Riešenia 3. kola zimnej časti

3.1 Kus Medeného Smetia ($\kappa \leq 1$)

Zadanie. *Uvažujme ideálny medený drôt o trojcifernej dĺžke* $N = \overline{abc}$[1] *metrov. Ak ho vo vákuu rozdelíme na* b *rovnako dlhých častí, každá bude mať dĺžku* $\overline{cb}$. *Experimentálne sme overili, že* b *aj* $\overline{cb}$ *sú prvočísla. Vyčíslite dĺžku drôtu v metroch.*

Riešenie. opravuje **Adri** (adrianka.janackova@trojsten.sk)

Keďže b je (jednociferné) prvočíslo, môže byť len 2, 3, 5 alebo 7. Vieme, že $b \cdot \overline{cb} = \overline{abc}$, teda c musí zodpovedať poslednej cifre b^2. Pre $b = 2$ by to znamenalo $c = 4$, ale $\overline{cb}$ má byť prvočíslo a 42 prvočíslo nie je. Podobne nevyjde prvočíslo ani pre $b = 3, c = 9, \overline{cb} = 93$ ani $b = 5, c = 5, \overline{cb} = 55$. Ostáva jediná možnosť, a to $b = 7, c = 9, \overline{cb} = 97$. Číslo 97 je prvočíslo a $97 \cdot 7 = 679$. Dostávame teda jediné platné riešenie $a = 6, b = 7, c = 9$, teda dĺžka drôtu je 679 metrov.

3.2 Kvadrátmi Meriame Siemensy ($\kappa \leq 2$)

Zadanie. *Ak súčet odporov dvoch strán trojuholníka vynásobíme odporom tretej strany, dostaneme výsledok* 96 Ω^2. *Ak túto operáciu urobíme aj pri ostatných dvoch spôsoboch výberu prvej a druhej strany, dostaneme výsledky* 91 *a* 75 Ω^2. *Určte súčet odporov strán trojuholníka, ak odpor strany je vždy kladné reálne číslo.*

Riešenie. opravuje **Maťka** (martina.ganova@trojsten.sk)

Veľkosti odporu strán trojuholníka si označíme a, b, c. Našou úlohou je zistiť hodnotu súčtu $a + b + c$. Informácie zo zadanie vieme prepísať ako 3 rovnice o 3 neznámych:

$$a(b + c) = 96,$$

$$b(a + c) = 91,$$

$$c(a + b) = 75.$$

Ľavé strany rovníc si môžeme upraviť na:

$$ab + ac = 96, \tag{2.1}$$

$$ab + bc = 91, \tag{2.2}$$

$$ac + bc = 75. \tag{2.3}$$

[1] Značenie $\overline{xyz}$ označuje číslo zložené z cifier x, y, z v desiatkovej sústave v danom poradí.

Skúsime si vyjadriť hodnotu bc. Najskôr odčítame rovnicu (2.2) od (2.1) a dostaneme

$$ab + ac - ab - bc = 96 - 91,$$

$$ac - bc = 5. \tag{2.4}$$

Teraz môžeme rovnicu (2.4) odčítať od (2.3) a dostaneme:

$$ac + bc - ac + bc = 75 - 5,$$

$$2bc = 70,$$

$$bc = 35. \tag{2.5}$$

Dosadením (2.5) do (2.2) a (2.3) získavame

$$ab + 35 = 91,$$

$$ac + 35 = 75,$$

$$ab = 56, \tag{2.6}$$

$$ac = 40. \tag{2.7}$$

Teraz si môžeme z rovnice (2.6) vyjadriť neznámu a za pomoci b a následne to dosadiť do (2.7), z ktorej vieme vyjadriť neznámu b za pomoci c.

$$a = \frac{56}{b},$$

$$\frac{56c}{b} = 40,$$

$$\frac{56c}{40} = b. \tag{2.8}$$

A napokon dosadením tejto rovnice do (2.5) získame hodnotu c ako

$$\frac{56c^2}{40} = 35,$$

$$c^2 = 25,$$

$$c^2 - 25 = 0,$$

$$(c + 5)(c - 5) = 0.$$

Vyšlo nám, že buď $c = 5$ alebo $c = -5$. Zo zadania ale vieme, že odpory sú kladné reálne čísla, čiže zostáva len možnosť $c = 5$. Dosadením do (2.5) a (2.7) rovnice získame hodnoty a a b.

$$5b = 35,$$

$$5a = 40,$$

$$b = 7,$$

$$a = 8.$$

Súčet odporov trojuholníka je $5 + 7 + 8 = 20\ \Omega^2$.

3.3 Klbko Medených Stružlín ($\kappa \leq 3$)

Zadanie. *Z drôtu vieme vyrobiť drôtenku práve vtedy, keď pre dvojicu kladných celých čísel (n, k) platí, že $n \mid k^2 + 1$ a zároveň $n \mid (k+1)^2 + 1$. Určte všetky dvojice (n, k), pre ktoré sa dá z drôtu vyrobiť drôtenka.*

Riešenie. opravuje **Danko** (daniel.teplan@trojsten.sk)

Úpravou zadaných podmienok sa pokúsime nájsť iné výrazy, ktoré sú násobkom n a mohli by nám o hľadaných dvojiciach povedať viac. Vieme, že

$$(k+1)^2 + 1 = k^2 + 2k + 2.$$

Ak zo zadania je zároveň násobkom n aj $k^2 + 1$, tak potom aj ich rozdiel a súčet sú násobkom n. Vynásobením týchto výrazov (či už číslom alebo sebou samým) zachováme, že ide o násobky n. Dostávame tak

$$n \mid (k^2 + 2k + 2) - (k^2 + 1), \qquad n \mid (k^2 + 2k + 2) + (k^2 + 1),$$

$$n \mid 2k + 1, \qquad n \mid 2k^2 + 2k + 3,$$

$$n \mid (2k + 1)(2k + 1), \qquad n \mid 2(2k^2 + 2k + 3),$$

$$n \mid 4k^2 + 4k + 1, \qquad n \mid 4k^2 + 4k + 6.$$

Výsledné dva výrazy, ktoré sú násobkami n a líšia sa o 5. Vieme teda, že $n \mid 5$. A keďže 5 je prvočíslo, teda deliteľné iba sebou a jednotkou, už sú len dve možnosti.

Ak $n = 1$, riešením môžu byť všetky k, pretože akýkoľvek výraz z nich bude deliteľný 1.

Ak $n = 5$, vieme napríklad, že musí platiť $5 \mid 2k+1$. Zapíšme $k = 5l+x$, kde l bude ľubovoľné nezáporné celé číslo a x bude z množiny $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, teda zvyšok čísla k po delení piatimi. Potom v deliteľnosti $5 \mid 2(5l+x)+1 = 10l+2x+1$ môžeme hneď člen $10l$ škrtnúť, lebo je násobkom 5, a teda na l nezáleží – stačí, aby $2x+1$ bolo deliteľné 5. To bude splnené iba v prípade, že k bude mať správny zvyšok po delení 5.

Po rýchlom vyskúšaní zisťujeme, že jediné vyhovujúce je $x = 2$, teda riešeniami by mohli byť dvojice $n = 5, k = 5l+2$ pre všetky nezáporné l. Už si len dosadením treba overiť, či to tak vždy platí. Dostaneme

$$5 \mid (5l+2)^2 + 1 = 25l^2 + 20l + 5, \quad 5 \mid (5l+2+1)^2 + 1 = 25l^2 + 30l + 10.$$

Tu vidíme že oba výrazy zo zadania po dosadení a úprave majú všetky členy deliteľné piatimi.

Odpovede preto sú $n = 1, k \in \mathbb{N}$ a $n = 5, k = 5l + 2$ pre $l \in \mathbb{N}_0$.

3.4 Kúsok Milej Stereometrie ($\kappa \leq 5$)

Zadanie. *V laboratóriu je vtákopysk, ktorý robí mnohé nebezpečné experimenty. My sa obmedzíme na bezpečnejšie priestorové pokusy.*

K dispozícii máme dva nástroje. Gulidlo *pre zadané body A, B zostrojí guľu so stredom A, ktorá má na povrchu bod B.* Rovinítko *pre tri zadané body, ktoré neležia na jednej priamke, zostrojí rovinu, ktorá prechádza týmito bodmi.*

- *V priestore je zadaná rovina a bod, ktorý na nej neleží. Nájdite spôsob, ako zostrojiť priamku kolmú na zadanú rovinu, prechádzajúcu zadaným bodom. Priamku p a rovinu π nazývame navzájom kolmými, ak je priamka p kolmá na dve ľubovolné rôznobežné priamky ležiace v rovine π.*
- *Pre dve zadané roviny skonštruujte ich rovinu súmernosti. Rovina súmernosti je množina bodov, ktoré sú rovnako vzdialené od oboch rovín. Vzdialenosť bodu X od roviny π je vzdialenosť bodu X od najbližšieho bodu roviny π.*
- *V priestore je zadaný štvorsten. Skonštruujte jemu vpísanú guľu. Guľa vpísaná štvorstenu je taká guľa, ktorá má s každou jeho stenou spoločný práve jeden bod.*

Nezabudnite aj dokázať správnosť vašej konštrukcie.

Riešenie. opravuje **Mišo M.** (michal.molnar@trojsten.sk)

Postupne zaradom vyriešime otázky zo zadania. Začnime zopár základnými pozorovaniami, ktoré nám zjednodušia prácu. Ak sa povrchy dvoch gulí pretínajú vo viac ako jednom bode, tvorí daný priesečník kružnicu. Ak povrch gule pretína rovinu vo viac ako jednom bode, priesečník je opäť kružnica. V oboch prípadoch vieme cez priesečník viesť rovinu. Na kružnici vyznačíme tri body a použijeme rovinítko. Keďže kružnica je rovinný útvar, vo výslednej rovine budú ležať všetky jej body. V prípade dvoch gulí bude navyše výsledná rovina kolmá na spojnicu stredov.

Kolmica na rovinu.

Prejdime ku kolmici k – nech je zadaný bod A a rovina π, na ktorú robíme kolmicu cez A. Vyznačme ľubovoľný bod $B \in \pi$ a spravme guľu g so stredom A, ktorá má na povrchu B. Ak je prienik g a π len bod B, hľadaná kolmica k je práve priamka AB. V opačnom prípade je priesečníkom kružnica. Priamka k musí preťať π v bode, ktorý je k nej najbližšie a to bude práve stred vzniknutej kružnice.

Ako nájdeme tento stred? Využijeme naše znalosti z roviny. Na kružnici vyznačíme dve úsečky a spravíme ich osi. Ak nebudú úsečky rovnobežné, priesečníkom osí bude stred kružnice. Túto konštrukciu vieme spraviť aj v priestore pomocou gulidla a rovinítka. Gule budú mať v rovine π len kružnice, roviny ju zase pretnú v priamke. Os úsečky XY tak vieme získať pomocou gule so stredom X a bodom Y na povrchu a gule so stredom Y a bodom X na povrchu. Kružnicou, ktorá ktorá vznikne ako prienik týchto gulí, prevedieme rovinu, ktorá nám dá v rovine hľadanú os. V priestore to bude rovina symetrie úsečky XY, teda množina bodov rovnako vzdialená od oboch koncov úsečky.

Keď nájdeme stred S našej kružnice, výslednou kolmicou k bude priamka AS. Tú vieme skonštruovať ako prienik dvoch rôznobežných rovín, ktoré obsahujú A aj S.

Roviny súmernosti.

Druhým krokom je rovina súmernosti. Máme zadané roviny π a ρ, chceme rovinu σ, ktorá bude spĺňať podmienky zo zadania. Tu je dôležité si uvedomiť, že rovina súmernosti je analógiou k osi uhla v rovine. Keď si našu situáciu preložíme rovinou kolmou na obe zadané roviny, v prieniku dostaneme dve priamky. Tu spĺňajú zadanie práve osi uhlov, ktoré tieto priamky zvierajú. V priestore potom potrebujeme tento prípad „roztiahnuť“ kolmo na rovinu v ktorej sme pracovali. Riešenie rozdelíme na dva prípady.

Prvým je možnosť, že π a ρ sú rovnobežné. Vtedy hľadáme rovinu, ktorá bude presne v strede medzi nimi. Zvolíme si bod A ľubovoľne a podľa postupu vyššie skonštruujeme spoločnú kolmicu na obe roviny. Jej priesečníky s π a ρ označíme postupne B, C a spravíme rovinu symetrie úsečky BC. To nám dá hľadanú rovinu.

Teraz sa pozrime na možnosť, keď sú π a ρ rôznobežné. Ich priesečníkom je priamka p. Zvoľme na nej body A, B a spravme rovinu symetrie úsečky AB, ktorú označíme τ. Rovina τ je kolmá na priamku p, takže je kolmá aj na π a ρ. Pozrime sa do roviny τ. Aj π aj ρ ju pretínajú v dvoch priamkach – q a r. Opäť si vieme pomôcť situáciou z roviny a teda zostrojiť os(i) uhla medzi týmito priamkami. Označme X priesečník $p \cap \tau$ a zostrojme guľu so stredom X a ľubovoľným polomerom. Tá pretne priamky q a r v bodoch Y, Y' a Z, Z'. Roviny symetrie YZ a $Y'Z$ budú rovinami symetrie σ.

Vpísaná guľa.

Na záver majme štvorsten $ABCD$. Stred S vpísanej gule musí byť rovnako vzdialený od všetkých stien a teda aj rovnako vzdialený od rovín ABC, ABD, ACD, BCD. Musí teda ležať na osi každej dvojice rovín. Nám budú stačiť aj tri osi. Totiž, na $\left|S, \overleftrightarrow{ABC}\right| = \left|S, \overleftrightarrow{ABD}\right| = \left|S, \overleftrightarrow{ACD}\right| = \left|S, \overleftrightarrow{BCD}\right|$ stačí bodu S ležať na osi $\overleftrightarrow{ABC}$ a $\overleftrightarrow{ABD}$ (prvá rovnosť), $\overleftrightarrow{ABD}$ a $\overleftrightarrow{ACD}$ (druhá rovnosť), $\overleftrightarrow{ACD}$ a $\overleftrightarrow{BCD}$ (tretia rovnosť).

Tieto roviny súmernosti zostrojíme podľa postupu vyššie a vyznačíme ich prienik – bod S. Následne potrebujeme nájsť najbližší bod roviny $\overleftrightarrow{ABC}$ k bodu S. Cez ten vedie kolmica na $\overleftrightarrow{ABC}$ prechádzajúca bodom S. Tú vieme tiež zostrojiť. Tento bod označíme X a guľa so stredom S, ktorá má na povrchu bod X bude vpísaná do štvorstenu $ABCD$.

3.5 Kukáme Mikroskopom Svetelným ($\kappa \leq 8$)

Zadanie. *Unavený Féro sa nudí, a tak sa pozerá na polarizáciu fotónov. Polarizácia je kvantový jav, ktorý môže skolabovať do horizontálneho alebo vertikálneho stavu s rovnakou pravdepodobnosťou. Teda funguje ako férová minca. Féro si povedal, že skončí, keď dvakrát po sebe uvidí vertikálne polarizované fotóny. V závislosti od n určte, aká je pravdepodobnosť, že skončí po pozretí sa na presne n fotónov.*

Riešenie. opravujú **Oski** (oskar.hritz@trojsten.sk), **Naťa** (natalia.cigasova@trojsten.sk) a **Vít** (vit.hanika@trojsten.sk)

Preformulujme si úlohu pomocou hodov mincou. Nech hlava (pozorovanie vertikálne polarizovaného fotónu) je reprezentovaná jednotkou a orol (pozorovanie horizontálne polarizovaného fotónu) je reprezentovaný nulou.

Platná séria hodov môže vyzerať nasledovne:

$$01001(0\underline{11})$$

Najprv skúsime spočítať počet možností pre série hodov, ktoré končia práve n-tým hodom. Pozrieme sa na to, ako taká séria hodov musí vyzerať.

Môžeme si všimnúť, že pre $n \geq 3$ sú posledné tri hody pevne dané. Posledné dva hody (hod $n-1$ a hod n) musia byť dve 1, aby sa séria hodov ukončila práve n-tým hodom a $(n-3)$-tí hod musela byť 0, ináč by sme skončili na $(n-1)$-vom hode. Každá séria $n \geq 3$ hodov je preto jednoznačne daná prvými $n-3$ hodmi.

Zamerajme sa na spočítanie sérií týchto $m = n - 3$ hodov, keďže ich počet je rovnaký ako počet sérii n hodov so zakončením (011).

Každá séria hodov sa môže začínať 0 alebo 1, teda celkový počet sérii hodov dĺžky m (ďalej označených P_m) je rovný súčtu

- počtu takýchto sérií hodov začínajúcich s 0 (označených $P_m^{(0)}$),
- a počtu takýchto sérii hodov začínajúcich s 1 (označených $P_m^{(1)}$).

Zapíšeme si to rovnicou ako

$$P_m = P_m^{(0)} + P_m^{(1)}.$$

Pozrime sa teraz na série hodov s dĺžkou $m+1$. Všimneme si, že ich vieme vytvoriť zo sérií hodov s dĺžkou m.

$$01001(0\underline{11}) \to (\underline{0/1})01001(0\underline{11})$$

Ak sa nejaká séria hodov dĺžky m začína 1, tak na začiatok vieme pridať len 0 (ináč by sme dostali dve za sebou idúce 1) a ak sa nejaká séria hodov dĺžky m začína 0, tak na začiatok vieme pridať aj 0 aj 1. Z toho dostávame, že

$$P_{m+1}^{(0)} = P_m^{(0)} + P_m^{(1)} = P_m,$$

$$P_{m+1}^{(1)} = P_m^{(0)},$$

$$P_{m+1} = P_{m+1}^{(0)} + P_{m+1}^{(1)} = P_m + P_m^{(0)}.$$

To isté vieme urobiť pre série hodov dĺžky $m+2$, čím dostaneme

$$P_{m+2} = P_{m+2}^{(0)} + P_{m+2}^{(1)} = P_{m+1} + P_{m+1}^{(0)}.$$

Už sme ale zistili, že $P_{m+1}^{(0)} = P_m$, teda

$$P_{m+2} = P_{m+1} + P_{m+1}^{(0)} = P_{m+1} + P_m,$$

čo je identické predpisu Fibonacciho postupnosti

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,\ F_0 = 0,\ F_1 = 1.$$

Na to, aby sme mohli povedať, že sú úplne totožné, overíme P_3 a P_4. Očividne existuje jediná séria hodov, ktorá skončí úspechom po troch hodoch, a to 011. Po štyroch hodoch môžeme skončiť dvomi spôsobmi, a to 0011 a 1011. Vidíme teda, že $P_3 = 1 = F_2, P_4 = 2 = F_3$, čiže vo všeobecnosti dostávame $P_n = F_{n-1}$.

Samozrejme, vynechali sme $n = 1$ a $n = 2$, kde si ale všimneme, že náš predpis platí:

$n = 1 \to$ nevieme ukončiť hádzanie, teda $P_1 = 0 = F_0$.

$n = 2$: $11 \to P_2 = 1 = F_1$.

Spočítali sme počty možností sérií hodov pre n hodov, teraz z toho spočítame hľadanú pravdepodobnosť.

Pravdepodobnosť, že nastane nejaká konkrétna séria hodov dĺžky n je $\frac{1}{2^n}$, pretože pravdepodobnosť, že konkrétny samostatný hod dopadne tak, ako dopadol v danej sérii, je $\frac{1}{2}$. Hľadaných sérií dĺžky n je F_{n-1}, teda hľadaná pravdepodobnosť je

$$F_{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{F_{n-1}}{2^n}.$$

Poznámka: Uznávali sme aj riešenia, ktoré výsledok reprezentovali prehľadnou a dobre odôvodnenou rekurenciou, ak rekurencia výsledok jednoznačne udávala, nakoľko aj samotná Fibonacciho postupnosť je reprezentovaná rekurenciou.

3.6 Kváder Môžeme Skúmať

Zadanie. *Majme štvordimenzionálny kváder s kladnými reálnymi rozmermi $a \times b \times c \times d$. Experiment bude fungovať práve vtedy, keď bude platiť, že*

$$(a+b+c+d) \cdot \left(\frac{1}{b+2c+d} + \frac{1}{c+2d+a} + \frac{1}{d+2a+b} + \frac{1}{a+2b+c}\right) \geq 4.$$

Dokážte, že experiment bude fungovať vždy.

Riešenie. opravuje **Kopy** (martin.kopcany@trojsten.sk)

Keďže platí

$$a+b+c+d = \frac{(b+2c+d)+(c+2d+a)+(d+2a+b)+(a+2b+c)}{4},$$

môžeme si nerovnosť prepísať do tvaru, v ktorom sa nám opakujú tie isté výrazy:

$$\frac{(b+2c+d)+(c+2d+a)+(d+2a+b)+(a+2b+c)}{4} \cdot \left(\frac{1}{b+2c+d} + \frac{1}{c+2d+a} + \frac{1}{d+2a+b} + \frac{1}{a+2b+c}\right) \geq 4.$$

Opakujúce sa výrazy $(b+2c+d)$, $(c+2d+a)$, $(d+2a+b)$ a $(a+2b+c)$ si označíme ako w, x, y, z, aby bola nerovnosť prehľadnejšia. Nové premenné sú pritom tiež kladné, pretože sú súčtom kladných čísel.

$$\frac{w+x+y+z}{4} \cdot \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 4.$$

Keďže prevrátená hodnota kladného čísla je kladná a súčet kladných čísel je kladný, druhou zátvorkou môžeme nerovnosť vydeliť a dostať

$$\frac{w+x+y+z}{4} \geq \frac{4}{\frac{1}{w}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}},$$

čo platí zo známej nerovnosti medzi aritmetickým a harmonickým priemerom (AM-HM nerovnosť) – je to presne jej znenie pre štyri čísla. A nakoľko sme v celom riešení používali ekvivalentné úpravy, vieme sa spätne dostať k požadovanej nerovnosti.

Riešenie pomocou permutačnej nerovnosti

Iný spôsob, ako nerovnosť dokázať, ak nám nenapadne harmonický priemer, ale poznáme permutačnú nerovnosť, je nasledovný. Vynásobme nerovnosť štyrmi:

$$(w+x+y+z)\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 16.$$

Po roznásobení a preusporiadaní členov dostaneme

$$\left(x\cdot\frac{1}{x}+y\cdot\frac{1}{y}+z\cdot\frac{1}{z}+w\cdot\frac{1}{w}\right)+\left(x\cdot\frac{1}{y}+y\cdot\frac{1}{z}+z\cdot\frac{1}{w}+w\cdot\frac{1}{x}\right)+$$

$$+\left(x\cdot\frac{1}{z}+y\cdot\frac{1}{w}+z\cdot\frac{1}{x}+w\cdot\frac{1}{y}\right)+\left(x\cdot\frac{1}{w}+y\cdot\frac{1}{x}+z\cdot\frac{1}{y}+w\cdot\frac{1}{z}\right) \geq 16.$$

Môžete si overiť, že každá kombinácia premenných v čitateli a menovateli sa tu vyskytuje práve raz. V každej štvorici sčítancov (v zátvorke) je každá premenná práve raz v čitateli a práve raz v menovateli. Každá štvorica sčítancov je teda súčet súčinov nejako popárovaných hodnôt x, y, z, w s hodnotami $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, \frac{1}{w}$.

Z permutačnej nerovnosti vieme, že takýto súčet bude najmenší, ak popárujeme najväčšie číslo s najmenším atď. Oplatí sa nám preto párovať vždy x s $\frac{1}{x}$, y s $\frac{1}{y}$ atď., pretože ak je x najväčšie spomedzi našich premenných, tak $\frac{1}{x}$ bude najmenšie. Je to tak preto, že funkcia $\frac{1}{x}$ je klesajúca, čím mám väčšie x, tým menšie mám $\frac{1}{x}$. Pozor, tu využívame, že naše premenné sú kladné.

Každá štvorica bude mať teda väčšiu alebo rovnakú hodnotu ako najmenšia permutácia, a keďže máme štyri štvorice, tak platí:

$$\left(x\cdot\frac{1}{x}+y\cdot\frac{1}{y}+z\cdot\frac{1}{z}+w\cdot\frac{1}{w}\right)+\left(x\cdot\frac{1}{y}+y\cdot\frac{1}{z}+z\cdot\frac{1}{w}+w\cdot\frac{1}{x}\right)+$$

$$+\left(x\cdot\frac{1}{z}+y\cdot\frac{1}{w}+z\cdot\frac{1}{x}+w\cdot\frac{1}{y}\right)+\left(x\cdot\frac{1}{w}+y\cdot\frac{1}{x}+z\cdot\frac{1}{y}+w\cdot\frac{1}{z}\right) \geq 4\cdot\left(x\cdot\frac{1}{x}+y\cdot\frac{1}{y}+z\cdot\frac{1}{z}+w\cdot\frac{1}{w}\right) = 4\cdot 4 = 16,$$

čo sme presne chceli dokázať.

Riešenie pomocou Jensenovej nerovnosti

Ukážeme iný spôsob, ako dokázať nerovnosť

$$(w+x+y+z)\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 16.$$

Upravíme si ju na

$$\frac{\frac{1}{w}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{4}\geq\frac{4}{w+x+y+z}=\frac{1}{\frac{w+x+y+z}{4}}.$$

O funkcii $f(x)=\frac{1}{x}$ vieme, že na kladných reálnych číslach je konvexná (oblasť nad jej grafom je konvexná). Preto pre ňu z Jensenovej nerovnosti platí, že priemer funkčných hodnôt (v bodoch w,x,y,z – na ľavej strane nerovnosti) je väčší alebo rovný ako funkčná hodnota v priemere, teda $f(\frac{w+x+y+z}{4})=\frac{4}{w+x+y+z}$, čím sme dostali chcenú nerovnosť.

Riešenie pomocou „zlomkobijca"

„Zlomkobijec" je nerovnosť odvodená z Cauchy-Schwarzovej nerovnosti a hovorí nám, že pre kladné reálne čísla $a_1,\ldots a_n, b_1,\ldots b_n$ platí:

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\cdots+\frac{a_1^2}{b_1}\geq\frac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{b_1+\cdots+b_n}.$$

Platí preto

$$(w+x+y+z)\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq(w+x+y+z)\cdot\frac{(1+1+1+1)^2}{w+x+y+z}=4^2=16.$$

Tu sme využili, že $w+x+y+z$ je kladné číslo, takže z neho môžeme zobrať odmocninu. Celé by sa to dalo urobiť aj bez zavedenia w,x,y,z (stačí si v každom kroku za ne dosadiť), ale boli by tam veľmi dlhé výrazy.

3.7 Kopec Masívnej Sily

Zadanie.

V ostrouhlom trojuholníku ABC nech vektor sily má počiatok v bode C a končí v bode F, ktorý je pätou výšky na strane AB. Nech M je ťažisko[2] strany AC. Ak platí, že $|BM|=|CF|$ a $|\sphericalangle MBC|=|\sphericalangle FCA|$, dokážte, že trojuholník ABC je rovnostranný.

Riešenie. opravuje **Mati** (matus.zelko@trojsten.sk)

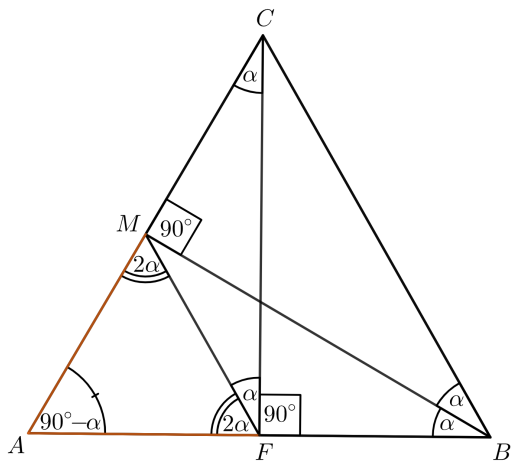
Najprv si všimnime, že M je stredom Tálesovej kružnice nad trojuholníkom AFC, preto $|MC|=|MF|$. Vďaka tomu dostávame, že $|\sphericalangle MFC|=|\sphericalangle MCF|=\alpha$, lebo ide o rovnoramenný trojuholník. Taktiež dostávame, že $|\sphericalangle AMF|=2\cdot|\sphericalangle ACF|=2\alpha$. Ide o stredový uhol vzhľadom k vyššie spomínanej Tálesovej kružnici. Teraz nahliadneme, že štvoruholník $MFBC$ je tetivový ($|\sphericalangle MBC|=|\sphericalangle FCA|=\alpha=|\sphericalangle MFC|$). Vďaka tomu $|\sphericalangle MCF|=|\sphericalangle MBF|=\alpha$.

Pokračujme jednoduchým pozorovaním, že $|\sphericalangle CAF|=180^\circ-|\sphericalangle AFC|-|\sphericalangle ACF|=90^\circ-\alpha$, a teda $|\sphericalangle AMB|=180^\circ-|\sphericalangle MAB|-|\sphericalangle ABM|=90^\circ$. Zároveň však zo zhodnosti trojuholníkov MAB a FAC podľa vety usu (pripomeňme,

[2] stred

že $|MB| = |CF|$) dostávame, že $|AF| = |AM|$. Z rovnoramennosti trojuholníka AMF, dostávame, že $|\sphericalangle AMF| = |\sphericalangle AFM| = 2\alpha$, a teda $3\alpha = 90°$, preto $\alpha = 30°$.

Vďaka tomu $|\sphericalangle CAB| = 90° - 30° = 60° = 2 \cdot 30° = |\sphericalangle ABC|$, čiže trojuholník je rovnostranný.



3.8 Konvolúcia Množstva Šošoviek

Zadanie.

Šošo má na stole 2 šošovky. Každú minútu na stôl pridá šošovky v počte najväčšieho prvočíselného deliteľa počtu šošoviek doteraz vyložených na stole. Nájdite všetky prirodzené m také, že v nejakej minúte bude počet šošoviek na stole práve m^2.

Riešenie. opravuje **Štepi** (martin.stepanek@trojsten.sk)

Zoberme si postupnosť, ktorej členy sú počty šošoviek postupne v každej minúte. Keď si vypíšeme prvých pár členov, zistíme, že zo štvorcov sú tam práve štvorce prvočísel. Chceli by sme dokázať, že to naozaj platí pre všetky prvočísla – teda že sú tam práve ich štvorce a žiadne iné.

Pozrime sa teda na to, ako sa postupnosť správa od bodu, keď nadobudne hodnotu p^2 pre nejaké prvočíslo p. Najväčší prvočíselný deliteľ p^2 je p, takže ďalší člen bude $p(p+1)$. Takto budeme pripočítavať p až dovtedy, kým $p(p+k)$ nebude mať väčšieho prvočíselného deliteľa ako p. Prvý takýto deliteľ môže byť až najbližšie prvočíslo väčšie ako p, označme ho q. Postupným pripočítavaním p sa potom dostaneme až k pq. Teraz je najväčší prvočíselný deliteľ q, postupnosť teda bude pokračovať členmi $(p+k)q$. Kým bude $p+k < q$, najväčší prvočíselný deliteľ bude stále q a teda sa takto dostaneme až po q^2.

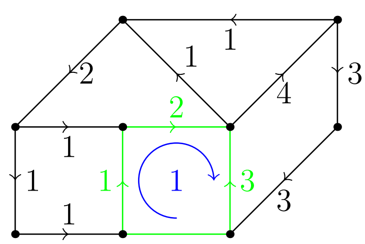
Tým sme dokázali, že takto dosiahneme postupne všetky prvočísla. Ostáva ešte ukázať, že žiadne iné štvorce nedosiahneme. Ak by sme taký štvorec mali dosiahnuť, musel by byť tvaru $p(p+k)$ alebo $(p+k)q$, kde $p+k < q$. Štvorec tvaru $(p+k)q$ nedosiahneme, lebo $p+k$ nemôže byť deliteľné q, keďže je menšie. Štvorec tvaru $p(p+k)$ by musel byť deliteľný p, teda aj p^2, a najbližší väčší taký štvorec od p^2 je $4p^2$. Muselo by sa teda stať, že $q > 4p$, teda by nemohli byť žiadne prvočísla medzi p a $4p$, čo znie celkom podozrivo, teda že by sa to nemalo stať. Aby sme dokázali, že sa to naozaj nemôže stať, použijeme tvrdenie známe ako Bertrandov postulát, ktorý hovorí, že pre každé prirodzené n existuje prvočíslo medzi n a $2n$. K najbližšiemu inému štvorcu, ktorý by vyhovoval, sa teda nedostaneme, preto sú to naozaj len štvorce prvočísel.

3.9 Kirchhoffa Musíme Splniť

Zadanie. *Baška poskladala elektrický obvod pozostávajúci z niekoľkých uzlov, kde niektoré dvojice uzlov sú spojené vodičom. Navyše každý vodič je súčasťou nejakého štvoruholníka pozostávajúceho zo 4 uzlov pospájaných vodičmi „do kruhu“.*[3] *Dokáže Baška v každom obvode, ktorý spĺňa túto vlastnosť, nastaviť elektrický prúd tak, aby každým vodičom prechádzal prúd veľkosti* 1, 2, 3 *alebo* 4 *ampére (pričom prechádzať môže vodičom v ľubovoľnom smere)? Samozrejme, v každom uzle musí platiť prvý Kirchhoffov zákon – súčet veľkostí prúdov doňho vchádzajúcich musí byť rovný súčtu veľkostí prúdov z neho vychádzajúcich.*

Riešenie. opravuje **Jožtek** (jozef.rajnik@trojsten.sk)

Na začiatok je fajn si nakresliť niekoľko takých obvodov. Ako ich nakreslíme, aby sme splnili podmienku o štvoruholníkoch? Jednoduchý spôsob je nakresliť jeden štvoruholník, potom k nemu pridať ďalší a takto postupne pridávať štvoruholníky do nášho obvodu. Keď si nakreslíme takýto obvod, tak vieme vyskúšať, či sa nám v ňom podarí nastaviť prúd podľa zadania. Len ťažko tu nájdeme nejakú prekážku, prečo by to nemalo ísť. Navyše sa nám tu ponúkne spôsob, ako taký prúd hľadať – vieme ich hľadať spolu s tým, ako náš obvod tvoríme. Ak máme len štvoruholník, tak ním vie pretekať 1 ampér. Druhým štvoruholníkom môžeme napr. poslať 2 ampére. Na miestach, kde sa tieto štvoruholníky stretnú, tak dostaneme 1 alebo 3 ampére podľa toho, či sa prúdy stretli v súhlasom smere. Ďalej sa to už komplikuje a závisí to od situácie.



Obrázok 9.1: *Príklad pridania štvoruholníka*

Vo všeobecnosti máme situáciu, kde máme už nejaký obvod s určenými prúdmi, napr. ako na obrázku 9.1. Do tohto obvodu pridáme zelený štvoruholník. Tri jeho vodiče už boli v obvode, tak nimi už tečie prúd, len jeden jeho vodič (spodný) ešte prúd nemá. Táto situácia je priaznivá, lebo napr. vo vyznačenom (modrom) smere vieme po pridanom zelenom štvoruholníku poslať 1 ampér, čím dostaneme prúdy podľa zadania. Avšak nie vždy to ide tak ľahko, napr. ak by sme mali v zelenom štvoruholníku dva vodiče, ktorými prechádzajú 4 ampére v opačných smeroch.

Úlohu vyriešime s využitím dvoch myšlienok. Najprv dovolíme dosiahnuť hodnoty prúdu vyššie ako 4 ampére, aby sme vedeli použiť našu ideu s posielaním vhodného prúdu do pridaného štvoruholníka. Pritom však hodnota 5 (spolu s 0) ostane zakázaná. Môžeme sa na to aj pozerať, že zakazujeme násobky piatich. Potom ukážeme, že ak nikde nemáme prúd s hodnotou deliteľnou piatimi, tak sa vieme priveľkých hodnôt zbaviť.

V dôkaze budeme uvažovať fixný obvod O. Každý jeho vodič sa nachádza v nejakom štvoruholníku – tie si označíme $\check{S}_1, \check{S}_2, \ldots, \check{S}_k$ postupne pre jednotlivé vodiče. Samozrejme, táto postupnosť nemusí obsahovať navzájom rôzne štvoruholníky. Matematickou indukciou ukážeme, že pre každé $n \in \{0, 1, \ldots, k\}$ platí, že obvod O_n, ktorý vznikne

[3] čiže ak uvažovaný vodič je medzi uzlami a, b, tak existujú uzly c, d také, že dvojice uzlov $(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)$ sú všetky pospájané vodičmi

spojením štvoruholníkov $\check{S}_1, \check{S}_2, \dots \check{S}_n$ možno nastaviť prúd s hodnotami 1, 2, 3 a 4 ampére. Pre $n = 0$ nemáme v obvode žiadne vodiče, teda tvrdenie zjavne platí. Predpokladajme teraz, že pre nejaké $n \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ možno v obvode O_n nastaviť prípustný prúd. Ukážeme, že to možno spraviť aj v obvode O_{n+1}.

Obvod O_{n+1} sa od obvodu O_n líši tým, že sme do neho pridali štvoruholník $\check{S}_{n+1}$. Ak sa všetky vodiče štvoruholníka $\check{S}_{n+1}$ už nachádzali v obvode O_n, tak už nemáme čo dokazovať. V opačnom prípade niektorý vodič v štvoruholníka $\check{S}_{n+1}$ nie je v obvode O_n, a teda ešte nemá priradený prúd. Štvoruholníkom $\check{S}_{n+1}$ prejdeme v jednom smere, čím zistíme, že vodičmi rôznymi od v pretekajú prúdy postupne a, b, c ampérov – tieto hodnoty môžu byť aj záporné (keď prúd tečie opačným smerom, ako vodičom prechádzame) alebo aj nulové (ak sa príslušný vodič tiež nenachádza v O_n). Teraz zvolíme také číslo $d \in \{1, 2, 3, 4\}$, pre ktoré žiadne z čísel $a + d$, $b + d$, $c + d$ nie je deliteľné piatimi – to vieme spraviť, nakoľko každé z hodnôt a, b, c nám vylučuje najviac jednu možnú hodnotu d. Po cykle $\check{S}_{n+1}$ pošleme prúd d ampérov v zvolenom smere. Tým sa dostávame do situácie, že máme nastavený prúd v obvode O_n tak, že žiadnym vodičom neprechádza prúd, ktorého veľkosť je deliteľná piatimi.

Avšak po tejto operácii môže niektorým vodičom prechádzať prúd väčší ako 4 ampére, presnejšie 6 až 9 ampérov. Ukážeme, že teraz sa vieme takýchto hodnôt zbaviť. Nech z uzla x do uzla y prechádza prúd veľkosti $a \in \{6, 7, 8, 9\}$ ampérov. Teraz nájdeme orientovanú cestu z uzla y do uzla x, teda cestu, na ktorej sa presúvame vodičmi vždy v smere prúdu. Nech M je množina všetkých uzlov, do ktorých sa vieme dostať z vodiča y, ak dodržiavame smer prúdov. Na základe toho, ako prúdi prúd, aj pre množinu M musí platiť, že to, čo do nej vtečie, musí z nej vytiecť (pre dôkaz si dajte do rovnosti všetky prúdy vchádzajúce do uzlov v M so všetkými vychádzajúcimi prúdmi). Keďže však z M žiaden prúd nevyteká, tak nemôže ani vtekať, teda x musí byť tiež v M.

Teda máme orientovanú cestu z uzla y do x. Spolu s vodičom z x do y tak dostávame orientovaný cyklus C niekoľkých vodičov. Týmto cyklom C pošleme v opačnom smere prúd 5 ampérov. Z hodnoty a sa tak stane hodnota $a - 5 \in \{1, 2, 3, 4\}$. To isté sa stane aj s ďalšími hodnotami medzi 6 a 9, ak ešte nejaké v cykle C boli. Zvyšné hodnoty, ktoré sú z množiny $\{1, 2, 3, 4\}$, sa zmenia na $\{-4, -3, -2, -1\}$, čo je v poriadku, nakoľko záporný prúd znamená opačný smer toku prúdu. Touto operáciou sa teda vieme zbaviť hodnoty väčšej ako 4 ampére. Ak ešte nejaká taká hodnota ostala, tak tento proces zopakujeme. Tým dosataneme hľadané prúdy aj v obvode O_{n+1}, čím je náš dôkaz ukončený.

Komentáre k úlohe

Skúsení riešitelia si isto všimli, že táto úloha sa dá reprezentovať pomocou teórie grafov. V našom prípade sú vrcholy grafu uzly a hrany grafu sú vodiče. Takýto „prúd" v grafoch sa nazýva *tok*. Pomocou tokov vieme reprezentovať situácie ako tečenie vody v potrubiach či pohyb áut v cestnej sieti. Avšak v týchto situáciách nám väčšinou ide o to, koľko najviac toku vieme prepraviť z jedného miesta na druhé, pričom máme zhora ohraničený tok cez jednotlivé hrany. V tejto úlohe sme však žiadne dva špeciálne vrcholy nemali. Taktiež sme tu mali pomerne netradičné obmedzenie, aby každou hranou niečo tieklo. Takýto tok sa v teórii grafov nazýva *nikde-nulový tok*, presnejšie *nikde-nulový* 5-*tok*, keďže sme mohli používať len nenulové hodnoty menšie ako 5.

Nikde nulové toky nemajú až také priame uplatnenia, ale za to celkom pekne súvisia s rôznymi vlastnosťami grafov, napr. s farbeniami. Jeden taký súvis si môžete pozrieť v úlohe Korporátna Mestská Stabilita (40. ročník, 3. zimné kolo, úloha 9). Na záver ešte spomenieme, že podľa všetkého predpoklad o štvoruholníkoch je príliš silný. Čo ak by sme vyžadovali len to, že každá hrana grafu sa nachádza v nejakom cykle (teda nie nutne v cykle dĺžky 4)? Táto podmienka je ekvivalentná tomu, že graf nemá *most*, čo je taká hrana, po ktorej odstránení prestane existovať cesta medzi niektorými dvomi vrcholmi. Doterajší výskum naznačuje, že táto podmienka je postačujúca – nikomu sa nepodarilo nájsť graf, v ktorom by to nestačilo. Hypotézu o tom, že to stačí, sformuloval v roku 1954 William T.

Tutte. Odvtedy sa ju nikomu nepodarilo dokázať či vyvrátiť. Význam tejto hypotézy je porovnateľný s dávnejšou hypotézou, teraz už vetou o štyroch farbách, ktorá hovorí o tom, že štáty ľubovoľnej mapy možno zafarbiť štyrmi farbami tak, aby susedné štáty mali rôzne farby. Najvýznamnejší pokrok v tomto smere dosiahol Paul Seymour, ktorý ukázal, že každý graf bez mostu pripúšťa nikde-nulový 6-tok, teda tok využívajúci hodnoty 1, 2, 3, 4 a 5.

3.10 Kosé Mám Štvorce

Zadanie.

Krtko sa nachádzal v konzervatívnom poli, v ktorom sa prechádzal po svojich obľúbených chodníčkoch. Po chvíli zastal a uvedomil si, že práca, ktorú pole vykonalo, je nulová. Po bližšej analýze svojej trasy zistil, že je to preto, že išiel po obvode kosoštvorca.

Majme trojuholník ABC. Jeho vpísaná kružnica so stredom I sa dotýka strán AB a AC postupne v bodoch E, F. Označme M a N postupne ťažiská kružníc opísaných trojuholníkom AIC a AIB. Veďme z bodu M dotyčnice ku kružnici vpísanej trojuholníka ABC, ktoré sa jej dotýkajú v bodoch K, G. Analogicky veďme aj z bodu N, ktoré sa dotýkajú zas v bodoch J, L. Priamky KG a JL sa pretínajú v bode X. Dokážte, že EFXI je kosoštvorec.

Riešenie. opravuje **Džavo** (adam.dzavoronok@trojsten.sk)

Na začiatok si uvedomme, že I ako stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC leží na osi úsečky EF. Ak si jeho obraz v osovej súmernosti podľa EF označíme ako I', bude platiť, že II' a EF sú na seba kolmé a polia sa, teda tvoria kosoštvorec. Stačí teda dokázať, že body I a X sú osovo súmerné podľa priamky EF.

Ďalej si všimneme, že priamka MN je z definície stredov opísaných kružníc osou úsečky AI. Označme si teda stred AI ako S. Následne označme U stred EF. Nahliadneme, že body A,S,I', U a I ležia na priamke AI. Následne je rovnako ľahko vidieť, že $EAFI$ je tetivový deltoid.

Bystré oko geometra už tuší, že nám stačí len dokázať, že priamka MN je polárou[4] bodu I' vzhľadom ku kružnici vpísanej, z čoho už z *La Hire Theorem* vyplýva, že body I' a X sú jeden a ten istý bod a tým vyhráme. To vyplýva z toho, že priamka, na ktorej ležia body dotyku dotyčníc vedených z jedného bodu, je polárou tohto bodu. Dá sa to nahliadnuť tým, že kolmý priemet bodu na túto priamku je práve jeho obraz v kružnicovej inverzii. To je presne prípad priamky KG a bodu M a LJ a N.

Využijeme teraz fakt, že pre pól P a jeho priemet P' na jeho poláru platí, že

$$|OP| \cdot |OP'| = r^2,$$

kde O a r sú stred a polomer kružnice, vzhľadom ku ktorej je polára určená. V našom prípade P, P' a O sú postupne I', S a I. Teda chceme dokázať, že

$$|I'I| \cdot |IS| = r^2 = |IE|^2 = |IF|^2.$$

To sa podobá na nejakú mocnosť bodu I k vhodnej kružnici, pre ktorú platí, že jedna z priamok IE alebo IF je k nej dotyčnicou. Teraz už len nájsť takúto kružnicu. Ľahko si z tetivovosti $AEIF$ vieme napísať nasledovnú rovnosť uhlov

$$|\sphericalangle UAE| = |\sphericalangle IAF| = |\sphericalangle IEF|,$$

[4] Ak si o polárach v živote nepočul, môžeš sa o nich dočítať napríklad v nasledovnom materiáli https://prase.cz/library/iKS-DvoupomeraPolaryPT/iKS-DvoupomeraPolaryPT.pdf

čo znamená, že podľa vety o úsekovom uhle je priamka IE dotyčnicou ku kružnici opísanej trojuholníku AUE. Mocnosť bodu I k tejto kružnici teda je

$$|IE|^2 = |IA| \cdot |IU| = \frac{1}{2} \cdot |II'| \cdot 2 \cdot |IS| = |I'I| \cdot |IS|,$$

čo je presne to, čo sme chceli teda dokázať. Teda os AI je polárou bodu I', teda body X a I' sú ten istý bod a z toho vieme, že $EXFI$ je kosoštvorec, čím je dôkaz hotový.