $f(5)$, no a postupne by sme povylučovali všetky možnosti okrem čísla 25. No a tu si už začneme všímať, že nám vychádzajú druhé mocniny čísla, ktoré do funkcie vhodíme.

Javí sa to teda tak, že funkcia $f(x) = x^2$ bude vyhovovať pre hodnotu $f(3) = 9$. Overme ešte, že naozaj spĺňa všetky tri podmienky zadania. To je však zrejmé, lebo

1. $f(ab) = (ab)^2 = a^2b^2 = f(a)f(b)$,
2. ak $a < b$, tak keďže a, b sú kladné, tak následne aj $f(a) = a^2 = a \cdot a < a \cdot b < b \cdot b = b^2 = f(b)$,
3. $f(3) = 3^2 = 9 \geq 7$.

Dostali sme teda, že $f(3)$ nemôže byť 7 ani 8 (lebo následne sme ukázali, že neexistuje vhodná hodnota pre $f(2)$) a potom sme prišli na to, že $f(3) = 9$ vieme dosiahnuť s funkciou $f(x) = x^2$. To znamená, že najmenšia možná hodnota $f(3)$ je deväť[3].

Poznámka k riešeniam využívajúcim ťažké kalibre

Ako sa dá zo vzorového riešenia vidieť, úloha sa dala vyriešiť pomerne jednoducho a bez použitia náročných techník a viet. Vyskytlo sa však zopár riešení, ktoré sa snažili použiť na úlohu nejaké silné tvrdenia ako Cauchyho multiplikatívnu funkcionálnu rovnicu[4] alebo Erdősovu vetu[5]. Obidve nejakým spôsobom tvrdia, že ak máme multiplikatívnu funkciu ($f(ab) = f(a)f(b)$), tak riešenia sú tvaru $f(x) = x^\alpha$. Keď hovorím „nejakým spôsobom“, myslím tým, že za obidvoma z nich sa skrýva niekoľko zádrheľov, kvôli ktorým nemôžete ani jednu z viet priamo použiť na úlohu. Poväčšine sa vám nepodarilo tieto zádrhele vyriešiť tak, aby sa na úlohu veta naozaj dala použiť.

Pri Cauchyho funkcionálke to ani nebolo možné. Totiž, ako sa môžete dočítať na uvedenej stránke, ide o funkciu, ktorá každému **kladnému reálnemu** číslu priradzuje nejaké kladné reálne číslo. Zároveň sa vyžaduje, aby bola **spojitá**. Funkcie z kladných reálnych čísel sú niečo úplne iné ako funkcie z kladných celých čísel. To, že máme

[3] Jožtek by vám to isto s radosťou povedal, keby ste sa ho na to opýtali

[4] `https://imomath.com/index.cgi?page=cauchyFunctionalEquations`, posledná odrážka

[5] `https://ak2316.user.srcf.net/2021/09/erdos-monotone-multiplicative/`

nejaké riešenie na celočíselných funkciách, nemusí nutne znamenať, že toto riešenie ide rozšíriť či zovšeobecniť aj na reálnu funkciu. Navyše, Cauchyho funkcionálna rovnica má aj množstvo nespojitých riešení, ktoré nie sú tvaru $f(x) = x^\alpha$. Čo s nimi?

Čo sa týka Erdősovej vety, tá už bola trochu uchopiteľnejšia. Hovorí totiž o funkciách, ktoré zobrazujú z prirodzených čísel do **reálnych** čísel a tvrdí, že riešenia sú tvaru $f(x) = x^\alpha$, kde α je **reálna** konštanta. Už sa teda funkcie aspoň zhodujú v tom, čo do nich môžeme vhadzovať. Niektorí z vás však bez bližšieho zdôvodnenia povedali, že keďže pre $\alpha = 1$ je $f(3)$ ešte menšie ako 7 a pre $\alpha = 2$ už je to 9, tak $f(3)$ musí byť aspoň 9. Lenže, α je reálna konštanta, prečo by to nemohlo byť nejaké číslo medzi 1 a 2, napríklad $\frac{\pi}{2}$? Ono to síce intuitívne vyzerá tak, že na to, aby sme vždy ako výsledok funkcie dostali celé číslo, musí byť aj exponent celý, no ale chcelo by to aj dokázať. A to vo všeobecnosti nie je ľahké, lebo veď, ani umocňovanie na iracionálne čísla nie je ľahké. A ako sa teda dalo za riešenie s Erdősovou vetou získať 9 bodov?

Korektné riešenie využívajúce Erdősovu vetu *(inšpirované riešením Samuela Vargovčíka)*

Z Erdősovej vety vieme, že ak nejaká funkcia spĺňa všetky tri podmienky zadania, musí pre ňu existovať reálna konštanta k taká, že $f(x) = x^k$. Zaujímajú nás len prípady, kedy $f(3) < 9$, keďže z predošlého riešenia už vieme, že $f(3)$ môže byť 9. Z tretej podmienky vyplýva $f(3) \geq 7$, a keďže $f(3) \in \mathbb{Z}^+$, ostáva prešetriť prípady $f(3) = 7$ a $f(3) = 8$, teda $k = \log_3 7$ a $k = \log_3 8$. To, že tieto k nefungujú, vyplýva z toho, že pre ne $f(2) = 2^k$ nie je celé číslo, pretože $3 < 2^k < 4$. Poďme to dokázať.

Vieme, že $3^5 = 243 < 343 = 7^3$. Keďže tretia odmocnina je rastúca funkcia, môžeme obe strany odmocniť a vzťah sa nezmení, čiže $3^{\frac{5}{3}} < 7$. Teraz dvakrát za sebou využijeme, že logaritmus so základom 3 je tiež rastúca funkcia. Prvýkrát na to, aby sme predošlý vzťah mohli zlogaritmovať a dostať $\frac{5}{3} < \log_3 7$ a druhýkrát na to, aby sme mohli priraďiť do nerovnosti ďalšie hodnoty, konkrétne $\frac{5}{3} < \log_3 7 < \log_3 8 < \log_3 9 = 2$.

Vidíme teda, že ak by $f(3) \in \{7, 8\}$, tak $\frac{5}{3} < k < 2$. Ďalej vieme, že $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} < 4 = 2^2$. Treťou odmocninou dostávame $\frac{3}{2} < 2^{\frac{2}{3}}$, vďaka čomu už vieme s rastúcosťou exponenciálnej funkcie so základom 2 ľahko nahliadnuť, že naozaj $2^k < 2^2 = 4$ a $2^k > 2^{\frac{5}{3}} = 2 \cdot 2^{\frac{2}{3}} > 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$.

Preto, ak by k zodpovedalo hodnotám $f(3) = 7$ alebo $f(3) = 8$, tak $f(2) = 2^k$ nemôže byť kladné celé číslo, spor. To znamená, že $f(3)$ nemôže byť 7 ani 8, triviálne nemôže byť menšie než 7 a musí byť celé číslo, takže musí byť aspoň 9. Keďže môže byť presne 9, najmenšia hodnota, ktorú môže nadobúdať $f(3)$, je 9.

3.7 Kým Margecany Spriechodnia

Zadanie. *Vlak zastavil v Margecanoch, kde všetkých cestujúcich vysadili z vlaku, pretože na koľajnice sa vysypal piesok, a tak nemohli pokračovať v ceste, kým sa neodprace. Vedúci sa preto rozhodli, že kým budú čakať na odpratanie piesku z koľajníc, tak si na parkovisku pred stanicou spolu s účastníkmi zatancujú.*

Dievčatá aj chlapci sa zoradili podľa výšky, pochytali sa za ruky a vytvorili páry tak, že najvyššie dievča bolo s najnižším chlapcom, druhé najvyššie s druhým najnižším a tak ďalej. Potom spustili hudbu a všetky páry začali spolu mocne tancovať. Nikto nevedel predpovedať, k čomu toto jašenie povedie, výsledok mohol byť úplne akýkoľvek.

Dokážte, že ľubovoľné kladné celé číslo sa dá vyjadriť v tvare

$$3^{u_1} \cdot 2^{v_1} + 3^{u_2} \cdot 2^{v_2} + \cdots + 3^{u_k} \cdot 2^{v_k},$$

kde k je kladné celé číslo a $u_1 > u_2 > \cdots > u_k \geq 0$ *a* $0 \leq v_1 < v_2 < \cdots < v_k$ *sú nezáporné celé čísla.*

Riešenie. opravuje **Viktor** (viktor.balan@trojsten.sk)

Poďme dokázať indukciou, že sa naozaj všetky kladné celé čísla dajú v takomto tvare vyjadriť. Začnime indukčnou bázou:

$$1 = 3^0 \cdot 2^0.$$

Zjavne takto vieme vyjadriť číslo 1. Teraz pokračujme indukčným krokom: Predstavme si, že máme takto vyjadriť číslo n. Môžeme rátať s pravdivosťou indukčného predpokladu, ktorý nám hovorí, že takto už vieme vyjadriť všetky nižšie kladné celé čísla. Pokiaľ n je párne, vieme ho vyjadriť veľmi jednoducho tak, že vyjadríme $n/2$, ale v každom člene zvýšime mocninu 2 o 1, čím teda celý výsledok zdvojnásobíme bez toho, aby prestala platiť podmienka zoradenia mocnín zo zadania. Napríklad číslo 7 vieme vyjadriť ako

$$7 = 3^1 \cdot 2^0 + 3^0 \cdot 2^2.$$

Potom vieme vyjadriť jeho dvojnásobok nasledovne:

$$14 = 3^1 \cdot 2^1 + 3^0 \cdot 2^3.$$

Čo ak je ale n nepárne? Nájdime najvyššie celé číslo x také, že $3^x \leq n$. Pokiaľ dochádza k rovnosti, n je mocnina troch a dá sa vyjadriť jednoducho nasledovne:

$$n = 3^x \cdot 2^0.$$

V opačnom prípade je nerovnosť ostrá, a teda $n - 3^x$ je nejaké kladné celé číslo menšie ako n. Označme ho m. Zároveň platí, že keďže x je najvyššie také číslo, určite už pre číslo o jedna vyššie nerovnosť neplatí, teda $3^{x+1} > n$. Z toho vyplýva aj, že $m = n - 3^x < 3^{x+1} - 3^x = 2 \cdot 3^x$, ale táto horná hranica pre veľkosť m bude relevantná až neskôr. Teraz si povedzme, ako vyjadriť n. Podľa indukčného predpokladu určite m vyjadriť vieme, tak jednoducho k tomuto súčtu na začiatok (poradie členov nás zaujíma, pretože náš súčet musí spĺňať dve podmienky ich poradia) pripočítajme člen $3^x \cdot 2^0$. Teda napríklad, keď číslo 10 vieme vyjadriť ako

$$10 = 3^1 \cdot 2^1 + 3^0 \cdot 2^2,$$

skúsme z neho vyjadriť číslo 19. Odrátajme od 19 najvyššiu možnú mocninu troch, čo je v tomto prípade 9, a sčítajme ju s vyjadrením čísla $19 - 9 = 10$. Dostaneme tak

$$19 = 3^2 \cdot 2^0 + 3^1 \cdot 2^1 + 3^0 \cdot 2^2,$$

Dokážme, že takýto rad bude vždy spĺňať všetky zadané podmienky. Určite platí, že súčtom je naozaj n, pretože prvý člen dáva súčet 3^x a zvyšné $m = n - 3^x$. Teraz už len ukázať, že exponenty nad trojkami klesajú a exponenty nad dvojkami stúpajú.

Začnime dvojkami. V našom novom člene je exponent nad dvojkou vždy 0. Keďže zvyšné exponenty už boli súčasťou správneho vyjadrenia čísla m, určite stúpajú aj teraz, a teda jediný problém, ktorý môže nastať, je keď aj exponent druhého členu je 0. Toto ale nemôže nastať. Prečo? Tento exponent bol pôvodne prvým členom vyjadrenia m. Teda ak by bol nulový, znamenalo by to, že m je súčtom niekoľkých členov, z ktorých jeden je nejakým číslom v tvare $3^? \cdot 2^0$, teda vždy nepárny, a zvyšné členy musia mať všetky vyššie exponenty, teda všetky sú násobkami 2, teda párne. Súčtom ľubovoľne veľa párnych a jedného nepárneho čísla je vždy číslo nepárne, teda

m by muselo byť nepárne. Lenže m sme už zadefinovali ako súčet (resp. rozdiel) dvoch nepárnych čísel $n - 3^x$, teda musí byť párne. Dostávame spor, a vidíme, že naozaj budú exponenty nad dvojkou len stúpať.

Ostáva posledný krok, ukázať, že exponenty nad trojkami klesajú. Všetky exponenty po prvom boli predtým súčasťou vyjadrenia čísla m, teda musia klesať. Jediné, čo musíme ukázať, je že klesajúcosť sa zachová aj medzi prvým a druhým exponentom. Teda, že prvý exponent, čo je x, je vyšší ako druhý. Predstavme si, že by to tak nebolo. Teda druhý člen by vyzeral takto: $3^u \cdot 2^v$, kde $u \geq x$ a $v > 0$ (vieme, že exponent nad dvojkou bude kladný, pretože už sme dokázali, že exponenty nad dvojkami naozaj stúpajú). To znamená, že tento člen vieme zdola odhadnúť ako $3^u \cdot 2^v \geq 3^u \cdot 2 \geq 3^x \cdot 2$. Zároveň vieme, že tento člen je súčasťou súčtu kladných čísel, ktorého veľkosť je m. Preto platí $m \geq 3^u \cdot 2^v$ a teda spojením dvoch nerovností $m \geq 3^x \cdot 2$. Tu nám ale vzniká spor – už dávnejšie sme povedali, že $m < 2 \cdot 3^x$. Teda náš predpoklad nebol správny. To znamená, že určite sa nám nestane, že novopridaný člen $3^x \cdot 2^0$ naruší akúkoľvek peknú vlastnosť našej postupnosti, a teda naše vyjadrenie pre nepárne n je vždy správne. Tým sme ukázali pre párne aj nepárne n, ako ich s pomocou vyjadrení nižších čísel vyjadriť tiež, a že tieto vyjadrenia vždy spĺňajú zadané podmienky.

3.8 KMSáci Margecany Spratávajú

Zadanie. *Vedúci dotancovali, ale piesok ešte nebol z trate odprataný, a tak sa ho všetci cestujúci rozhodli ísť odpratávať. Odpratávali ho svorne zrnko po zrnku. Niektoré zrnká išli ľahšie a zvládol ich odpratať samotný cestujúci, s inými si však museli poradiť aj viacerí. Keď už bol všetok piesok odprataný, vlakvedúci chcel oceniť najusilovnejších odpratávačov. Na to by však o každom z nich musel vedieť, akú množinu zrniek piesku odpratal.*

Majme sto množín. V každom kroku si vie vlakvedúci vybrať dve množiny a zistiť ich prienik aj zjednotenie. Nájdite najmenší možný počet krokov, na ktorý vie vlakvedúci zistiť presný obsah všetkých množín.

Riešenie. opravuje **Mati** (matus.zelko@trojsten.sk)

V úlohe chceme ukázať, na koľko meraní vlakvedúci vie zistiť obsahy jednotlivých množín. Takže nás čakajú 2 časti. Najprv ukážeme, že na 100 meraní už vlakvedúci vie vedieť obsahy všetkých množín. Následne ukážeme že 100 meraní naozaj potrebujeme.

Zatiaľ uvažujme 3 množiny A, B, C. Spravme medzi nimi všetky merania. Najprv rýchle uvedomenie, že ak viem obsah množiny X a Y, tak už mám aj obsah $X \backslash Y$ (X bez Y). Nech $Z = A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup (A \cup C)$, takže Z, zjednotenie všetkých 3 množín máme. Ďalej nech $D = A \cap B$ a $E = A \cap C$. Potom $A = (Z \backslash (B \cup C)) \cup D \cup E$. Tým dostávame vyjadrenie pre A využívajúce len prieniky a zjednotenia týchto 3 množín. V prípade, že by to čitateľ mal problém nahliadnuť, odporúčame si nakresliť Vennov diagram. Keďže je situácia symetrická, tak vieme dorátať aj obsahy množín B a C. Pre ostatných 97 množín postupujme nasledovne: porovnajme ich vždy po jednej (nazvime ju M_i) s množinou A, ktorej obsah už je známy. Potom $M_i = ((A \cup M_i) \backslash A) \cup (A \cap M_i)$ nám dáva postupne obsahy ostávajúcich množín. Dokopy to sú 3 merania na odhalenie množín A, B, C a potom 97 ďalších meraní, čím sme zakončili prvú časť dôkazu.

Náročnejšou pasážou je ukázať, že 100 meraní naozaj potrebujeme. Respektíve vyžaduje nie úplne očividný nápad, že množiny si vieme reprezentovať ako vrcholy grafu a merania ako hrany medzi nimi. Najprv predpokladajme, že sme spravili najviac 99 meraní. Potom náš graf má aspoň jeden komponent súvislosti neobsahujúci cyklus. To nahliadneme z toho, že súvislý graf na n vrcholoch musí mať aspoň $n - 1$ hrán a potrebuje ich aspoň n aby obsahoval cyklus. Ak každý vrchol je v komponente súvislosti s cyklom, tak každý komponent má aspoň toľko hrán ako vrcholov. Takže náš graf by musel mať aspoň 100 hrán, čo nemá podľa predpokladu. Ak má tento acyklický komponent jeden vrchol, tak sme sa na danú množinu nepýtali, a teda nemôžeme poznať jej obsah.

Ak je komponent aspoň 2-vrcholový, tak ide o strom, špeciálne je bipartitný (vieme ho rozdeliť na 2 množiny, kde v rámci každej nevedú hrany), kde obe partície sú neprázdne. Predstavme si, že by jedna partícia obsahovala iba prázdne množiny a druhá množiny obsahujúce prvok a. Potom a leží v každom zjednotení (na aspoň jednom konci každej hrany) a v žiadnom prieniku (nikdy nie na oboch). Potom však nevieme určiť, v ktorej z týchto 2 partícií sa a nachádza a ktorá je prázdna, takže 99 meraní nestačí.

Pozorný čitateľ v tomto momente môže namietať, že prvok a sme do množín umiestnili až po tom, čo prebehli porovnania, pričom normálne proces prebieha obrátene. Naša stratégia však vie teoreticky záležať na obsahu daných množín, a teda ho nevieme umiestniť BUNV na konci. Táto námietka je oprávnená, no nevadí nám. Ukážeme, že hneď na začiatku vieme do množín zadeliť prvky tak, aby nech počas konštrukcie vznikne akýkoľvek strom, tak daný prvok bude mať v každom druhom vrchole. Spravíme to priamočiaro. Stromov, ktoré mohli vzniknúť, je na 100 vrcholoch iba konečne veľa. Postupne ich prejdime a každému dajme na každé druhé miesto prvok. Potom, keď pri konštrukcii vznikne akýkoľvek strom, ako komponent súvislosti, tak sa v ňom nachádza prvok, ktorý bude ležať v každom zjednotení a žiadnom prieniku, a teda nebudeme vedieť, v ktorej partícií sa bude nachádzať, čím je náš dôkaz naozaj ukončený.

3.9 Keď Matematika Sedí

Zadanie. – *Koľko je hodín?*

– *Deväť.*

– *Z ktorej koľaje odchádza náš vlak?*

– *Deväť?*

– *V ktorom vozni máme miestenky?*

– *Deväť.*

– *A v ktorom kupé?*

– *Deväť?*

– *Aké číslo má úloha „Majme rovnoramenný trojuholník ABC so základňou BC. Vezmime si ľubovoľný bod X vnútri úsečky BC. Ďalej nech Y, Z sú postupne body vnútri ramien AB, AC spĺňajúce* $|\sphericalangle BXY| = |\sphericalangle ZXC|$*. Rovnobežka k YZ prechádzajúca bodom B pretne priamku XZ v bode T. Ukážte, že AT je osou* $\sphericalangle BAC$*."?*

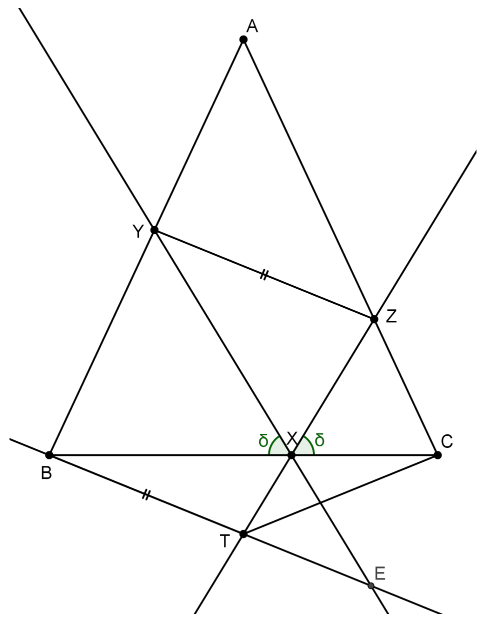
Ako ste isto pochopili, vyriešte úlohu číslo deväť.

Riešenie. opravuje **M&M** (marek.murin@trojsten.sk)

Začnime dôkladným pohľadom na to, čo máme dokázať. Trojuholník ABC je rovnoramenný, čo znamená, že os $\sphericalangle BAC$ je zároveň výškou na BC, ťažnicou z vrcholu A, a osou strany BC. Zvlášť ten posledný fakt sa nám môže zísť. Stačí nám totiž ukázať, že BCT je rovnoramenný trojuholník so základňou BC. V skutočnosti by nás k cieľu doviedol aj dôkaz, že T leží na niektorej zo zvyšných priamok. Keď nevieme, kam nás naše riešenie zavedie, je fajn mať na mysli aj ostatné možnosti.

Druhá vec, na ktorú si treba dať pozor, sú rôzne konfigurácie nášho obrázka. Môžeme si všimnúť, že ak $|BX| > |XC|$, tak priamka BT bude viesť mimo trojuholníka a bod T nutne vznikne mimo. V prípade $|BX| = |CX|$ je BT totožná s BC. Poslednou možnosťou je $|BX| < |XC|$, kedy bude T vnútri trojuholníka. Poďme však pekne postupne.

Bod X je bližšie k C

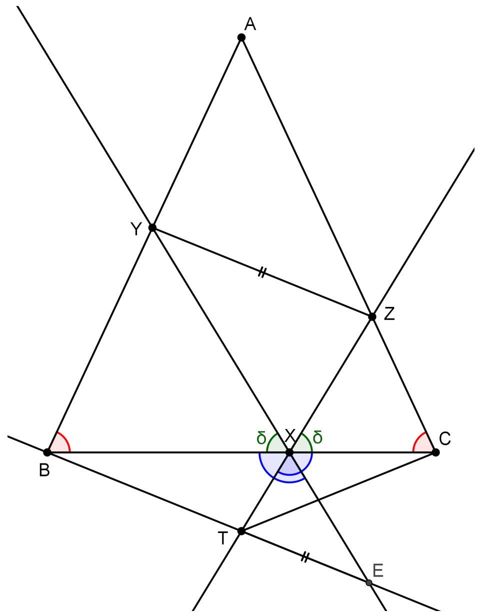


Podľa zadania $|\sphericalangle BXY| = |\sphericalangle CXZ|$. Tento uhol označíme δ. Vďaka rovnoramennosti ABC vidíme tiež, že $|\sphericalangle YBX| = |\sphericalangle ZCX|$. Trojuholníky XBY a XCZ sú teda podobné podľa vety *uu*.

Uhol δ sa nachádza aj „z druhej strany" úsečky BC. Označme E priesečník priamok XY a BT. Máme tam uhly vrcholové k $\sphericalangle BXY$ a $\sphericalangle CXZ$, menovite $\sphericalangle CXE$ a $\sphericalangle BXT$. My sa však pozrieme na ich doplnky do 180. Platí

$$|\sphericalangle BXE| = 180 - \delta = |\sphericalangle CXT|.$$

Prečo sú tieto uhly zaujímavé? Lebo ležia v trojuholníkoch BXE a CXT. Ako sme si povedali už na začiatku, zaujíma nás, či je trojuholník BCT rovnoramenný, teda, či $|\sphericalangle XBT| = |\sphericalangle XCT|$. Ak to platilo, boli by spomínané trojuholníky BXE a CXT podobné. To zatiaľ nevieme, ale vytýčili sme si o niečo jasnejší cieľ.



My však chceme použiť podobnosť na to, aby sme ukázali, že nejaké uhly sú rovnaké. Samotnú podobnosť teda musíme skúsiť ukázať inak. Veľa možností nemáme, potrebujeme sa vrhnúť na pomery strán. Vďaka podobnosti XBY a XCZ už niečo vieme o stranách BX a CX, no nevieme, čo sa deje vo zvyšku.

Ešte sme však nevyužili rovnobežky zo zadania. Vďaka rovnobežnosti YZ a BT si môžeme všimnúť, že trojuholníky XZY a XTE sú rovnoľahlé, a teda podobné. To nám niečo hovorí o úsečkách XT a XE, ktoré sú súčasťou trojuholníkov, ktorých podobnosť chceme ukázať.

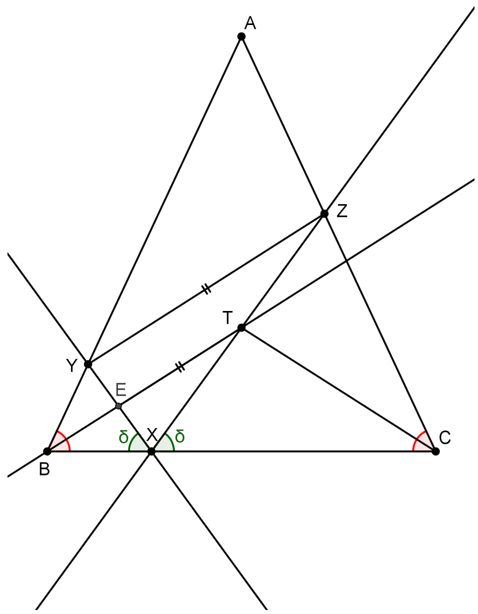
Konkrétne dostávame, pre pomery strán vnútri trojuholníkov, $|XT| : |XE| = |XZ| : |XY|$. Tu sa nám zíde prvá dokázaná podobnosť – XBY a XCZ. Podľa nej (pre koeficient podobnosti) $|XZ| : |XY| = |XC| : |XB|$. Keď si ich spojíme, dostaneme $|XT| : |XE| = |XC| : |XB|$. V oboch pomeroch sú prvé strany z trojuholníka CXT a druhé z BXE. Na podobnosť nám teda stačí, aby uhly medzi XT a XC a medzi XE a XB boli rovnaké.

To sme však už dopočítali, keď sme prvýkrát hovorili o daných trojuholníkoch. Zistili sme, že tieto uhly sú oba $180° - \delta$. Môžeme si teda všimnúť, že trojuholníky BXE a CXT sú podobné. Potom nutne $|\sphericalangle XBT| = |\sphericalangle XCT|$, takže T leží na osi BC, čo je skutočne os uhla $\sphericalangle BAC$.

Bod X je v strede BC

V takomto prípade je X priamo na osi súmernosti trojuholníka ABC. Vďaka $|\sphericalangle BXY| = |\sphericalangle CXZ|$ je osovo súmerný aj trojuholník XYZ a teda YZ je kolmá na AX. Rovnobežka s YZ je teda totožná s BC, jej priesečník s XZ bude priamo X. Stred $X = T$ strany BC leží na osi uhla ABC, keďže je to rovnoramenný trojuholník.

Bod X je bližšie k B



Na úvod si všimnime, že naše úvahy o trojuholníkoch XBY a XCZ prejdú rovnako aj v tejto konfigurácií. Tie sú teda podobné. Rovnako sa zachová aj podobnosť trojuholníkov XYZ a XTE. Rovnobežnosť zo zadania sa nezmenila a tak máme aj rovnoľahlosť, len tentokrát s kladným koeficientom. Otázny je len osud trojuholníkov BXE a CXT.

Podobne ako minule dostaneme z prvých dvoch podobností, že $|XT| : |XE| = |XZ| : |XY| = |XC| : |XB|$. Potrebujeme už len uhol medzi XE a XB a medzi XT a XC. To je však tentokrát o niečo jednoduchšie. Keďže E leží na polpriamke XY, uhol $\sphericalangle BXE$ je priamo δ. Analogicky $|\sphericalangle CXT| = |\sphericalangle CXZ| = \delta$.

Opäť dostaneme podobnosť BXE a CXT, takže $|\sphericalangle XBT| = |\sphericalangle XCT|$ a T bude ležať na osi strany BC a teda aj uhla $\sphericalangle BAC$.

3.10 Krkolomne Mocnia Strojvodcovia

Zadanie. *Keď vlak konečne dorazil do Brezna, vedúci nelenili ani chvíľu a začali vykladať erár von z vlaku. Viktor zdvihol zrak, že znesie Stana dole, ale tu si všimol, že sa mu vzďaľuje! Vlak sa začal spolu so zvyškom eráru a účastníkmi rozbiehať zo stanice von. To však Jožko nemohol nechať len tak. Našiel núdzovú brzdu, silne za ňu zatiahol a vlak sa prudko zastavil. Všetkým účastníkom (a eráru) sa podarilo šťastlivo vystúpiť von z vlaku. Avšak teraz musia chudáci strojvodcovia odbrzdiť vlak. To sa robí tak, že nahromadený tlak v brzdách sa postupne uvoľňuje. A ako inak než odmocňovaním.*

Pre každé $n \geq 1$ definujme

$$a_n = 2 - \frac{1}{n^2 + \sqrt{n^4 + \frac{1}{4}}}.$$

Dokážte, že suma $\sqrt{a_1} + \cdots + \sqrt{a_{119}}$ je prirodzené číslo.

Riešenie. opravuje **Lukáš** (lukas.gaborik@trojsten.sk)

Našim cieľom je upraviť si výraz do nejakého použiteľnejšieho tvaru. Prvá vec, ktorá sa nám nepáči, je odmocnina v menovateli. Poďme sa jej teda zbaviť.

Metóda, ktorou vieme dostať odmocninu preč z menovateľa, sa nazýva *usmernenie zlomku*. Jej základnou myšlienkou je vzťah pre rozdiel štvorcov, ktorý vraví, že $X^2 - Y^2 = (X - Y)(X + Y)$. Všimnime si, že ak máme v menovateli súčet dvoch členov, z ktorých každý je racionálne číslo alebo odmocnina z racionálneho čísla, pokiaľ rozšírime tento zlomok ich rozdielom, v menovateli budeme mať racionálne číslo (a odmocniny sa presunú do čitateľa). Keď túto stratégiu použijeme pre náš výraz, dostaneme

$$a_n = 2 - \frac{1}{n^2 + \sqrt{n^4 + \frac{1}{4}}} = 2 - \frac{1}{n^2 + \sqrt{n^4 + \frac{1}{4}}} \cdot \frac{n^2 - \sqrt{n^4 + \frac{1}{4}}}{n^2 - \sqrt{n^4 + \frac{1}{4}}} = 2 - \frac{n^2 - \sqrt{n^4 + \frac{1}{4}}}{n^4 - \left(n^4 + \frac{1}{4}\right)} =$$

$$= 2 + 4\left(n^2 - \sqrt{n^4 + \frac{1}{4}}\right) = 4n^2 + 2 - 4\sqrt{n^4 + \frac{1}{4}} = 4n^2 + 2 - 2\sqrt{4n^4 + 1}.$$

Výraz sme si síce zjednodušili, no uvedomme si, že chceme súčet odmocnín našich členov, nie tých členov samotných. To znamená, že prakticky máme výrazy, v ktorých sú odmocniny pod ďalšou odmocninou. Chceli by sme sa teda pokúsiť „vytiahnuť" vnútornú odmocninu spod tej vonkajšej. Ale ako?

Pozrime sa, čo sa deje s výrazom $X + Y \cdot \sqrt{Z}$, keď ho umocníme na druhú. Dostávame tak

$$\left(X + Y \cdot \sqrt{Z}\right)^2 = X^2 + 2XY\sqrt{Z} + Y^2 Z = (X^2 + Y^2 Z) + 2XY \cdot \sqrt{Z}.$$

Všimnime si, že aj výsledný výraz je tvaru dačo + čosi $\cdot \sqrt{Z}$. To nám môže vnuknúť nápad, že ak by sme vnútornú odmocninu vedeli vytiahnuť von, výsledok by bol tvaru $x + y\sqrt{4n^4 + 1}$. Poďme teda skúsiť také x, y nájsť.

Chceme, aby platilo

$$\begin{aligned} \sqrt{a_n} &= x + y\sqrt{4n^4 + 1}, \\ a_n &= x^2 + 2xy\sqrt{4n^4 + 1} + y^2(4n^4 + 1), \\ (4n^2 + 2) - 2 \cdot \sqrt{4n^4 + 1} &= \left[x^2 + y^2(4n^4 + 1)\right] + 2xy \cdot \sqrt{4n^4 + 1}. \end{aligned}$$

Podotknime ešte, že v prvom kroku sme urobili neekvivalentnú úpravu, a teda nám x, y môžu vyjsť s opačnými znamienkami. Nakoniec preto treba overiť, či $x + y\sqrt{4n^4 + 1} \geq 0$.

To vieme dosiahnuť napríklad tak, že budeme požadovať, aby platilo súčasne

$$4n^2 + 2 = x^2 + y^2(4n^4 + 1), \tag{10.1}$$

$$-2 = 2xy. \tag{10.2}$$

Tu vieme z (10.2) vyjadriť $x = -\frac{1}{y}$ a to dosadiť do (10.1), čím dostaneme

$$4n^2 + 2 = \frac{1}{y^2} + y^2(4n^4 + 1),$$
$$0 = (4n^4 + 1)y^4 - (4n^2 + 2)y^2 + 1.$$

Z toho už substitúciou $t = y^2$ vieme dostať kvadratickú rovnicu

$$(4n^4 + 1)t^2 - (4n^2 + 2)t + 1 = 0$$

a štandardným vzťahom odvodiť jej riešenia

$$t_{1,2} = \frac{4n^2 + 2 \pm \sqrt{(4n^2 + 2)^2 - 4(4n^4 + 1)}}{2(4n^4 + 1)} = \frac{4n^2 + 2 \pm \sqrt{16n^4 + 16n^2 + 4 - 16n^4 - 4}}{2(4n^4 + 1)} =$$
$$= \frac{4n^2 + 2 \pm \sqrt{16n^2}}{2(4n^4 + 1)} = \frac{4n^2 \pm 4n + 2}{2(4n^4 + 1)} = \frac{2n^2 \pm 2n + 1}{4n^4 + 1}.$$

Všimnime si, že škaredá odmocnina v čitateli sa nám zázračne zjednodušila a dostali sme celkom pekný výraz.[6]

Keďže nehľadáme všetky riešenia, ale iba nejaké jedno, pomocou ktorého sa nám podarí zjednodušiť odmocnina, môžeme si zobrať $t = \frac{2n^2+2n+1}{4n^4+1}$. Toto je pre kladné n očividne kladné, vieme určiť aj $y = \sqrt{t} = \frac{\sqrt{2n^2+2n+1}}{\sqrt{4n^4+1}}$ a z neho $x = -\frac{\sqrt{4n^4+1}}{\sqrt{2n^2+2n+1}}$. Následne ale

$$\sqrt{a_n} = x + y\sqrt{4n^4 + 1} = -\frac{\sqrt{4n^4 + 1}}{\sqrt{2n^2 + 2n + 1}} + \frac{\sqrt{2n^2 + 2n + 1}}{\sqrt{4n^4 + 1}} \cdot \sqrt{4n^4 + 1} = \sqrt{2n^2 + 2n + 1} - \frac{\sqrt{4n^4 + 1}}{\sqrt{2n^2 + 2n + 1}}.$$

Pripomeňme si, že vyššie sme urobili neekvivalentnú úpravu. Preto teraz musíme overiť, či platí

$$\sqrt{2n^2 + 2n + 1} - \frac{\sqrt{4n^4 + 1}}{\sqrt{2n^2 + 2n + 1}} \overset{?}{\geq} 0.$$

To však ľahko vyplynie z toho, že $(2n^2 + 2n + 1)^2 = 4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 1 \geq 4n^4 + 1$ platí pre ľubovoľné prirodzené n.

Preto hľadáme súčet

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_{119}} = \sqrt{2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1} - \frac{\sqrt{4 \cdot 1^4 + 1}}{\sqrt{2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1}} + \sqrt{2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 1} - \frac{\sqrt{4 \cdot 2^4 + 1}}{\sqrt{2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 1}} + \cdots =$$
$$= \sqrt{5} - \sqrt{\frac{5}{5}} + \sqrt{13} - \sqrt{\frac{65}{13}} + \sqrt{25} + \sqrt{\frac{325}{25}} + \cdots = \sqrt{5} - 1 + \sqrt{13} - \sqrt{5} + 5 - \sqrt{13} + \cdots.$$

[6]Skutočnosť je taká, že takéto niečo nevyjde vždy. Napríklad, výraz $\sqrt{4 - \sqrt{7}}$ sa dá zjednodušiť, kdežto výraz $\sqrt{1 + \sqrt{3}}$ nie. To, že nám to v tejto úlohe vyšlo, je iba zhoda náhod (resp. zámer tvorcu).

Preskúmaním prvých pár členov sa tento súčet začína javiť ako tzv. *teleskopický rad* – taký, v ktorom sa vedľajšie členy čiastočne vzájomne sčítajú na nulu. Na to by sme ale potrebovali overiť, že platí

$$\sqrt{2n^2+2n+1} \stackrel{?}{=} \frac{\sqrt{4(n+1)^4+1}}{\sqrt{2(n+1)^2+2(n+1)+1}},$$

$$(2n^2+2n+1)(2(n+1)^2+2(n+1)+1) \stackrel{?}{=} 4(n+1)^4+1.$$

Roznásobením ľavej strany dostaneme

$$(2n^2+2n+1)(2(n+1)^2+2(n+1)+1) = (2n^2+2n+1)(2n^2+6n+5) = 4n^4+16n^3+24n^2+16n+5$$

a roznásobením pravej zas

$$4(n+1)^4+1 = 4(n^4+4n^3+6n^2+4n+1)+1 = 4n^4+16n^3+24n^2+16n+5,$$

čiže uvedená rovnosť naozaj platí. Preto

$$\sqrt{a_n} = \sqrt{2n^2+2n+1} - \frac{\sqrt{4n^4+1}}{\sqrt{2n^2+2n+1}} = \sqrt{2n^2+2n+1} - \sqrt{2(n-1)^2+2(n-1)+1},$$

z čoho už nakoniec dostaneme výsledný súčet ako

$$\begin{aligned}
\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_{119}} =& \sqrt{2\cdot 1^2+2\cdot 1+1} - \sqrt{2\cdot 0^2+2\cdot 0+1} + \\
&+\sqrt{2\cdot 2^2+2\cdot 2+1} - \sqrt{2\cdot 1^2+2\cdot 1+1} + \\
&+\cdots+ \\
&+\sqrt{2\cdot 118^2+2\cdot 118+1} - \sqrt{2\cdot 117^2+2\cdot 117+1} + \\
&+\sqrt{2\cdot 119^2+2\cdot 119+1} - \sqrt{2\cdot 118^2+2\cdot 118+1} = \\
=& \sqrt{2\cdot 119^2+2\cdot 119+1} - \sqrt{2\cdot 0^2+2\cdot 0+1} = 169-1 = 168.
\end{aligned}$$

Dostali sme, že hľadaný súčet je rovný 168, čo je ale očividne celé číslo, čím je dôkaz hotový.