Korešpondenčný matematický seminár
XLV. ročník, 2023/2024
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Riešenia 2. kola zimnej časti

2.1 Koľko Možností Stavať ($\kappa \leq 1$)

Zadanie. *Dávno predtým, než sa dvaja malí zašmudlaní delikventi preslávili ako maškrtní lovci čarodejníc, sa do Začarovaného lesa presťahovala milá ježibabka-architektka. Nemastný-neslaný svet jej víziu nechápal, preto sa rozhodla postaviť si domček z jedla sama. A začala pekne od podlahy – od tvrdých izomaltových dlaždíc.*

Ježibabka mala dohromady 14 dlaždíc, z toho 8 modrých a 6 červených (dlaždice rovnakej farby nevie medzi sebou rozlíšiť). Chcela ich poukladať od bráničky ku dverám domčeka jednu za druhou tak, aby medzi každými dvoma červenými dlaždicami bola aspoň jedna modrá. Koľkými spôsobmi vie ježibabka takto poukladať dlaždice?

Riešenie. opravuje **Filip** (filip.kotoc@trojsten.sk)

Keďže medzi každými dvoma červenými dlaždicami musí byť aspoň jedna modrá, tak keď si poukladáme všetkých 6 červených dlaždíc, tak vieme, že medzi ne musíme umiestniť 5 modrých. Máme teda sekvenciu

Č M Č M Č M Č M Č M Č.

Ostávajú nám ešte 3 modré dlaždice, ktoré musíme umiestniť niekde do sekvencie. Keďže modré dlaždice nevieme medzi sebou rozoznať, tak máme iba 7 miest na ktoré môžeme ukladať tieto 3 modré dlaždice. Uvedomme si, že na jedno miesto môžeme umiestniť viac ako len jednu modrú dlaždicu. Celkový počet rozmiestnení sa teda rovná počtu umiestnení 3 modrých dlaždíc na 7 miest. Tento problém vieme premeniť na usporiadanie 3 dlaždíc a 6 oddeľovačov, ktoré nám budú reprezentovať 7 miest, do ktorých naše 3 dlaždice vkladáme. Celkovo ich vieme usporiadať 9! spôsobmi, ale oddeľovače a dlaždice navzájom nevieme rozoznať. Preto treba tento počet predeliť počtom možností kde máme rovnaké rozmiestnenie modrých dlaždíc. Tie vieme v každom rozmiestnení usporiadať 3! možnosťami a zároveň oddeľovače taktiež vieme medzi sebou usporiadať a tie zase 6! možnosťami. Teda tento výsledok ešte predelíme súčinom 3! a 6!. Dostaneme tak $\frac{9!}{6!\cdot 3!} = 84$.

Celkový počet rozmiestnení modrých a červených dlaždíc, tak aby medzi každými dvoma červenými dlaždicami bola aspoň jedna modrá, je 84.

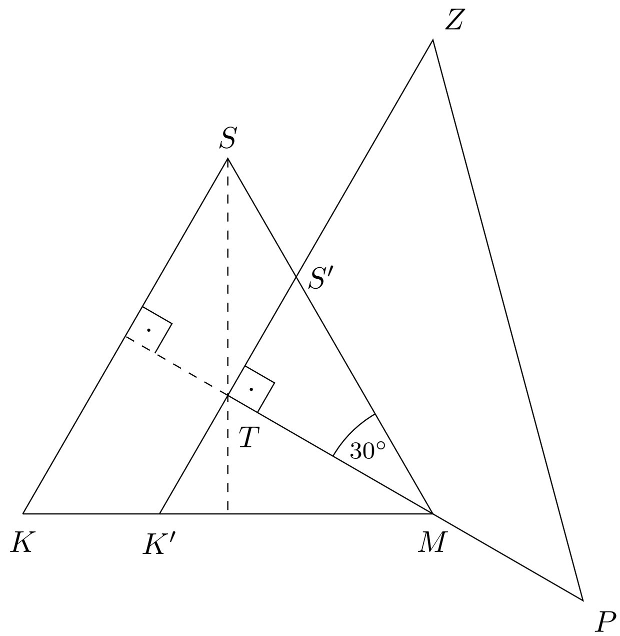
2.2 Koncept Monumentálnej Strechy ($\kappa \leq 2$)

Zadanie. *Ježibabka síce pre svoje presladené názory na univerzite dlho nevydržala, ale podaril sa jej aspoň aký-taký náčrt domčeka. Minimálne strecha vyzerala na papieri celkom k svetu, teda až do momentu, keď sa jej pošmykla ruka. Namiesto toho, aby cukrový papier pokrčila a zjedla, pokračovala v rysovaní a vytvorila abstraktnú futuristickú koncepciu, ktorú ale v žiadnom prípade nedokázala uplatniť pri svojej stavbe.*

Majme rovnostranný trojuholník KMS, ktorého ťažisko označíme T. Nech bod P leží na polpriamke TM a bod Z na kolmici na TM cez bod T tak, aby TPZ bol pravouhlý rovnoramenný trojuholník s odvesnami s dĺžkami strán rovnými dĺžkam strán trojuholníku KMS. Aký je pomer obsahov časti trojuholníka TPZ, ktorá je vnútri trojuholníka KMS, a tej, ktorá je mimo neho?

Riešenie. opravuje **Miloš** (milos.micik@trojsten.sk)

Na začiatok sa nám určite zíde náčrt. Už zo zadania si toho vieme celkom dosť zakresliť, avšak v náčrte sú už aj niektoré čiary a body, ktoré nám budú nápomocné neskôr. Taktiež si označíme priesečník úsečiek TZ a MS ako S', a priesečník polpriamky ZT a úsečky KM ako K'.



Zamyslime sa nad tým, ako by sme mohli dospieť k výsledku. Obsah trojuholníka TPZ už vieme prakticky zo zadania, nakoľko poznáme dĺžky jeho odvesien, ktoré sú v pravom uhle. Ak by sme boli schopní vypočítať obsah trojuholníka TMS', vieme obsah štvoruholníka $MPZS'$ a výsledný pomer dostať jednoducho.

Veľmi nápomocné nám budú v tejto úlohe vedomosti o ťažniciach v rovnostrannom trojuholníku. Vieme, že ťažnice sú zároveň aj výšky, teda sú kolmé na strany, a tak ako v každom trojuholníku, ťažisko vždy rozdeľuje ťažnice v pomere $2:1$. Ak si označíme dĺžku strany KM ako a, potom pomocou Pytagorovej vety vieme vypočítať dĺžku ťažnice ako

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + t^2 = a^2,$$

$$t^2 = a^2 - \left(\frac{a^2}{4}\right),$$

$$t = \sqrt{\frac{3a^2}{4}},$$

$$t = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

No a kedže dĺžka celej ťažnice je $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, dĺžka úsečky TM musí byť

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

Ostáva nám zistiť už len dĺžku úsečky TS'. Jedným zo spôsobov, ako ju nájsť, je uvedomiť si podobnosť trojuholníkov KMS a $K'MS'$, ktoré sú podobné, lebo zdieľajú uhol pri vrchole M, a uhly pri vrcholoch K a K', resp. S a S' sú súhlasné. Nakoľko už poznáme, že dĺžka TM sú $\frac{2}{3}$ z dĺžky ťažnice, vieme určiť aj koeficient podobnosti týchto trojuholníkov, ktorý tým pádom musí taktiež byť $\frac{2}{3}$. Pri podobných trojuholníkoch platí, že všetky korešpondujúce dĺžky v týchto trojuholníkoch sú zmenšené/zväčšené v tom istom pomere, a preto je dĺžka úsečky $K'S'$ rovná $\frac{2}{3}a$. Nakoľko sa bod T nachádza v strede $K'S'$, dĺžka úsečky TS' je $\frac{1}{3}a$. Túto dĺžku vieme dostať aj pomocou tangensu, ak si uvedomíme, že uhol $S'MT$ má 30° (polovica z uhlu v rovnostrannom trojuholníku), potom dĺžku TS' vieme dostať ako $|TS'| = \tan(30°) \cdot |TM| = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}a = \frac{1}{3}a$.

Ďalej potrebujeme zistiť jednotlivé obsahy trojuholníkov TPZ a TMS', a obsah štvoruholníka $MPZS'$

$$S_{TPZ} = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2},$$

$$S_{TMS'} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a \cdot \frac{1}{3}a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{18}a^2,$$

$$S_{MPZS'} = S_{TPZ} - S_{TMS'} = \frac{a^2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{18}a^2 = \frac{9-\sqrt{3}}{18}a^2.$$

No a na záver zostáva už iba samotný pomer TMS' a $MPZS'$, ktorý je

$$\frac{S_{TMS'}}{S_{MPZS'}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{18}a^2}{\frac{9-\sqrt{3}}{18}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{9-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9-\sqrt{3}} \cdot \frac{9+\sqrt{3}}{9+\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}+3}{78} = \frac{3\sqrt{3}+1}{26} \approx 0,238,$$

kde sme použili usmernenie zlomku na odstránenie odmocniny z menovateľa. Výsledný pomer je teda v exaktnom tvare $\frac{3\sqrt{3}+1}{26}$, čo je približne 0, 238.

Alternatívne konfigurácie

Zo zadania nie je jasne dané, kde presne sa má nachádzať bod Z. V riešení sme ho umiestnili na polpriamku TS', no mohli sme ho kľudne dať aj na polpriamku TK'. Avšak vďaka tomu, že trojuholník KMS je rovnostranný, máme v ňom symetriu okolo priamky TM, a teda bez ohľadu na to, na ktorú stranu priamky TM umiestnime bod Z, výsledok bude rovnaký.

Takisto by sme sa mohli zamýšľať nad polohou bodov P a Z. Ako si môžeme byť istí, že sa tieto body nachádzajú mimo trojuholníka KMS? V tejto úlohe je to celkom jednoduché odôvodniť a nestrhávali sme body za to, keď ste to do riešenia neuviedli, no je to niečo, na čo sa vo všeobecnosti oplatí dávať pozor, nakoľko pri komplikovanejších úlohách to môže značne ovplyvniť výsledok alebo počet možných riešení.

2.3 Kód Myslím Si ($\kappa \leq 3$)

Zadanie. *Ježibabke robil spoločnosť jej verný drak Bezzubý, ktorého chovala na pelendrekoch a cukrovej vate už celú večnosť. Obľuboval vcelku otravnú hru – myslieť na čísla. Aby mu zapchala ústa, rýchlo mu do nich strčila turecký med, ale už bolo neskoro.*

Bezzubý myslí na všetky celé kladné čísla N také, že súčet cifier čísla N je 12 a súčet cifier čísla $2N$ je 18. Na koľko čísel myslí Bezzubý?

Riešenie. opravuje **Lukáš** (lukas.gaborik@trojsten.sk)

Zamyslime sa na začiatok, čo sa deje s ciferným súčtom čísla, keď ho vynásobíme dvomi. Pokiaľ vynásobíme dvojkou cifry $0, 1, 2, 3, 4$, dostaneme postupne $0, 2, 4, 6, 8$. Pokiaľ ale vynásobíme $5, 6, 7, 8, 9$, z nich dostávame $10, 12, 14, 16, 18$. Pri násobení po cifrách však musíme do výsledku zapisovať cifry a poprípade nám môže nejaká desiatka „zvýšiť" ako jednotka do vyššieho rádu. Takže ak označíme $s(n)$ ciferný súčet čísla n, vyzerá to, že vo všeobecnosti by mohlo platiť zhruba niečo také, že $s(2n) = 2s(n)$, keby nám to nekazili prechody cez desiatku.

Mohli by sme mať nápad, že sa pozrieme na to, či pri násobení predošlej cifry vznikol prechod cez desiatku a ak áno, pripočítame to k výsledku tohto násobenia. S prechodmi cez desiatku je však taký problém, že sa môžu na seba „nabaľovať". Predstavme si, že by sme násobili $134 \cdot 3$. Ak chceme vedieť, aká cifra bude na mieste stoviek vo výsledku, tak by sme sa pozreli na $1 \cdot 3 = 3$ a zároveň by sme sa uistili, že pri predošlej cifre $3 \cdot 3 = 9 < 10$ nenastal prechod cez desiatku. Tým by sme dostali, že na mieste stoviek má číslo $134 \cdot 3$ cifru 3. Lenže $134 \cdot 3 = 402$ nemá na mieste stoviek cifru 3. Prečo je to tak? No pri násobení na mieste desiatok síce máme len $3 \cdot 3 = 9$, avšak z násobenia na mieste jednotiek $3 \cdot 4 = 12$ nám „zvýši" jednotka, takže výsledok už bude 10. To znamená, že hodnotu cifry na nejakom mieste vo výsledku pri násobení jednociferným číslom nám neovplyvňuje len cifra na rovnakom mieste v pôvodnom čísle a cifra nasledujúca, ale aj všetky ostatné za nimi.

A hoc by sme teraz mohli mať hlavu v smútku, pre násobenie dvomi je však svet krajší. Všimnime si, že „zvýšiť" nám môže nanajvýš jedna jednotka. Zároveň, keby sme nepočítali s prechodmi cez desiatku, cifry, ktoré vieme dostať vo výsledku, sú len 0, 2, 4, 6 a 8. Keď však ktorúkoľvek z nich zvýšime o 1, stále ostaneme pod desiatkou, čiže prechod sa nebude „nabaľovať". To znamená, že ak chceme **pri násobení dvomi** zistiť, aká cifra bude vo výsledku na nejakom mieste, stačí sa v pôvodnom čísle pozerať na cifru na rovnakom mieste a cifru za ňou nasledujúcu.

cifra v pôvodnom čísle na mieste 10^i	cifra v pôvodnom čísle na mieste 10^{i-1}	cifra vo výsledku na mieste 10^i
$0 \leq x \leq 4$ (nenastane prechod)	$0 \leq y \leq 4$ (nenastal prechod)	$2x$
$5 \leq x \leq 9$ (nastane prechod)	$0 \leq y \leq 4$ (nenastal prechod)	$2x - 10$
$0 \leq x \leq 4$ (nenastane prechod)	$5 \leq y \leq 9$ (nastal prechod)	$2x + 1$
$5 \leq x \leq 9$ (nastane prechod)	$5 \leq y \leq 9$ (nastal prechod)	$2x + 1 - 10$

V tabuľke vidíme, že vždy budeme mať vo výsledku namiesto cifry x hodnotu $2x$, len niekedy k nej musíme niečo pripočítať alebo od nej niečo odpočítať. Bolo by fajn zistiť, ako často také niečo budeme robiť.

Uvedomme si, že ak máme cifru menšiu alebo rovnú 4, nemusíme kvôli nej pripočítavať ani odpočítavať nič. Ak však máme cifru väčšiu alebo rovnú 5, na jej mieste sa nám od ciferného súčtu odpočíta desiatka a na mieste naľavo sa nám kvôli prechodu cez desiatku pripočíta jednotka. Preto za každú cifru väčšiu alebo rovnú 5 musíme odpočítať deviatku.

Vidíme, že to, o koľko sa nám $s(2n)$ vychýli od $2s(n)$, závisí iba od počtu „veľkých“ cifier v n. Poďme teda zistiť, aký má byť. Označme $p_{\geq 5}(n)$ počet cifier n, ktoré sú väčšie alebo rovné ako 5. Potom

$$s(2n) = 2s(n) - 9p_{\geq 5}(n).$$

Keďže pre N zadanie požaduje, aby $s(N) = 12$ a $s(2N) = 18$, tak musí platiť

$$\begin{aligned} s(2N) &= 2s(N) - 9p_{\geq 5}(N), \\ 18 &= 24 - 9p_{\geq 5}(N), \\ 9p_{\geq 5}(N) &= 6, \\ p_{\geq 5}(N) &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

To však ale nesedí, lebo počet cifier väčších alebo rovných 5 musí byť celé číslo, čo $\frac{2}{3}$ nie sú. Preto také N neexistuje.

Iné riešenie.

S ciferným súčtom narábajú niektoré pravidlá deliteľnosti. Napríklad číslo je deliteľné tromi práve vtedy, keď je tromi deliteľný aj jeho ciferný súčet. Podobné pravidlo platí aj pre deviatku. No a všimnime si, že ciferný súčet $2N$ má byť 18. Ten je deliteľný deviatimi, preto aj $9 \mid 2N$. Avšak, deviatka a dvojka nemajú spoločné delitele, preto aj N samotné musí byť deliteľné deviatimi. To by ale malo mať aj ciferný súčet deliteľný deviatimi, čo hodnota 12 nespĺňa. Tým sme dostali spor v podmienkach zo zadania, a teda také číslo N neexistuje.

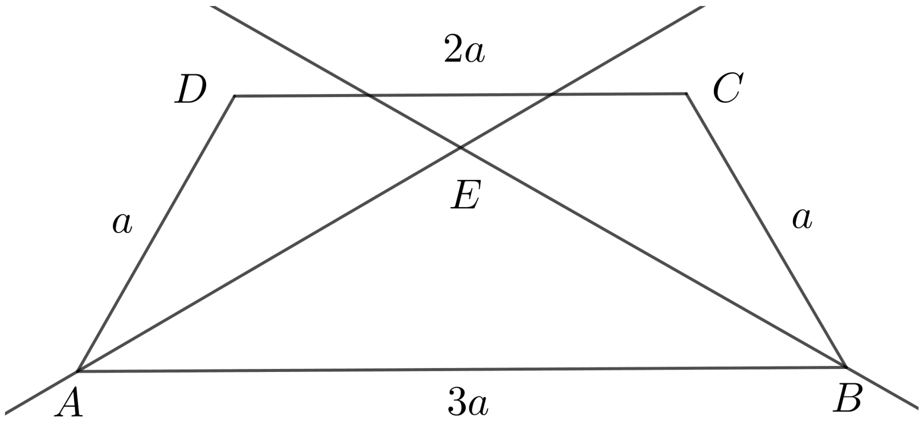
2.4 Konštrukcia Možno Spadne ($\kappa \leq 5$)

Zadanie. *Ježibabkino nové podkrovie malo lichobežníkový tvar, aby nad ním, v trojuholníkovom priestore hneď pod strechou, mohol bývať Bezzubý. Lenže Bezzubý bude svojou váhou ohýbať trámy a ona si do nich v noci zase tresne hlavu. Keď ježibabka načrtla prepadnuté trámy, spoza jej pleca vykukol drak a začal sa zaujímať o jej náčrt. Katastrofický scenár preto rýchlo premenila na geometrickú úlohu.*

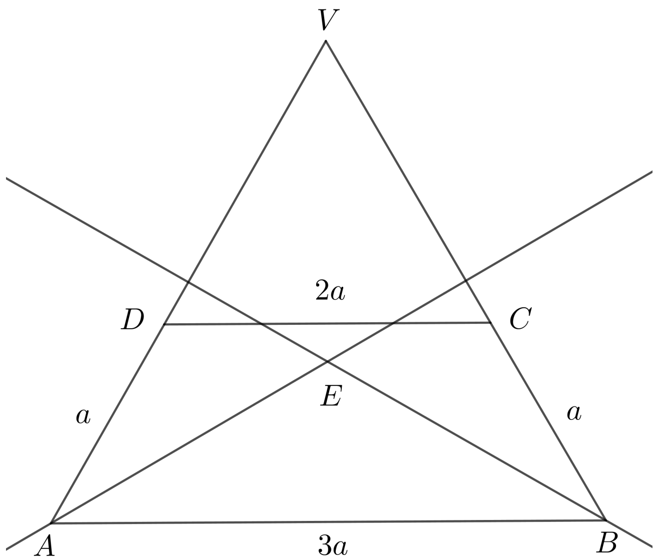
V lichobežníku $ABCD$ platí, že strany AB a CD sú rovnobežné, $|BC| = |AD|$, $|DC| = 2|AD|$ a $|AB| = 3|AD|$. Označme E priesečník osí uhlov DAB a CBA. Akú časť lichobežníka tvorí trojuholník ABE?

Riešenie. opravujú **Baška** (barbora.javorova@trojsten.sk) a **Radka** (radka.birova@p-mat.sk)

Ako prvé si nakreslime ako vyzeralo ježibabkino lichobežníkové podkrovie. Ďalej si označme $|AD| = a$ a následne podľa zadania doplňme $|BC| = a$, $|AB| = 3a$, $|DC| = 2a$.



Teraz sa skúsme pozrieť na trojuholníkový priestor hneď nad podkrovím, v ktorom býva Bezzubý. Dokreslime si teda náš lichobežník $ABCD$ na trojuholník ABV.



Môžeme si všimnúť, že trojuholníky ABV a DCV sú podobné, keďže AB a DC sú rovnobežné. Vieme. že $\frac{|DC|}{|AB|} = \frac{2}{3}$, teda potom musí platiť aj $\frac{|DV|}{|AV|} = \frac{2}{3}$, čo si môžeme upraviť ako

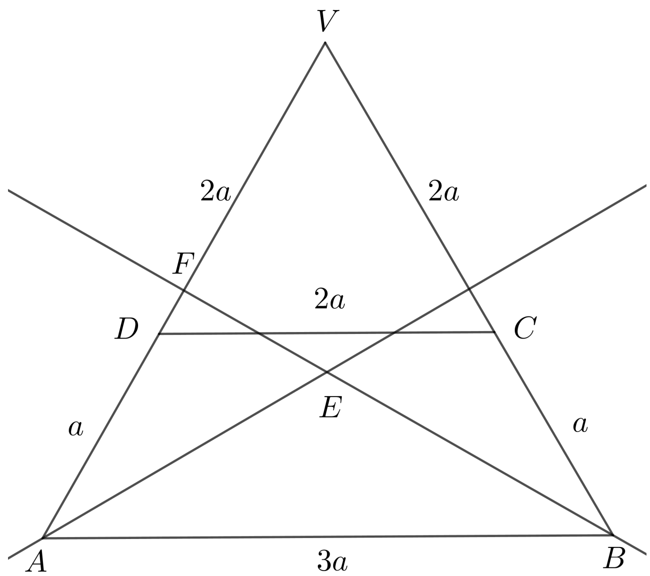
$$\frac{|DV|}{|AD| + |DV|} = \frac{2}{3},$$

$$3|DV| = 2(|AD| + |DV|),$$

$$3|DV| = 2|AD| + 2|DV|,$$

$$|DV| = 2|AD| = 2a.$$

Teda $|AV| = 3a$, rovnako aj $|BV| = 3a$, keďže trojuholník ABV je rovnoramenný s ramenami AV a BV. Keďže všetky strany trojuholníka ABV majú dĺžku $3a$, trojuholník ABV je rovnostranný. Označme priesečník strany AV s osou uhla ABV ako F a obsah trojuholníka ABV ako S_{ABV}.



Pre rovnostranný trojuholník platí, že jeho výšky, osi strán, osi uhlov a ťažnice sú totožné. Z toho vyplýva, že os uhla ABV je totožná s ťažnicou na stranu AV, teda delí trojuholník ABV na polovicu. Čo môžeme zapísať ako $S_{ABF} = \frac{1}{2}S_{ABV}$. Ďalej z toho vyplýva, že E je ťažisko trojuholníka ABV, teda delí úsečku FB v pomere $1:2$, teda aj obsahy trojuholníkov sú v pomere $1:2$, čo môžeme zapísať ako $\frac{S_{AEF}}{S_{ABE}} = \frac{1}{2}$ čo vieme upraviť ako

$$\frac{S_{ABE}}{S_{ABF}} = \frac{2}{3},$$

$$3S_{ABE} = 2S_{ABF},$$

$$3S_{ABE} = 2\frac{1}{2}S_{ABV},$$

$$3S_{ABE} = S_{ABV},$$

$$S_{ABE} = \frac{1}{3}S_{ABV}.$$

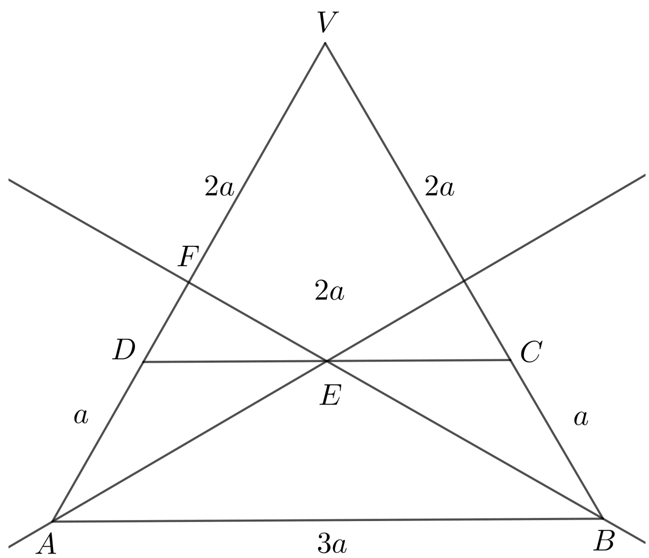
Teraz sa pozrime akú časť z trojuholníka ABV tvorí lichobežník $ABCD$. Trojuholníky ABV a DCV sú v pomere $3:2$, teda ich obsahy sú v pomere $9:4$, čo môžeme zapísať ako $\frac{S_{DCV}}{S_{ABV}} = \frac{4}{9}$, teda $\frac{S_{DABCD}}{S_{ABV}} = \frac{5}{9}$, čo môžeme zapísať ako $S_{DABCD} = \frac{5}{9}S_{ABV}$.

Nakoniec sa teda pozrime na pomer obsahov trojuholníka ABE a lichobežníka $ABCD$.

$$\frac{S_{ABE}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{3}S_{ABV}}{\frac{5}{9}S_{ABV}} = \frac{3}{5}.$$

Trojuholník ABE tvorí $\frac{3}{5}$ lichobežníka $ABCD$.

Dodajme ešte, že náčrty vyššie úplne nezodpovedali realite. Je to preto, že bod E v skutočnosti leží na úsečke CD. Aby sme sa však vyhli tomu, že tento nedokázaný fakt v riešení využijeme, nakreslili sme si obrázok, ktorý k tomu ani trochu nenavádza. A ak vás zaujíma, prečo E leží na CD, skúste si to dokázať. Ak neviete, ako, zamyslite sa, v akom pomere rozdeľuje ťažisko ťažnice.



2.5 Kto Ma Straší? ($\kappa \leq 8$)

Zadanie. *Ježibabka práve pchala marshmallows do vankúšov, keď jej v schránke obalenej jedlým zlatom zašuchotala pošta. Žeby niekto prijal jej pozvánku na kolaudačku? Nie, to bude asi nejaký výhražný list či čo.*

V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$\frac{x}{x+4} = \frac{5\lfloor x \rfloor - 7}{7\lfloor x \rfloor - 5},$$

kde $\lfloor x \rfloor$ označuje dolnú celú časť reálneho čísla x (teda najväčšie celé číslo menšie alebo rovné x).

Riešenie. opravujú **Mimi** (matej.hanus@trojsten.sk) a **Kopy** (martin.kopcany@trojsten.sk)

Najprv zo skúmania vylúčme možnosť, že $x = -4$, to by bola v menovateli na ľavej strane nula. Keďže dolná celá časť je celé číslo, menovateľ vpravo $7\lfloor x \rfloor - 5$ je nenulové číslo.

Následne si upravme rovnosť do krajšieho tvaru:

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{x+4} &= \frac{5\lfloor x\rfloor - 7}{7\lfloor x\rfloor - 5},\\
x(7\lfloor x\rfloor - 5) &= (x+4)(5\rfloor x\lfloor -7),\\
7x\lfloor x\rfloor - 5x &= 5x\lfloor x\rfloor + 20\lfloor x\rfloor - 7x - 28,\\
2x\lfloor x\rfloor + 2x &= 20\lfloor x\rfloor - 28,\\
x\lfloor x\rfloor + x &= 10\lfloor x\rfloor - 14,\\
x\lfloor x\rfloor + x - 10\lfloor x\rfloor - 10 &= -14 - 10,\\
x(\lfloor x\rfloor + 1) - 10(\lfloor x\rfloor + 1) &= -24,\\
(x-10)(\lfloor x\rfloor + 1) &= -24,\\
(10-x)(\lfloor x\rfloor + 1) &= 24.
\end{aligned}
$$

Ľavá zátvorka je kladná, ak $x < 10$, inak je záporná alebo 0. Pravá zátvorka je kladná, ak $x \geq 0$, inak je buď záporná, alebo 0. Obe zátvorky naraz nemôžu byť záporné, a preto obe musia byť kladné, lebo pravá strana rovnice je kladná. Tým pádom existuje len 10 možností, čomu sa rovná číslo $\lfloor x\rfloor$. Upravme si rovnicu tak, aby sme vedeli priamo z nejakej $\lfloor x\rfloor$ vypočítať x:

$$
\begin{aligned}
(10-x)(\lfloor x\rfloor + 1) &= 24,\\
10 - x &= \frac{24}{\lfloor x\rfloor + 1},\\
-x &= \frac{24}{\lfloor x\rfloor + 1} - 10,\\
x &= 10 - \frac{24}{\lfloor x\rfloor + 1}.
\end{aligned}
$$

Dosaďme teda hodnoty od 0 do 9 a zistime, ktoré z nich vyhovujú tomu, že $\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor + 1$:

$\lfloor x \rfloor$	x po dosadení	x	Vyhovuje?
0	$10 - 24/1$	-14	×
1	$10 - 24/2$	-2	×
2	$10 - 24/3$	2	✓
3	$10 - 24/4$	4	×
4	$10 - 24/5$	26/5	×
5	$10 - 24/6$	6	×
6	$10 - 24/7$	46/7	✓
7	$10 - 24/8$	7	✓
8	$10 - 24/9$	66/9	×
9	$10 - 24/10$	7.6	×

Naša rovnica má teda práve tri riešenia 2, 7 a 46/7.

Iné riešenie.

Vyjadríme x z $\lfloor x \rfloor$ ako v predchádzajúcom riešení.

$$x = 10 - \frac{24}{\lfloor x \rfloor + 1}.$$

Môžeme pokračovať ďalej, aj ak sme nespravili úvahu o znamienku, teda máme iba toto vyjadrenie (a vieme, že $\lfloor x \rfloor + 1 \neq 0$). Priamo toto x môžeme dosadiť do $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Potom upravíme sústavu (dvoch) nerovníc tak, aby v nej vystupovali polynómy v $\lfloor x \rfloor$. Po ceste si treba uvedomiť, že bez znalosti znamienka $\lfloor x \rfloor + 1$ nemôžeme násobiť nerovnice touto hodnotou, ale jej druhou mocninou áno.

$$\lfloor x \rfloor \leq 10 - \frac{24}{\lfloor x \rfloor + 1} < \lfloor x \rfloor + 1,$$

$$\lfloor x \rfloor(\lfloor x \rfloor + 1)^2 \leq 10(\lfloor x \rfloor + 1)^2 - 24(\lfloor x \rfloor + 1) < (\lfloor x \rfloor + 1)^3,$$

$$(\lfloor x \rfloor + 1)(\lfloor x \rfloor^2 + \lfloor x \rfloor) \leq (\lfloor x \rfloor + 1)(10\lfloor x \rfloor - 14) < (\lfloor x \rfloor + 1)(\lfloor x \rfloor^2 + 2\lfloor x \rfloor + 1),$$

$$(\lfloor x \rfloor + 1)(\lfloor x \rfloor^2 - 9\lfloor x \rfloor + 14) \leq 0 < (\lfloor x \rfloor + 1)(\lfloor x \rfloor^2 - 8\lfloor x \rfloor + 15),$$

$$(\lfloor x \rfloor + 1)(\lfloor x \rfloor - 2)(\lfloor x \rfloor - 7) \leq 0 < (\lfloor x \rfloor + 1)(\lfloor x \rfloor - 3)(\lfloor x \rfloor - 5).$$

Prvá nerovnica má v $\lfloor x \rfloor$ riešenie $(-\infty, -1\rangle \cup \langle 2, 7\rangle$, druhá $(-1, 3) \cup (5, \infty)$. Prienik týchto riešení je $\langle 2, 3) \cup (5, 7\rangle$, a teda $\lfloor x \rfloor$ môže nadobúdať všetky celočíselné hodnoty z týchto intervalov, čo sú 2, 6 a 7. Dosadíme do vyjadrenia pre x a dostaneme riešenia pôvodnej rovnice 2, 46/7 a 7.

2.6 Koho Máta Spln?

Zadanie. *Pre nepresné náčrty a chybné výpočty stavebné práce postupovali pomaly. To však ešte ježibabka nevedela, že sa na nich z tieňov vyškiera ďalšia katastrofa. Prišiel si na nich posvietiť Mesiac – nastal totiž spln. Na rozdiel od kandizovanej starenky býval Bezzubý kvalitne námesačný, sedával v pelechu a mátožným hlasom recitoval matematické úlohy:*

Nájdite všetky celé čísla x, y, z spĺňajúce sústavu rovníc

$$x + y = 1 - z,$$

$$x^3 + y^3 = 1 - z^2.$$

Riešenie. opravujú **Džavo** (adam.dzavoronok@trojsten.sk) a **Mati** (matus.zelko@trojsten.sk)

Pracovať s výrazmi tvaru $x^3 + y^3$ alebo $1 - z^2$ je často náročné. Pomôcť nám vedia rozklady na súčin jednoduchších výrazov. V našom prípade to je

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 1 - z^2 = (1 - z)(1 + z).$$

Keď sa na tieto rozklady zapozeráme, môžeme si všimnúť, že môžeme vykrátiť $(x+y)$ z ľavej strany rovnice a $(1-z)$ z pravej strany, lebo podľa zadania platí, že $(x+y) = (1-z)$. Predtým, než sa do toho pustíme, musíme sa zamyslieť, či výraz, ktorým chceme podeliť, nemôže byť nulový. To nastane vtedy, keď $z = 1$ a $y = -x$. Môžeme si povšimnúť, že ak $x = -y = k$, kde k je ľubovoľné celé číslo tak trojica $(x, y, z) = (k, -k, 1)$ vyhovuje našej sústave. Ďalej predpokladajme, že $(x + y)$ a $(1 - z)$ sú nenulové, a teda ich môžeme z druhej rovnice vykrátiť. Premennú z si ešte vieme vyjadriť z prvej rovnice ako $z = 1 - x - y$, čím po jednoduchých úpravách dostávame

$$x^2 - xy + y^2 = 1 + z = 2 + x + y$$

$$x^2 - xy + y^2 + x + y = 2.$$

Výrazy xy, či x alebo y sa môžu s x^2 alebo y^2 vyskytovať v kompaktnejšom tvare ako napríklad $(x - y)^2$, či $(x + 1)^2$. Tak poďme si ich tam vyrobiť pomocou trikovej úpravy pozostávajúcej z vynásobenia našej rovnice 2 a pričítaním dvojky. Dostaneme, že

$$2x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 2y + 2 = (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) = (x - y)^2 + (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 6.$$

Mať túto rovnicu v takomto tvare – súčte druhých mocnín je pre nás výhodné. Druhé mocniny sú nezáporné a keďže riešime túto úlohu v obore celých čísel, tak jednotlivé zátvorky môžu nadobúdať iba zopár hodnôt. Vyplýva to z toho, že jednotlivé členy sú menšie alebo rovné šestke na pravej strane. Zapísať šestku ako súčet troch celočíselných druhých mocnín sa dá práve jediným spôsobom, a to $6 = 4+1+1$. Následne nám už len stačí rozobrať jednotlivé prípady, kedy sa ktorý člen rovná 4. Vzhľadom na symetriu x a y môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $x \geq y$. Hodnotu z následne spätne dopočítame z rovnosti $z = 1 - x - y$.

1. $(x-y)^2 = 4$. Následne $(x+1)^2 = 1$ aj $(y+1)^2 = 1$, z čoho dostávame, že x, y môžu byť buď -2 alebo 0. Keďže predpokladáme, že $x \geq y$ tak dostávame jediné riešenie $(x, y, z) = (0, -2, 3)$.
2. $(x + 1)^2 = 4$, čiže x môže byť -3 alebo 1. Ďalej z $(y + 1)^2 = 1$ y môže byť -2 alebo 0 a z $x \geq y$ a $(x - y)^2 = 1$ dostávame jediné riešenie $(x, y, z) = (1, 0, 0)$.
3. $(y + 1)^2 = 4$. Analogicky y môže byť -3 alebo 1 a zároveň z $(x + 1)^2 = 1$ premenná x môže byť -2 alebo 0 a z $x \geq y$ a $(x - y)^2 = 1$ dostávame jediné riešenie $(x, y, z) = (-2, -3, 6)$

Aby sme to zhrnuli, všetky vyhovujúce trojice (x, y, z) sú $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(-3, -2, 6)$, $(-2, -3, 6)$, $(0, -2, 3)$, $(-2, 0, 3)$ a ešte $(k, -k, 1)$ kde k je ľubovoľné celé číslo.

2.7 Kompletizujeme Múčne Sudoku

Zadanie. *Ďalší večer si ježibabka s Bezzubým vytiahli dosku na pečenie, ktorá mala z druhej strany štvorčekovú sieť. Keď ježibabu omrzelo valkanie cesta či vykrajovanie, hrali na nej rôzne hry. Dnes sa rozhodli pre sudoku pre dvoch.*

Ježibabka a Bezzubý hrajú hru na tabuľke $n \times n$, ktorá je na začiatku prázdna. V každom ťahu môže hráč na voľné políčko tabuľky napísať jedno celé číslo od 1 do n, ak v danom riadku ani stĺpci ešte toto číslo nie je (ako v sudoku). Hráč, ktorý nemôže vykonať ťah, prehráva. V závislosti od čísla n určte, ktorý hráč má víťaznú stratégiu.

Riešenie. opravuje **Michal S.** (michal.stanik@trojsten.sk)

Pri hľadaní víťazných stratégií v hrách, ktoré sú podobné tejto, sa obvykle hodí nájsť stratégiu pre jedného hráča takú, že má odpoveď na ľubovoľný ťah súpera. Teda to, čo káže stratégia hráčovi urobiť, záleží práve na poslednom ťahu súpera. Keď hráč bude mať odpoveď na ľubovoľný ťah, nemôže sa mu stať, že prehrá (pretože táto odpoveď je ťah, ktorý vie vykonať). Táto stratégia obvykle urobí ťah, ktorý je nejakým spôsobom symetrický voči ťahu súpera, je nejakým jeho odzrkadlením.

Pri tabuľke $n \times n$ sa ponúka hrať na políčko, ktoré je stredovo súmerné s políčkom, na ktoré hral súper. Toto má tú peknú vlastnosť, že ak je políčko A zviazané s políčkom B, tak aj políčko B je zviazané s políčkom A.

Ak je n nepárne, tak existuje stredné políčko, ktoré je súmerné samé so sebou, pri párnom n žiadne také políčko neexistuje. Rozlíšime teda prípady podľa parity n.

Párny rozmer tabuľky

Stratégia pre párne n je pomerne jednoduchá. Hráč zahrá také isté číslo ako hráč pred ním, ale na stredovo súmerné políčko. Bude to teda víťazná stratégia pre druhého (nezačínajúceho) hráča. Potrebujeme však ukázať, že takýto ťah je vždy platný (podľa pravidiel).

Pred ťahom prvého hráča je tabuľka vždy stredovo súmerná, čo sa voľných políčok aj čísel týka. Na začiatku pri prázdnej tabuľke to platí, potom vždy prvý hráč zaplní nejaké políčko, ktorého stredovo súmerné políčko nie je zaplnené (ak by bolo, bolo by aj vybrané políčko už plné). Druhý hráč následne zaplní s ním stredovo súmerné políčko (ktoré je jednoznačne určené) rovnakým číslom a tabuľka je opäť stredovo súmerná.

Toto číslo určite môže byť druhým hráčom umiestnené, pretože ak by sa už v danom riadku alebo stĺpci vyskytovalo, zo symetrie tabuľky sa muselo vyskytovať aj v stredovo súmernom riadku, resp. stĺpci, a teda by bránilo prvému hráčovi zapísať ho.

Pritom druhý hráč nemôže byť zablokovaný práve vykonaným ťahom prvého, pretože pri párnom n je vždy stredovo súmerný riadok aj stĺpec iný než pôvodný, a teda tento ťah ho nemal ako ovplyvniť.

Nepárny rozmer tabuľky

Nech $n = 2k - 1$ pre prirodzené číslo k. V tomto prípade ukážeme, že vyhrá prvý hráč. V prvom ťahu zahrá číslo k na prostredné políčko (nemajúce stredovo súmernú dvojicu). V každom ďalšom ťahu odzrkadlí zapísanie čísla i druhým hráčom tak, že zapíše číslo $2k - i$ na stredovo súmerné políčko.

Pred ťahom druhého hráča platí, že na každej dvojici stredovo súmerných políčok sú buď čísla so súčtom $2k = n+1$, alebo sú obe prázdne (platí to aj pre stredové políčko, pretože $k + k = 2k$). Pred jeho prvým ťahom to naozaj platí.

Potom vždy druhý hráč zapíše číslo i na nejaké políčko, ktorého stredovo súmerná dvojica je voľná a prvý hráč ju doplní číslom $2k - i$, čím uvedená vlastnosť platí opäť (podobne ako pri párnom rozmere).

Ak by prvý hráč nemohol umiestniť číslo $2k - i$, znamenalo by to, že už číslo $2k - i$ v danom riadku, resp. stĺpci je. To by znamenalo, že v stredovo súmernom riadku, resp. stĺpci už je (na s ním súmernom políčku) číslo i, a teda ani druhý hráč nemohol zahrať i na zvolené políčko. Jediná možnosť, kedy by táto argumentácia neplatila, je, ak prvého hráča blokuje práve vykonaný ťah druhého hráča. Na to by sa ale museli čísla i a $2k - i$ rovnať (aby sa blokovali) a po aplikovaní stredovej súmernosti by muselo ísť stále o ten istý riadok/stĺpec, čiže by muselo ísť o číslo $i = k$ v prostrednom riadku alebo stĺpci. To sme tam už ale doplnili v špeciálnom prvom ťahu, takže ho nemohol práve zahrať druhý hráč. Prvý hráč tak naozaj môže urobiť svoj súmerný ťah.

Pre párne n má teda víťaznú stratégiu druhý hráč – Bezzubý a pre nepárne n prvý hráč – ježibabka.

2.8 Kradnete Mi Súkromie!

Zadanie. *Ježibabku dráždilo, že si turisti chodia obzerať, fotografovať a hlavne objedať jej skromnú chalúpku, preto sa rozhodla použiť zvyšné XXL pelendreky a označiť nimi hranice svojho pozemku. Samozrejme, keďže les prakticky nikomu nepatril, chcela si ohradiť čo najväčšiu plochu.*

Ježibabka postavila plot do tvaru lichobežníka s dĺžkami strán 3, 3, 3, k, *kde* k *je reálne číslo. Aký najväčší obsah môže jej pozemok mať?*

Riešenie. opravujú **Šošo** (jakub.sosovicka@trojsten.sk) a **Štepi** (martin.stepanek@trojsten.sk)

Najskôr sa zamyslíme, ktorá zo strán bude mať dĺžku k a ktoré strany budú mať dĺžku 3. Stačí overiť 2 prípady:

1. Pokiaľ by obe rovnobežné strany mali dĺžku 3, tak lichobežník už nutne musí byť zároveň rovnobežník (dokonca kosoštvorec, keďže má 3 rovnako dlhé strany). Jeho výška má veľkosť najviac 3, teda najväčší možný obsah je $3 \cdot 3 = 9$ (tento prípad nastáva, keď je štvoruholník štvorcom).

2. Zostal nám ešte druhý prípad, kedy je strana s dĺžkou k jednou zo základní lichobežníka. Obe ramená majú veľkosť 3, teda lichobežník je rovnoramenný. Potrebujeme si najskôr zrátať výšku lichobežníka. Tú vieme dostať z Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku, ktorého prepona je rameno lichobežníka a výška je jeho odvesna: $v^2 = 3^2 - \left(\frac{k-3}{2}\right)^2$ (platí aj ak $k < 3$). Potrebujeme maximalizovať obsah lichobežníka, teda výraz

$$S = \frac{(k+3) \cdot v}{2}.$$

Keďže je obsah nezáporný, môžeme maximalizovať $4S^2$ (robíme to, aby sme vo výraze nemali odmocniny po dosadení za v a aby sme sa zbavili menovateľa). Dosadíme za výšku a maximalizujeme výraz

$$4S^2 = (k+3)^2 \left(9 - \left(\frac{k-3}{2}\right)^2\right).$$

Nech $x = k + 3$. Výraz sa upraví na

$$\begin{aligned} 4S^2 &= 9x^2 - \frac{x^2(x-6)^2}{4}, \\ 16S^2 &= x^2(36 - (x-6)^2), \\ 16S^2 &= 12x^3 - x^4. \end{aligned}$$

Po úpravách sme dostali celkom pekný výraz, ktorý potrebujeme maximalizovať. Čo s tým ďalej? Úplne najjednoduchšie je výraz zderivovať a položiť rovný 0, čím nájdeme všetky lokálne extrémy, overíme ich a jeden z nich bude našim hľadaným x. Môžme ale zvoliť aj viac stredoškolskú cestu. Pokiaľ vieme, pre ktorú hodnotu bude výraz maximálny (tipnúť si tú hodnotu vieme bez dôkazu napríklad pomocou nejakého programu alebo nakreslením funkcie), môžeme to využiť. Tipneme si, že maximum nadobúda výraz pre $x = 9$ a výraz je vtedy rovný 3^7. Stačí teda ukázať, že polynóm $x^4 - 12x^3 + 3^7$ je vždy nezáporný. Vieme, že $x = 9$ je koreň polynómu. Rozložíme ďalej polynóm na

$$x^4 - 12x^3 + 3^7 = (x-9)^2(x^2 + 6x + 27).$$

Vidíme, že pravá zátvorka je vždy kladná ($(x-3)^2 + 18$), teda aj celý výraz bude nezáporný a nulový bude práve pre $x = 9$. Preto výraz $16S^2 = 12x^3 - x^4$ nadobúda maximum pre $x = 9$ a to isté musí preto spĺňať aj výraz S. Preto maximálny je obsah pri $x = 9$, teda $k = 6$. Potom už ľahko dopočítame, že obsah bude rovný $\frac{27\sqrt{3}}{4}$.

2.9 Kolaudačka, Miestami Sranda

Zadanie. *Párty bola v plnom prúde, malinovky a detský punč tiekli potokom, keď Bezzubý vyrukoval s perfektným nápadom – noc je mladá a všetci okrem ježibabky tiež, prečo sa nezabaviť nejakou skvelou matematickou úlohou? Dedinčania opití levanduľovým sirupom sa ani nenazdali a už im cukrovou polevou písal zadanie na stenu.*

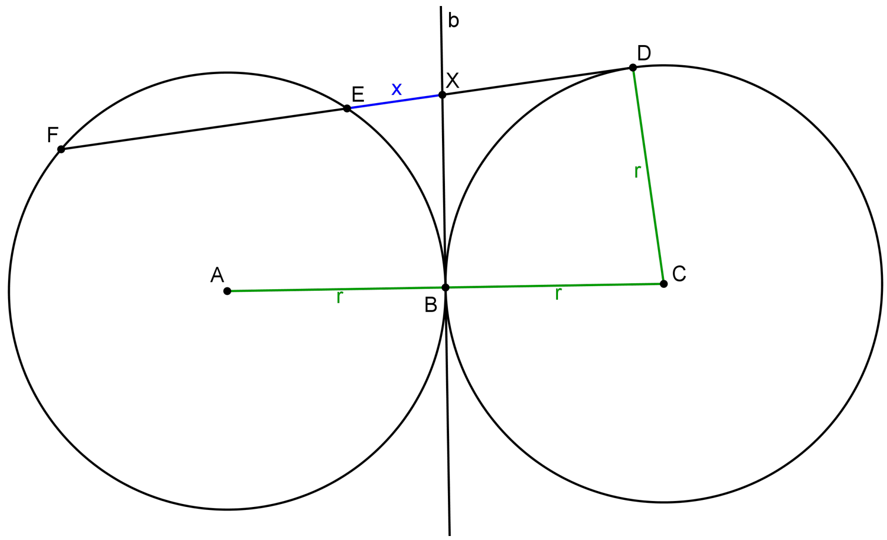
Dve kružnice k, l s danými stredmi A, C a rovnakým polomerom r sa zvonku dotýkajú v bode B. Nájdite všetky body $D \in l$ také, že dotyčnica l v bode D pretína k v bodoch E, F a platí $|DE| = |EF|$.

Riešenie. opravuje **Mišo M.** (michal.molnar@trojsten.sk)

Najprv spomeňme prípad, kedy $D = B$. Vtedy je daná dotyčnica spoločná pre obe kružnice, a tak $E = F = B$, kedy platí $|EF| = 0 = |DE|$. Ďalej sa už budeme zaoberať iba prípadom, kedy $D \neq B$.

Začnime s analýzou výslednej situácie. Z tej sa dozvieme, čo od bodov očakávame, a teda aj ako ich nájdeme/zostrojíme.

Ako prvé označme b spoločnú dotyčnicu k, l prechádzajúcu bodom B a označme X jej priesečník s priamkou DE. Ak sa nám podarí nájsť bod X, ľahko z neho zostrojíme dotyčnicu k l, aby sme našli D.



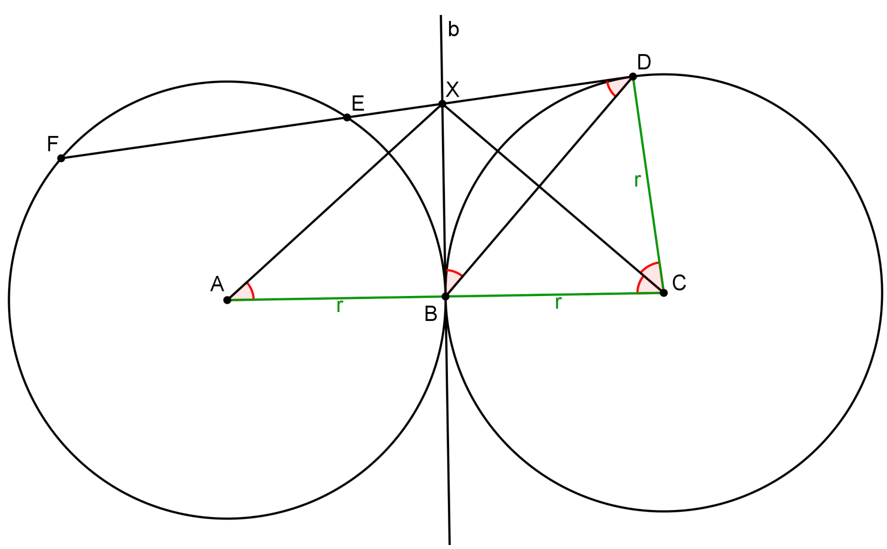
Skúsme teda zistiť niečo viac o bode X. Vieme, že XB aj XD sú dotyčnice ku kružnici l, takže úsečky XB a XD sú rovnako dlhé. Keď označíme $|DE| = |EF| = d$ a $|EX| = x$, dostaneme $|XB| = |XD| = d - x$. Teraz sa zameriame na kružnicu k a využijeme mocnosť bodu X. Bod B je bod dotyku a E, F sú priesečníky k s priamkou XD. Platí teda $|XB|^2 = |XE| \cdot |XF|$. Vyjadrenie pomocou x a d dáva rovnicu

$$(d - x)^2 = x \cdot (d + x),$$

$$d^2 - 2dx + x^2 = dx + x^2,$$

odkiaľ ľahko dopočítame $d = 3x$. (Alebo $d = 0$, čo by opäť viedlo na prípad $D = B$.)

Vidíme, že X sa nachádza v tretine úsečky ED, no to nám nepomáha, keďže ani body E a D na začiatku nepoznáme. Priamku b zostrojiť vieme, no potrebovali by sme skôr vzdialenosť od niektorého z bodov A, B, C. Tu sa nám zíde pozorovanie, že trojuholník ACX je rovnoramenný so základňou AC. Priamka b je ako dotyčnica kolmá na AB aj BC. Navyše $|AB| = |BC| = r$ podľa zadania, takže bod X leží na osi AC.



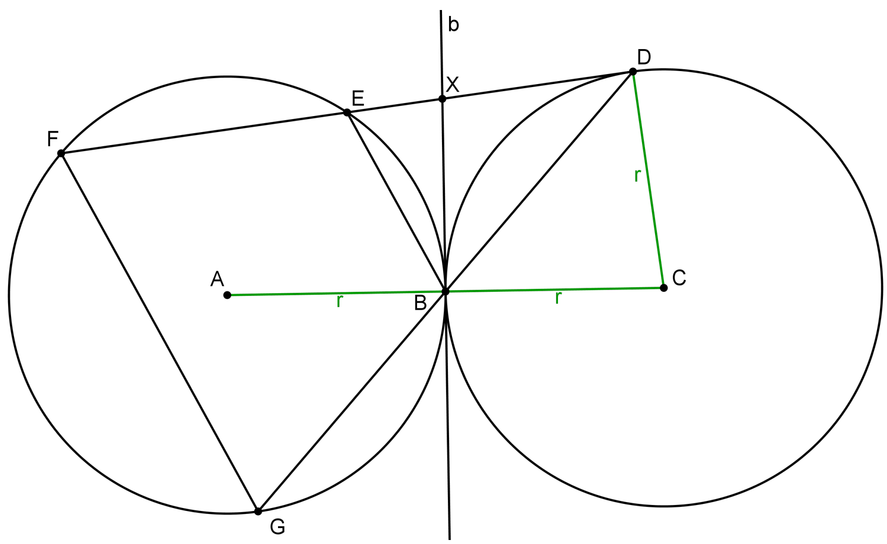
Označme $\alpha = |\sphericalangle ACX| = |\sphericalangle CAX|$. Keďže $|XB| = |XD| = 2x$, $|CB| = |CD| = r$ a úsečka CX je spoločná pre trojuholníky BCX a DCX, sú tieto trojuholníky zhodné. Takže platí $|\sphericalangle DCX| = \alpha$. Navyše sú spomínané trojuholníky pravouhlé, s pravým uhlom pri vrchole B, resp. D. Vďaka Tálesovej vete vieme, že body B, C, D, X ležia na kružnici. Veta o obvodových uhloch nám dáva

$$|\sphericalangle XDB| = |\sphericalangle XCB| = \alpha = |\sphericalangle XCD| = |\sphericalangle XBD|.$$

Trojuholník BDX je teda rovnoramenný so základňou DB. Pri základni má navyše uhol α, rovnako ako trojuholník ACX. Tieto trojuhoníky sú teda podobné podľa vety uu.

Vieme, že $|AC| = 2r$, $|XB| = |XD| = 2x$. My z týchto dĺžok poznáme len polomer kružníc r, chceli by sme však dostať x, alebo aspoň $|AX|$. Potom by sme vedeli zostrojiť bod X a následne by sme našli aj D. Potrebujeme teda zistiť niečo viac o pomeroch strán v týchto podobných trojuholníkoch.

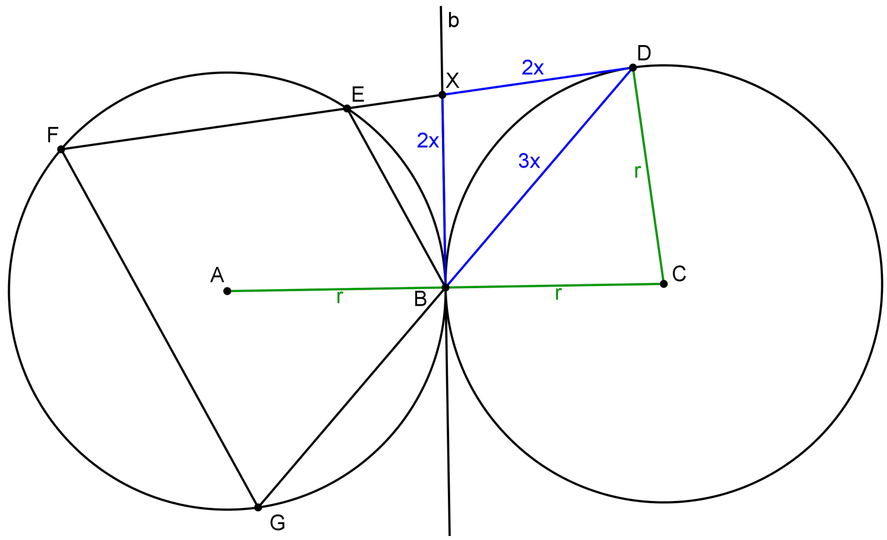
Využime teraz fakt, že B je stredom súmernosti kružníc k a l. Ak A, stred kružnice k, zobrazíme v tejto stredovej súmernosti, dostaneme bod C. Na zobrazenie celej kružnice k nám stačí zo stredu C spraviť kružnicu s rovnakým polomerom. To je práve kružnica l. Vo všeobecnosti, ak máme dve dotýkajúce sa kružnice, ich bod dotyku bude stredom rovnoľahlosti týchto dvoch kružníc. Tento fakt sa Vám môže zísť aj v iných úlohách. Keďže k a l sú zhodné, miesto rovnoľahlosti dostaneme stredovú súmernosť.



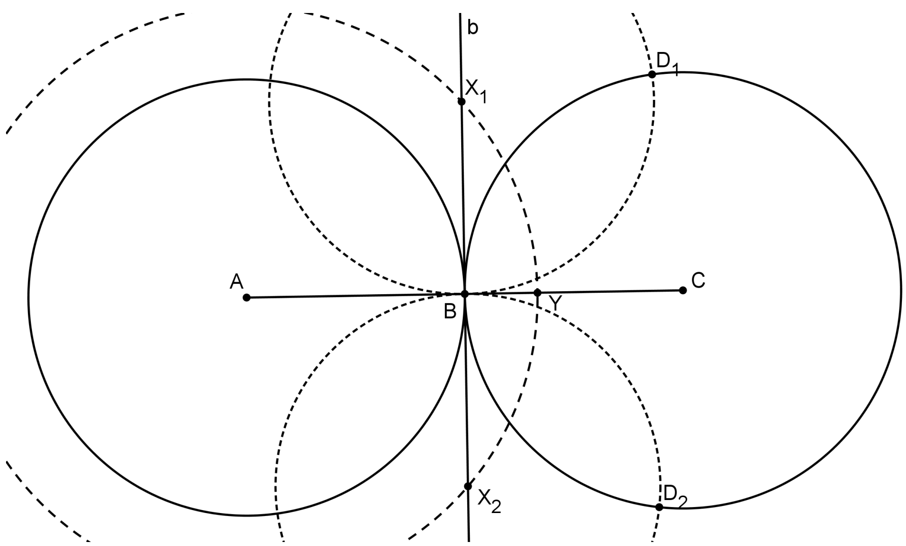
Predĺžme teraz úsečku BD na priamku a označme G jej druhý priesečník s k. Vďaka stredovej súmernosti platí $|BG| = |BD|$. V trojuholníku FGD je tak úsečka EB strednou priečkou. Takže je rovnobežná so základňou FG. Štvoruholník $FGBE$ je teda tetivový lichobežník a taký lichobežník musí byť rovnoramenný. (Vieme využiť napríklad fakt, že protiľahlé uhly v tetivovom štvoruholníku majú súčet 180°.)

Zisťujeme teda, že $|BG| = |EF| = 3x$. To znamená, že aj $|BD| = 3x$. V trojuholníku BDX je teda pomer ramena ku základni $2x : 3x = 2 : 3$ a ten musí byť rovnaký ako v trojuholníku ACX. Platí teda

$$|AX| = \frac{2}{3}|AC| = \frac{2}{3} \cdot 2r = \frac{4}{3}r.$$



Teraz už vieme nájsť bod X, a teda aj D. Najprv zostrojíme priamku b – os úsečky AC. Následne úsečku BC s dĺžkou r rozdelíme na tretiny[1], čím dostaneme nejaký bod Y, pre ktorý $|AY| = \frac{4}{3}r$. Kružnica so stredom v bode A a polomerom AY pretne b v dvoch bodoch, čo sú dve možnosti pre bod X – X_1 a X_2. Keďže $|XB| = |XD|$, stačí nám spraviť kružnice so stredmi v X_1, X_2 a polomermi X_1B, X_2B a dostaneme dve možné pozície bodu D.



2.10 Kiežby Mali Súcit

Zadanie. *Jedlý plot z XXL pelendrekov akosi nedokázal udržať ten nápor cukruchtivých banditov, preto prišla zúfalá ježibabka s nápadom dvier na kód a systémom bezpečnostných kamier, ktoré by zaznamenali votrelca a ostreľovali ho tureckým želé. Celé veky sa nikto do domčeka nedostal, až kým si dvaja súrodenci bez omrvinky súcitu so staršou paňou netipli odpoveď správne. A pritom si dal Bezzubý tak záležať.*

[1] Toto je známy postup, ale pre istotu: Narysujeme si priamku cez bod B rôznu od BC a na ňu nanesieme trikrát rovnakú dĺžku. Dostaneme body B_1, B_2, B_3. Rovnobežka s B_3C prechádzajúca cez B_1 pretne BC v tretine.

Definujme nekonečnú postupnosť čísel $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takú, že $a_1 = 2$ a $a_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot a_n$. Dokážte, že pre nekonečne veľa hodnôt n je výraz

$$\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{n+1}$$

štvorcom celého čísla.

Riešenie. opravuje **Pedro** (peter.sukenik@trojsten.sk)

Prvý krok riešenia tejto úlohy je celkom zrejmý a jednoduchý – potrebujeme vyjadriť, čomu sa vlastne súčin $a_1a_2\cdots a_n$ rovná. Začneme vypočítaním hodnoty a_n:

$$a_n = \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}a_{n-1} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}\frac{(n-1)^{n-2}}{(n-2)^{n-2}}a_{n-2} = \cdots = \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}\frac{(n-1)^{n-2}}{(n-2)^{n-2}}\cdots\frac{3^2}{2^2}\frac{2}{1}2.$$

Všimnime si, že v dvoch susedných zlomkoch sa menovateľ prvého zlomku rovná čitateľu druhého, až na to, že menovateľ má o jeden vyššiu mocninu. Teda sa nám toho veľa vyškrtá a nie je ťažké vidieť, že $a_n = \frac{2n^{n-1}}{(n-1)!}$. Teraz už vieme jednoducho vypočítať spomínaný súčin.

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \frac{2^n n^{n-1}(n-1)^{n-2}\cdots 2^1}{(n-1)!(n-2)!\cdots 1!}.$$

Opäť si vieme všimnúť, ako sa nám isté časti tohto výrazu poškrtajú. V menovateli sa číslo $n-i$ nachádza v i faktoriáloch. V čitateli je číslo $n-i$ umocnené na $(n-1-i)$-tu mocninu. Preto dokopy bude číslo $n-i$ umocnené na $(n-1-2i)$-tu mocninu a dostávame

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = 2^n n^{n-1}(n-1)^{n-3}(n-2)^{n-5}\cdots 3^{5-n}2^{3-n}1^{1-n}.$$

Človek by si pri pohľade na tento výraz mohol povedať, že pravdepodobne nebude rovný celému číslu, lebo isto bude existovať nejaké prvočíslo p, ktoré v tomto výraze bude mať zápornú mocninu. Ukážeme si však, že to nie je pravda a že všetky prvočísla, ktoré sa vyskytujú v tomto výraze majú nezápornú mocninu. Najprv si dokážeme pomocné tvrdenie, ktoré nám pomôže s argumentáciou pre prvočísla. Súvisiace tvrdenie si sformulujeme ako samostatnú lemmu.

Lemma: Pre ľubovoľné prirodzené k je súčet mocnín prislúchajúcich násobkom k vo výraze $V := n^{n-1}(n-1)^{n-3}(n-2)^{n-5}\cdots 3^{5-n}2^{3-n}1^{1-n}$ nezáporný.

Dôkaz: Označme $m = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$. Chceme ukázať, že $\sum_{i=1}^{m}[2ik-(n+1)]$, čo je presne rovná súčtu mocnín prislúchajúcich násobkom k vo výraze V, je nezáporná. Toto sa dá využitím vzorca na súčet prvých m prirodzených čísel ľahko prepísať ako $m(m+1)k - m(n+1) \geq 0$. Po vydelení m a prehádzaní dostávame ekvivalentné $mk \geq n-k+1$, čo platí priamo z definície dolnej celej časti. Týmto je dôkaz lemmy hotový a môžeme pokračovať so zvyškom dôkazu.

S touto lemmou je už dôkaz pre všeobecné prvočíslo jednoduchý. Uvažujme najprv $k = p$. Potom súčet všetkých *prvých* mocnín prvočísla p vrámci nášho výrazu je nezáporný. Ak teraz vylúčime *prvé* mocniny p, môžeme teraz položiť $k = p^2$ a dostaneme, že súčet všetkých *druhých* mocnín prvočísla p, ktoré ešte nie sú zarátané medzi prvými mocninami, je tiež nezáporný. Takto pokračujeme, až kým príslušná mocnina p neprekročí n. Sčítaním prvých, druhých a vyšších mocnín p dostaneme, že jeho celková mocnina v našom výraze je nezáporná a teda náš výraz (pred vydelením $n+1$) je určite celé číslo.

Na záver už len stačí zvoliť n vhodne tak, aby nám delenie $n+1$ nepokazilo celistvosť nášho výrazu a aby daný výraz bol štvorec. Ak n je nepárne, potom všetky $n-1-2i$ sú párne a teda výraz bude štvorec ak $2^n/(n+1)$ je štvorec. Najjednoduchšie riešenie je teda zvoliť $n = 2^k - 1$, kde k je (dostatočne veľké) nepárne číslo. Potom očividne $2^n/(n+1)$ je párna a kladná mocnina dvojky a zvyšný výraz je tiež štvorcom celého čísla. Nakoľko takýchto nepárnych k si môžeme zvoliť nekonečne veľa, sme hotoví.