Riešenia 1. kola letnej časti

1.1 Kniežatstvo Metod Spravoval ($\kappa \leq 0$)

Zadanie. *A cisár Michal riekol: „Metod, si človek bystrý a vzdelaný, bež ta, niekde severne od Solúna, spravovať slovanské kniežatstvo.“ A Metod sa tam vybral. Za svojej vlády sa však stretol s množstvom zmätkov a chaosu a pochopil, že nechce svoju dušu zmáčať v tejto svetskej temnote. Preto pri prvej príležitosti zdúchol. Vybral sa do kláštora na Olympe, kde sa s vervou oddával mníšskym radostiam a štúdiu.*

Študoval napríklad 4-ciferné čísla $A = \overline{2X83}$, $B = \overline{19Y6}$, $C = \overline{29X6}$, $D = \overline{1Y54}$.[1] *Určte všetky dvojice cifier (X, Y) tak, aby čísla $A + B$ a $C - D$ boli obe deliteľné deviatimi.*

Riešenie. opravuje **Mišo M.** (michal.molnar@trojsten.sk)

Ako prvé si všimnime, že jednotlivé čísla si vieme napísať ako $A = 2083+100X$, $B = 1906+10Y$, $C = 2906+10X$, $D = 1054 + 100Y$. Takýto zápis nám zjednoduší prácu s X a Y. Čísla, ktoré majú byť násobkami 9 sú teraz v tvaroch

$$A + B = 3989 + 100X + 10Y,$$

$$C - D = 1852 + 10X - 100Y.$$

Ako máme teda zvoliť X a Y, aby sme dostali násobky 9? Keď sa pozrieme na zvyšky po delení, zistíme, že $A + B$ dáva zvyšok $2 + 100X + 10Y$, kým $C - D$ dáva $7 + 10X - 100Y$. Ďalšie zjednodušenie príde, keď si všimneme, že $100X = 99X+X$, takže $100X$ má zvyšok X po delení 9. Podobne zistíme aj, že $10Y$ má zvyšok Y ($10Y = 9Y+Y$), $10X$ má zvyšok X a $100Y$ má zvyšok Y. Tým dostaneme podmienku zo zadaniu upravenú do ekvivalentného tvaru, že $2 + X + Y$ a $7 + X - Y$ sú násobky 9.

Teraz vieme využiť, že X a Y sú cifry. V takom prípade je $2 + X + Y$ najmenej 2 a najviac 20, z čoho iba 9 a 18 sú násobky 9. Takže $X + Y = 7$ alebo $X + Y = 16$. Výraz $7 + X - Y$ je najmenej -2 a najviac 16, pričom násobky 9 sú len 0 a 9. Teda navyše musí platiť, že $X - Y = -7$ alebo $X - Y = 2$.

Ďalej máme dve možnosti, ako postupovať. V prvej vypočítame jednotlivé sústavy rovníc. Vieme, že buď $X = Y-7$ alebo $X = Y + 2$. Keď dosadíme prvú možnosť do rovníc pre $X + Y$ dostaneme $Y - 7 + Y = 7$, odkiaľ poľahky dopočítame $Y = 7$, takže $X = 7 - 7 = 0$. Z druhej rovnice pre $X + Y$ by sme dostali $Y - 7 + Y = 16$, odkiaľ nám vyjde $Y = 11{,}5$, čo nie je celé číslo. Naopak dosadením $X = Y + 2$ nám vyjde v prípade $X + Y = 7$, že $Y = 2{,}5$, čo nevyhovuje, v prípade $X + Y = 16$ dostaneme $Y = 7$ a teda $X = 9$.

Druhá možnosť postupu je všimnúť si, že ak sú čísla $2 + X + Y$ a $7 + X - Y$ násobky 9, tak je aj ich súčet násobkom 9. To znamená, že vyhovovať budú len tie X a Y, pre ktoré je

$$(2 + X + Y) + (7 + X - Y) = 9 + 2X$$

[1] $\overline{2X83}$ značí číslo zložené z cifier $2, X, 8, 3$ v danom poradí.

násobkom 9. Odtiaľ už ľahko vidíme, že $X = 0$ alebo $X = 9$. Z rovníc potom vypočítame už len $Y = 7 - X$ alebo $Y = 16 - X$. Pre $X = 0$ dostaneme buď $Y = 7$ alebo $Y = 16$, pre $X = 9$ dostaneme $Y = -2$ alebo $Y = 7$. V oboch prípadoch je cifra len 7, takže to bude náš Y. Mali by sme ešte overiť, že spĺňame rovnice pre rozdiel. Ľahko vidíme, že $0 - 7 = -7$ a $9 - 7 = 2$.

Odpoveď: Správne dvojice (X, Y) sú $(0, 7)$ a $(9, 7)$.

1.2 Krásavice Miestne Striehnu ($\kappa \leq 0$)

Zadanie. *Medzitým jeho mladší brat Konštantín (odvodené od slova konštanta) dostal príležitosť vybrať si svoju nastávajúcu. Miestne krásavice sa nachádzali vo veži. Konštantínovi však padla do oka jedna, na samom vrchu veže.*

Veža pokušenia má 4 poschodia. Prvé, druhé a tretie poschodie tvoria kocku $3 \times 3 \times 3$ tak, že sa každé poschodie je tvorené 9 miestnosťami. Štvrté poschodie je tvorené len jednou miestnosťou uprostred, v ktorej čaká Konštantínova vyvolená. Do políčok druhého a tretieho poschodia veže diabol umiestnil dokopy najviac 8 dievčin tak, že žiadne dve nie sú v rovnakej miestnosti a na druhom poschodí žiadne dve nie sú ani v stenou susediacich miestnostiach.[2] *Konštantín je na prvom poschodí a snaží sa dostať k svojej vyvolenej tak, aby nestretol inú dievčinu.*[3] *Konštantín sa vie pozrieť do ľubovolnej miestnosti, ktorá susedí* ***vrcholom***[4]*, hranou alebo stenou s miestnosťou, kde sa práve nachádza, čím zistí, či v danej miestnosti je dievčina. Avšak takéto pozretie ho stojí 1 drahocenný Elixír bystrozrakosti. Okrem toho sa Konštantín vie (zadarmo) presunúť do ľubovolnej miestnosti, do ktorej sa dokáže aj pozrieť. Koľko najmenej Elixírov bystrozrakosti si musí Konštantín zobrať, aby sa s určitosťou vedel vyhnúť všetkým dievčinám a šťastlivo sa dostal k svojej vyvolenej?*

Riešenie. opravuje **Mati** (matus.zelko@trojsten.sk)

Chceme ukázať 2 veci. Najprv chceme ukázať, že Konštantín potrebuje aspoň 9 elixírov bystrozrakosti a potom, že za použitia 9 elixírov sa už k svojej vyvolenej dostane.

Predpokladajme, že diabol rozmiestni všetky dievčiny do tretieho poschodia veže, to však Konštantín nevie. Nech si Konštantín zvolí ľubovoľnú stratégiu, musí vojsť do druhého poschodia. Ak si zvolí ľubovoľné políčko, musí použiť aspoň 1 elixír bystrozrakosti, lebo existuje rozdelenie dievčin, v ktorom na ňom je dievčina. Ďalej sa Konštantín bude musieť pozrieť do tretieho poschodia veže. Nech si zvolí ľubovoľné poradie políčok tretieho poschodia, existuje také rozdelenie dievčin, že bude musieť použiť 8 elixírov, kým zistí, že až na tom poslednom dievčina nie je. Potrebuje teda aspoň 9 elixírov.

Na 9 elixírov sa mu už podarí dostať k svojej vyvolenej. Najprv sa pozrie, za 1 elixír, do stredného políčka druhého poschodia.

1. Ak tam nie je dievčina, tak doň postúpi. Z tohoto políčka sa vie pozrieť na ľubovoľné políčko tretieho poschodia. Postupne sa na ne bude pozerať. V prípade, že do 8 pozretí narazí na políčko, kde nie je dievčina, tak naň môže postúpiť a z neho postúpiť na štvrté poschodie k svojej vyvolenej. V prípade, že sa pozrie 8-krát a vždy uvidí dievčinu, tak sa mu podarilo nájsť dievčiny všetky a s kľudom v srdci môže postúpiť na posledné políčko tretieho poschodia, na ktoré sa nepozrel. Z neho postúpi na štvrté poschodie. Stálo ho to maximálne 9 elixírov.

[2] V stropom susediacej miestnosti však dievčina byť môže.
[3] Teda aby nevstúpil do miestnosti, v ktorej je iná dievčina.
[4] Áno, naozaj aj vrcholom. Konštantín je zrejme bezrozmerný.

2. V prípade, že v strednom políčku druhého poschodia bola dievčina, tak vieme, že na 4 susedných políčkach nie je. Medzi týmito políčkami teda vieme voľne chodiť. Nemusíme na to už používať žiaden elixír. Tieto políčka nám umožňujú sa pozrieť na všetky políčka tretieho poschodia. Konštantín sa na ne bude v ľubovoľnom poradí pozerať. Pokiaĺ počas prvých 7 pozretí narazí na políčko bez dievčiny, tak naň postúpi a z neho potom na štvrté poschodie. Pokiaľ nie, tak s kľudom môže postúpiť na ľubovoľné z ostávajúcich dvoch políčok, dievčiny už videl všetky a teda ani na jednom byť nemôže. V tomto prípade mu stačí iba 8 elixírov a o posledný sa môže podeliť so svojou vyvolenou. Spolu môžu z veže pozorovať obláčiky.

1.3 Konštantínova Múdrosť – Sofia ($\kappa \leq 1$)

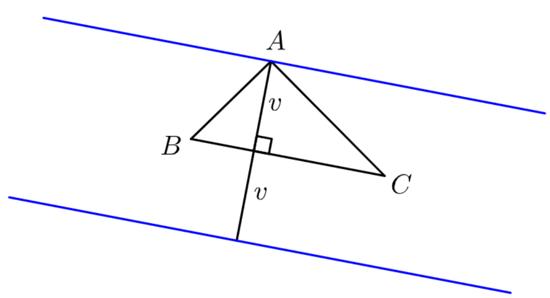
Zadanie. *Udýchaný Konštantín sa dostal na tretie poschodie, kde stretol svoju vyvolenú. „Aké jest meno tvoje, láska srdca môjho?“ opýtal sa Konštantín. Sofia povedala „Sofia, to jest múdrosť.“ Konštantín k nej natiahol ruku, nežne ju pohladil po tvári a pobozkal ju na pery. Vtom sa rozozvučal anjelsky chorál, Konštantína oslepilo nekonečné svetlo božskej žiary a v jeho rukách sa Sofia premenila na Knihu múdrosti. Konštantín pochopil toto božské znamenie. A tak sa pustil do štúdia Homéra, dialektiky, náuky filozofickej, rétoriky, aritmetiky, astronómie, muziky, astrológie, teológie, germanistiky, lingvistiky, indológie, práva, alchýmie, histológie, mechaniky, astrofyziky, botaniky, logopédie, fyziológie, politológie, kaligrafie, robotiky, kybernetiky, didaktiky, herectva, analýzy, aerodynamiky, akustiky, kognitívnej psychológie, genetiky, teatrológie, surdopédie, syntaxy, algebry, endokrinológie, futurológie, ikonografie, chirurgie, byzantológie, bohemistiky, sexuológie, slovakológie, ekológie, klimatológie, oológie, mineralógie, ekonómie, pedológie I., pedológie II., ufológie, ...*

... a geometrie. Majme všeobecný trojuholník ABC s plochou x. V každom kroku môžeme presunúť iba jeden bod (ostatné 2 ostávajú na svojom mieste) tak, že obsah trojuholníka sa nezmení. Vieme postupnosťou týchto krokov presunúť vrcholy nášho trojuholníka do ľubovolnej trojice bodov D, E, F takej, že obsah trojuholníka DEF je x?

Riešenie. opravuje **Filip** (filip.kotoc@trojsten.sk)

Povedzme, že chceme presunúť bod A do bodu D, B do E a C do F. Ukážeme si, že sa to dá.

Ako prvé sa zamyslime, čo za operáciu to môžeme v každom kroku spraviť. Povedzme, že v trojuholníku ABC chceme presunúť bod A. Kam ho vieme dostať? Známy vzorček na výpočet obsahu trojuholníka nám povie, že aby sa nezmenil obsah, nemôže sa zmeniť ani výška na stranu BC. Teda bod A vieme presunúť kamkoľvek na jednu z priamok rovnobežných s BC, ktoré sú rovnako vzdialené od BC ako bod A (na obrázku modrou).



Naše pozorovanie by sme teraz chceli využiť na to, aby sme (v niekoľkých krokoch) premiestnili bod A do bodu D. Ak je bod D rovnako vzdialený od BC ako bod A, tak je to jednoduché, stačí nám jedno presunutie. Ak to tak ale nie je, upravíme si najskôr vhodne stranu BC. Najjednoduchšie to asi bude spraviť tak, aby bola rovnobežná s priamkou AD. To môžeme zrealizovať napríklad tak, že bod B presunieme po rovnobežke s AC, aby platilo $BC \parallel AD$. Teraz už ľahko presunieme A na D.

Zamyslime sa ale ešte, či tento postup môže niekedy zlyhať. Zlyhal by iba ak by sme nevedeli B presunúť tak, aby $BC \parallel AD$. Rozmyslite si, že to nastáva práve vtedy, keď $AC \parallel AD$, čiže keď body A, C a D ležia na jednej priamke. V takom prípade najskôr presunieme bod A kamkoľvek mimo priamky CD. To určite vždy ide, keďže priamka AC (totožná s priamkou CD) je vždy rôznobežná s priamkou BC (lebo ABC je trojuholník). Následne už môžeme presunúť bod B.

Úspešne sme sa teda dostali do stavu, že bod A je v bode D a ideálne by sme ním už nechceli hýbať. Skúsme teraz presunúť B do E. Spravíme to veľmi podobne ako pri presúvaní A do D. Ak to ide hneď, super. Ak nie, najskôr sa uistíme, že bod B neleží na priamke AE (ak leží, tak ho presunieme inam) a potom presunieme bod C tak, aby platilo $AC \parallel BE$. Nakoniec presunieme B do E.

Máme teda $A = D$ a $B = E$, a keďže trojuholníky ABC a DEF majú rovnaký obsah, tak už určite vieme presunúť bod C do F.

1.4 Kresťania Majstrami Sveta ($\kappa \leq 2$)

Zadanie. *Roku* 860 *prišla za cisárom Michalom výprava Chazarov. Tí sa rozhodli toho roku usporiadať Majstrovstvá sveta v náboženstve. Michal mal teda vyslať Byzantskú reprezentáciu, ktorá by v Chersone vyzvala Židov a Saracénov na súboj vo viere. Michal teda poslal po vyučeného Konštantína Filozofa, aby s jeho bratom Metodom priniesli víťazstvo Byzancii a kresťanstvu. Tam v súboji rečníkov zúročil Konštantín vedomosti, ktoré nadobudol svojím štúdiom.*

Konštantín riekol: „Budiž n číslo kladné celé a nech $a(n)$ značí čísla n súčin ciferný.

1. *Najprv treba ukázati[5], že $a(n) \leq n$.*
2. *Potom treba riešenia rovnice $n^2 - 17n + 56 = a(n)$ nájditi.[6]"*

Riešenie. opravujú **Džavo** (adam.dzavoronok@trojsten.sk) a **Naťa** (natalia.cigasova@trojsten.sk)

Časť 1

Pri dokazovaní nerovností je vždy potrebné vhodne odhadnúť zdola či zhora jej aktérov. Zoberme si preto k-ciferné číslo $n = \overline{c_k \dots c_2 c_1}$. Jeho ciferný súčin je potom rovný $a(n) = c_k c_{k-1} \cdots c_2 c_1$. Keďže $c_1, c_2, \dots c_k$ sú cifry, tak vieme o nich, že sú nanajvýš rovné 9. Teda vieme zhora odhadnúť $a(n) \leq 9^k$. Nám sa avšak zíde trochu lepší odhad ciferného súčinu a to $a(n) \leq 9^{k-1} c_k$, lebo si vieme povšimnúť, že platí $n \geq 10^{k-1} c_k$ (zaokrúhlili sme číslo n, aby malo až na jednu cifru všetky ostatné 0), čím sme n odhadli zdola. Takýto odhad sa nám zíde, keďže triviálne platí pre kladné celé čísla k, že $10^{k-1} c_k \geq 9^{k-1} c_k$. Ak dáme všetky spomenuté odhady dokopy, dostávame

$$n \geq 10^{k-1} c_k \geq 9^{k-1} c_k \geq a(n),$$

čo je presne to, čo sme chceli dokázať.

[5] ukázať
[6] nájsť

Časť 2

Keďže ciferný súčin čísla nám veľa o hodnote samotného čísla nepovie (napr. $a(10003) < a(5)$) tak sa nám ponúka využiť odhad z časti 1, ktorý nám dá nerovnosť

$$n^2 - 17n + 56 = a(n) \leq n.$$

Túto nerovnosť si vieme ľahko nasledovne upraviť na súčinový tvar $n^2 - 18n + 56 = (n-4)(n-14) \leq 0$, z ktorého vidíme, že ju spĺňajú čísla z intervalu $\langle 4, 14 \rangle$. Keďže riešime nad kladnými celými číslami, stačí nám už len overiť, ktoré z kladných celých riešení nerovnosti je riešením aj pôvodnej rovnice. Urýchliť toto skúšanie nám pomôžu pozorovania, že pre jednociferné čísla od 4 po 9 je $a(n) = n$, čím získame rovnicu $n^2 - 17n + 56 = n$, ktorej vyhovujú práve 4 a 14, pričom práve 4 je jednociferné vo vyšetrovanom intervale. Pre skúmané dvojciferné čísla od 10 po 14 platí $a(n) = n - 10$ (ciferný súčin sa rovná cifre na mieste jednotiek, lebo cifra na mieste desiatok je 1), čo nám dá rovnicu $n^2 - 17n + 56 = n - 10$, ktorá avšak nemá celočíselné riešenie. Jediným riešením je $n = 4$.

1.5 Klamstva Moravu Sprostíme ($\kappa \leq 6$)

Zadanie. *Zakrátko knieža Rastislav vyslal za cisárom Michalom poslov so správou: „My Slovieni však sme ľud prostý a nemáme toho, kto by nás viedol k pravde a jej zmysel nám vyložil. Nuž, vznešený/-á pane/pani, pošlite takého muža/ženu (nehodiace sa preškrtnite), ktorý/-á nám zariadi všecku spravodlivosť.“ Cisár Michal povedal Konštantínovi, ktorý sa práve vrátil z Chersonu so zlatou medailou na krku: „Čuješ, filozof, čo vraví? Iný to nemôže vykonať, leda ty. Hľa, tu máš hojné dary, vezmi si svojho brata Metoda a bež. Vy obaja ste Solúňanci a Solúňanci všetci hovoria čisto slovansky.“*

Potom sa Konštantínovi zjavil Boh a riekol: „Budiž a a k celé kladné čísla také, že $a^2 + k$ deliace súčin $(a-1) \cdot a \cdot (a+1)$ jest. Dokážte, že $k \geq a$.“

Konštantín s Metodom sa neodvažovali oponovať ani Bohu, ani cisárovi a vybrali sa na Veľkú Moravu.

Riešenie. opravuje **Michal Staník** (michal.stanik@trojsten.sk)

Keď si roznásobíme uvedený súčin, vyjde z neho celkom pekný výraz $(a-1) \cdot a \cdot (a+1) = a^3 - a$. Ďalej sa chceme zbaviť vysokých mocnín, a keďže vieme, že $a^2 + k \mid a(a^2 + k) = a^3 + ak$, môžeme od seba pravé strany odčítať a ľavá strana bude stále deliť ich rozdiel. Máme tak

$$a^2 + k \mid a^3 + ak - (a^3 - a) = ak + a = a(k+1).$$

Na oboch stranách deliteľnosti máme zrejme kladné čísla. Keď jedno kladné číslo delí druhé, tak musí byť menšie alebo rovné (väčšie číslo nemôže deliť menšie)[7]. Preto máme

$$a^2 + k \leq ak + a,$$

$$a^2 - a \leq ak - k,$$

$$a(a-1) \leq k(a-1).$$

[7] Keby sme pripúšťali záporné čísla, vedeli by sme povedať, že absolútna hodnota prvého je menšia alebo rovná absolútnej hodnote druhého. Aj to len v prípade, že druhé číslo nie je nula, pretože nulu delí všetko.

Ak $a = 1$, tak dokazované tvrdenie $k \geq a$ plynie rovno z toho, že k je celé kladné číslo. V opačnom prípade $a > 2$ (tiež kladné celé), čiže môžeme vydeliť výrazom $(a-1)$ a nerovnosť sa zachová: $a \leq k$. Ale to už je presne to, čo sme chceli dokázať, a úloha je týmto hotová.

Iné riešenie

Ak $a = 1$, pre všetky prirodzené k platí $k \geq 1$, ako sme popísali vyššie. Ďalej nech $a \geq 2$ je ľubovoľné, ale ďalej pevné prirodzené číslo. Pre $k = a$ platí

$$\frac{(a-1)a(a+1)}{a^2+k} = \frac{(a-1)a(a+1)}{a^2+a} = \frac{(a-1)a(a+1)}{a(a+1)} = a-1.$$

Pre $k = -1$ (síce je mimo definičného oboru k zo zadania, ale vyhodnotiť výraz môžeme) platí

$$\frac{(a-1)a(a+1)}{a^2+k} = \frac{(a-1)a(a+1)}{a^2+(-1)} = \frac{(a-1)a(a+1)}{(a-1)(a+1)} = a.$$

Teda $a^2 + a$ aj $a^2 - 1$ sú delitele $(a-1)a(a+1)$ pre všetky $a \geq 2$.

Ak by mal byť $a^2 + k$ deliteľ výrazu $(a-1)a(a+1)$ pre nejaké $0 < k < a$, musel by byť podiel niekde medzi $a-1$ a a. Keďže delenec (čitateľ) máme pevný, tak podiel musí byť väčší ako pre $a^2 + a$ (delíme $a^2 + k$, čo je menšie číslo) a menší ako pre $a^2 - 1$ (delíme $a^2 + k$, čiže väčším číslom). V tomto intervale od $a-1$ do a však neleží žiadne celé číslo, a preto pre $0 < k < a$ nemôže $a^2 + k$ deliť $(a-1)a(a+1)$ bezo zvyšku.

1.6 Kodifikujeme Mluvu Slovanskú

Zadanie. *Cestou na Veľkú Moravu uvažoval Konštantín nad metodológiou edukácie teológie v reáliách slovanských. Ako erudovaný filozof po exorbitantnom elaborovaní prišiel na meritórnu ideu a riekol: „Čuj, Metod, Slovanom sa Božie slovo lepšie učiti bude, pokiaľ mu porozumäti schopní budú. Tož, pre jazyk slovanský, je potrebné písma vytvoriti, aby sme do jazyka ľudu slovo Božie mohli preložiti.“ A Metod odvetil: „OK.“*

Postup tvorby slovanského písma využíva rozpisovanie. Pod rozpísaním postupnosti rozumieme nasledovnú operáciu: Danú postupnosť prirodzených čísel $(a_1, \ldots, a_n)$ *nahradíme postupnosťou* $(1, 2, \ldots, a_1 - 1, a_1, 1, 2, \ldots, a_2 - 1, a_2, 1, 2, \ldots, a_3 - 1, a_3, \ldots, 1, 2, \ldots, a_n - 1, a_n)$*, teda každý prvok* p *nahradíme prvkami* $1, 2, \ldots, p$*. Konštantín si zobral postupnosť* $(1, 2, \ldots, 9)$ *a rozpísal ju* n*-krát. Teraz ho zaujíma vzhľadom na* n*, koľko čísel bude v postupnosti a koľko z nich sú jednotky. To mu umožní konštantovať, či už ide o písmo finálne.*

Riešenie. opravuje **Kubko** (poljovkaj@gmail.com)

V riešení tejto úlohy budeme využívať kombinácie a kombinačné čísla. Kombinačné číslo $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ nám hovorí, koľkými spôsobmi vieme vybrať k prvkov z n prvkov (napríklad koľkými spôsobmi si vieme z n žiakov vybrať k, ktorých pošleme na súťaž). Ak si sa s kombinačnými číslami ešte nestretol/la, odporúčam zhliadnuť nasledovné video[8].

Na úvod by som rozhodne odporučil, aby ste si rozmysleli, ako bude daná postupnosť vyzerať po jednom, prípadne dvoch rozpísaniach (čo nám pomôže vybudovať si základnú intuíciu ohľadom úlohy).

[8] https://www.youtube.com/watch?v=awhaF8pYIwo

Nazvime si postupnosť vzniknuvšiu po n rozpísaniach ako n-tú generáciu čísel. Zamyslime sa teraz spoločne nad pôvodom ľubovoľného čísla v n-tej generácii. Nech pre lepšiu názornosť je to napr. číslo 5.

Všimnime si, že číslo 5 vzniklo buď rozpísaním iného čísla 5 z predošlej generácie, alebo rozpísaním nejakého väčšieho čísla z predošlej generácie. Poďme sa ale lepšie zamyslieť nad celým „rodokmeňom".

Zoberme si nejaké číslo 5 z napr. 4. generácie. Ako mohla táto päťka vzniknúť? Uvedomme si, že táto päťka musí mať jednoznačne daný „rodokmeň", napríklad $8 \to 6 \to 6 \to 5 \to 5$. Tento zápis znamená, že naša päťka je potomkom osmičky z nultej generácie, ktorej potomkom v prvej generácii sa stala 6-ka, ktorej potomkom sa v druhej generácii stala opäť 6-ka, potomkom ktorej bola 5-ka, z ktorej vznikla v štvrtej generácii naša 5-ka. V štvrtej generácii budeme mať potom toľko pätiek, koľko rôznych rodokmeňov vieme vytvoriť.

Všimnime si, že tento rodokmeň je vždy nerastúci (čiže napríklad potomkom 3−ky už nikdy nebude 4, ani žiadne väčšie číslo).

A teraz na rad príde menší trik. Uvedomme si, že ľubovoľný rodokmeň vieme jednoznačne zakódovať pomocou binárneho kódu. Napr. rodokmeň $8 \to 6 \to 6 \to 5 \to 5$ vieme zakódovať ako 10110010. Cifry 0 v tomto kóde fungujú ako oddeľovač generácií. Cifry 1 fungujú ako pokles hodnoty v predošlej generácii. Počet jednotiek na začiatku nám teda v podstate iba určí, od akého čísla chceme v nultej generácii začať. Čiže v našom prípade v 0. generácii poklesneme jednotkou z 9 na 8, prejdeme nulou do 1. generácie, prostredníctvom dvoch jednotiek znížime hodnotu o 2 na 6, nulou prejdeme do ďalšej generácie, znova nulou prejdeme do ďalšej generácie…Pre lepšiu názornosť uvedieme zopár alternatívnych prípadov:

$$9 \to 8 \to 8 \to 6 \to 5 \Rightarrow 01001101,$$

$$7 \to 7 \to 7 \to 7 \to 5 \Rightarrow 11000011,$$

$$9 \to 8 \to 7 \to 6 \to 5 \Rightarrow 01010101.$$

Ako teda vyzerajú všetky kódy, ktorými vieme v štvrtej generácii získať číslo 5? Keďže z deviny musíme poklesnúť na päťku, v kóde potrebujeme 4 jednotky. No a keďže musíme prejsť z 0. generácie do 4., potrebujeme 4 jednotky. Každý kód obsahujúci 4 jednotky a 4 nuly potom jednoznačne určuje práve jednu päťku zo 4. generácie. A naopak, každej päťke v štvrtej generácii vieme priradiť práve jeden takýto kód.

Celkovo bude teda v štvrtej generácii toľko pätiek, koľko vieme takýchto kódov vytvoriť. Tieto kódy majú 8 pozícií a z nich si musíme vybrať 4 pozície, ktoré určíme ako 0 (zvyšné budú 1). To máme spolu $\binom{8}{4} = 70$ možností (čiže spolu 70 pätiek).

No a keď už máme predstavu, ako to celé funguje, stačí nám už iba naše úvahy zovšeobecniť. Druhá podotázka z úlohy sa nás pýta, koľko jednotiek budeme mať v n-tej generácii. A teraz sa skúste zamyslieť sami! Ako budú vyzerať kódy, ktoré budeme obdobným spôsobom priraďovať jednotkám v n-tej generácii? No dobre, ja vám to teda poviem…Tieto kódy musia pozostávať z 8 jednotiek (musíme poklesnúť z 9 na 1) a n núl (prechádzame medzi n generáciami).

A koľko takýchto kódov vieme vytvoriť? Každý kód má spolu $n + 8$ pozícií, pričom si potrebujeme vybrať 8, ktoré určíme ako jednotky (zvyšné budú nuly). Dohromady teda máme $\binom{n+8}{8}$ kódov.

Odpoveď: Po n rozpísaniach budeme mať $\binom{n+8}{8}$ jednotiek.

Joooj, a teraz musíme ešte pracne spočítať, koľko bude po n rozpísaniach všetkých čísel…Alebo nemusíme?! Ej veru, všimnime si, že z každého čísla v n-tej generácii vznikne v $(n+1)$-vej generácii práve jedna jednotka. Všetkých čísel po n rozpísaniach je teda presne toľko, koľko je jednotiek po $n+1$ rozpísaniach, čiže dokopy $\binom{n+1+8}{8} = \binom{n+9}{8}$ čísel.

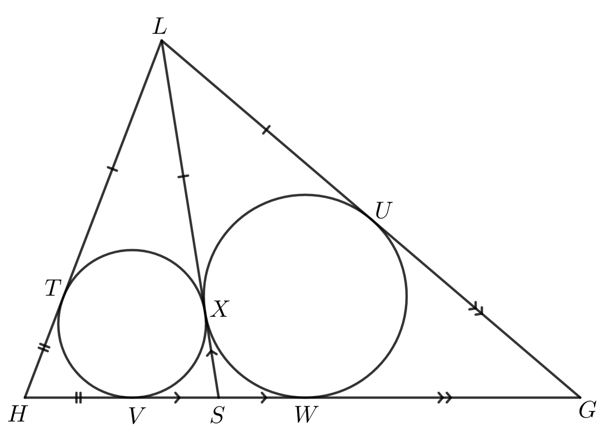
1.7 Kradnú Mi Staroslovienčinu

Zadanie. *Konštantín s Metodom na Veľkej Morave učili, učili, učili, až vyučili armádu učňov. Aby však mohli túto armádu použiť, museli ich nechať najprv vysvätiť. Vybrali sa teda do Ríma za pápežom Mikulášom I. Keď do Ríma dorazili, čakalo ich nepekné prekvapenie. Do cesty sa im postavili trojjazyčníci.*

Trojjazyčník je hrozná potvora s troma jazykmi, ktoré sú označené H, G, L[9] a tvoria trojuholník. Na strane HG sa nachádza bod S[10], pričom platí, že kružnice vpísané trojuholníkom HLS a GLS sa dotýkajú úsečky LS v rovnakom bode. Dokážte, že bod S je bodom dotyku vpísanej kružnice trojuholníka HGL so stranou HG.

Riešenie. opravuje **Lukáš** (lukas.gaborik@trojsten.sk)

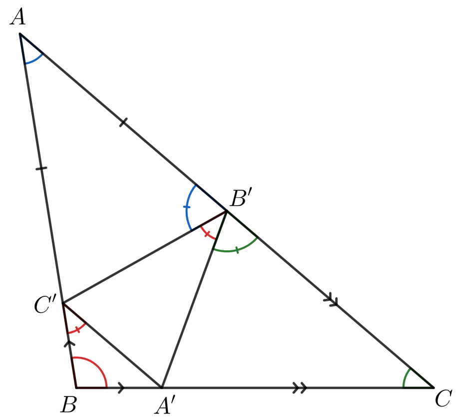
Označme dotykové body kružníc s trojuholníkmi ako na obrázku nižšie.



Pokiaľ z bodu vedieme dotyčnice ku kružnici, zo symetrie vyplýva, že vzdialenosť dotykových bodov od tohto bodu je rovnaká. Z toho máme, že $|HT| = |HV|$, $|LT| = |LX|$, $|LU| = |LX|$, $|GU| = |GW|$, $|SV| = |SX|$ a $|SW| = |SX|$.

Z predošlého odseku je zrejmé, že aby body A', B', C' ležiace postupne na stranách BC, CA, AB trojuholníka ABC mohli byť dotykovými bodmi kružnice vpísanej, musí platiť, že $|AB'| = |AC'|$, $|BA'| = |BC'|$ a $|CA'| = |CB'|$. Ukážeme však, že táto podmienka nie je iba nutná, ale aj postačujúca.

[9] hebrejčina, gréčtina a latinčina
[10] staroslovienčina

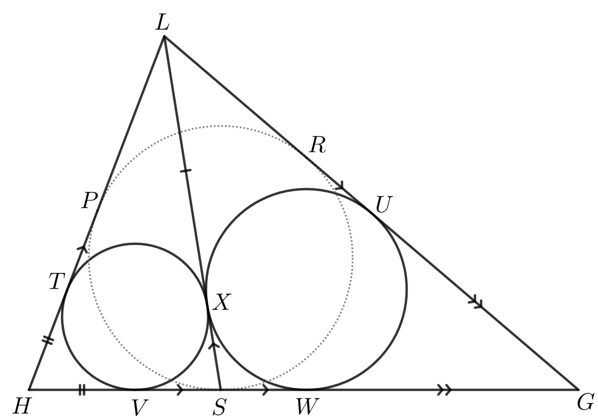


Uvažujme bežné označenie uhlov trojuholníka, čiže pri vrcholoch A, B, C sú postupne uhly α, β, γ. Zo súčtu uhlov v rovnoramennom trojuholníku $AB'C'$ máme, že $|\sphericalangle AB'C'| = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Analogicky vieme dostať aj $|\sphericalangle BC'A'| = 90° - \frac{\beta}{2}$ a $|\sphericalangle CB'A'| = 90° - \frac{\gamma}{2}$. Nakoniec vieme vďaka $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ dopočítať veľkosť uhla $\sphericalangle A'B'C'$ ako

$$180° - |\sphericalangle AB'C'| - |\sphericalangle CB'A'| = 180° - 90° + \frac{\alpha}{2} - 90° + \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{180° - \beta}{2} = 90° - \frac{\beta}{2}.$$

Z vety o obvodovom a úsekovom uhle preto vyplýva, že AB sa dotýka kružnici opísanej $A'B'C'$. Toto vieme analogicky urobiť aj pre zvyšné strany, čím sa presvedčíme, že A', B', C' sú dotykové body kružnice vpísanej trojuholníku ABC, keďže tá je jednoznačne určená.

Preto nám stačí zostrojiť na úsečkách HL, GL postupne body P, R také, že $|HP| = |HS|$ a $|GR| = |GS|$.



Ak pre ne platí aj $|LP| = |LR|$, sme hotoví. A naozaj,

$$|LP| = |LT| + |HT| - |HP| = |LU| + |HV| - |HS| = |LU| - |VS| =$$

$$= |LU| - |WS| = |LU| - |GS| + |GW| = |LU| + |GU| - |GR| = |LR|.$$

V skutočnosti však ešte treba overiť, že body P, R ležia vnútri úsečiek LH, LG, a teda, že $|HS| = |HP| < |HL|$. To však vyplýva z trojuholníkovej nerovnosti, ktorá hovorí, že

$$|LH| + |LG| > |HG|,$$

$$(|LT| + |TH|) + (|LU| + |UG|) > |HV| + |VS| + |SW| + |WG|,$$

$$|LT| + |HV| + |LT| + |WG| > |HV| + 2|VS| + |WG|,$$

$$|LT| > |VS|,$$

$$|LT| + |TH| > |HV| + |VS|,$$

$$|HL| > |HS|.$$

1.8 Koštantujeme Múdre Slová

Zadanie. *Nanešťastie, armáda učňov nebola ešte vysvätená, tak ju nemohli použiť proti trojjazyčníkom. Našťastie, Konštantín študoval geometriu, tak s nejakými trojuholníkmi si poradí. Potrebuje však, aby jeho argumenty padli na úrodnú pôdu.*

Konštantín mal pred rečníckym súbojom s trojjazyčníkmi podiel počtu úspešných argumentov a počtu všetkých argumentov (úspešnosť argumentov) menší ako p, kde $0 < p < 1$. Počas súboja použil niekoľko argumentov tak, že po ňom mal celkový podiel počtu úspešných argumentov a počtu všetkých argumentov (úspešnosť argumentov) väčšiu ako p. Pre ktoré reálne p musel mať nutne v nejakom momente súboja podiel počtu úspešných argumentov a počtu všetkých argumentov (úspešnosť argumentov) presne p?

Riešenie. opravuje **Baška** (barbora.javorova@trojsten.sk)

Konštantínova úspešnosť argumentov je v každom momente vždy v tvare $\frac{a}{b}$, kde a je celé nezáporné číslo, vyjadrujúce počet úspešných argumentov a b je celé kladné číslo, vyjadrujúce počet všetkých argumentov. Teda Konštantínova úspešnosť argumentov je vždy racionálna, čiže všetky iracionálne p sú nevyhovujúce.

Teraz sa pozrime na p v tvare $\frac{k}{l}$, kde k, l sú kladné celé nesúdeliteľné čísla. Keďže použitím niekoľkých argumentov sa Konštantín z úspešnosti menšej ako p dostal na hodnotu väčšiu ako p, vieme, že existuje aspoň jeden argument (zjavne úspešný), pred ktorým bola Konštantínova úspešnosť menšia alebo rovná p a po jeho použití bola jeho úspešnosť väčšia alebo rovná ako p. Môžeme to teda zapísať ako

$$\frac{a}{b} \leq \frac{k}{l} \leq \frac{a+1}{b+1}.$$

Ak sa pozrieme na jednotlivé nerovnosti samostatne, dostávame

$$\frac{a}{b} \leq \frac{k}{l}, \qquad \frac{k}{l} \leq \frac{a+1}{b+1},$$

$$al \leq bk, \qquad (b+1)k \leq (a+1)l,$$

$$al - ak \leq bk - ak, \qquad (b+1)k - (a+1)k \leq (a+1)l - (a+1)k,$$

$$a(l-k) \leq (b-a)k, \qquad (b-a)k \leq (a+1)(l-k).$$

Keď naše dve výsledné nerovnosti spojíme dohromady, dostávame

$$a(l-k) \leq (b-a)k \leq (a+1)(l-k).$$

Tu si môžeme všimnúť, že ak by $l - k = 1$, tak $a \cdot 1$ a $(a+1) \cdot 1$ sú dve po sebe idúce čísla. V jednej z nerovností musí teda nastávať rovnosť, keďže $(b-a)k$ je celé kladné, a teda sa nevie „zmestiť“ medzi dve po sebe idúce celé kladné čísla. Spätne to znamená, že Konštantínova pravdepodobnosť sa buď pred alebo po použití skúmaného argumentu presne rovnala p.

Teraz sa pozrime na prípad $l - k \neq 1$. V tomto prípade existuje $l - k - 1$ kladných celých čísel medzi číslami $a(l-k)$ a $(a+1)(l-k)$, teda určite platí nerovnosť

$$a(l-k) < a(l-k) + 1 < (a+1)(l-k).$$

Ak by platilo, že existujú nejaké a, b, pre ktoré by platila rovnosť $a(l-k) + 1 = (b-a)k$, tak potom existuje taká počiatočná úspešnosť argumentov, ktorá nikdy nenadobudne hodnotu p. Skúsme si teda túto rovnosť upraviť.

$$a(l-k) + 1 = (b-a)k,$$

$$al - ak + 1 = bk - ak,$$

$$bk - al = 1.$$

Keďže k a l sú nesúdeliteľné, z Bézoutovej rovnosti vyplýva, že existujú také celé čísla a_0 a b_0, ktoré spĺňajú danú rovnosť. Avšak a_0, b_0 nám nemusia vyjsť kladné. Ak si však a, b postupne nahradíme $a_0 + nk$, $b_0 + nl$ a n zvolíme dostatočne veľké, tak aby $a_0 + nk$ aj $b_0 + nl$ boli kladné, dostávame rovnosť

$$(b_0 + nl)k - (a_0 + nk)l = b_0k + nlk - a_0l - nlk = b_0k - a_0l = 1,$$

teda aj $a_0 + nk$ a $b_0 + nl$ spĺňajú rovnosť. Preto pre nejaké kladné celé a, b platí aj pôvodná rovnosť, keďže sme robili len ekvivalentné úpravy.

Teda Konštantínova úspešnosť argumentov musela niekedy nadobudnúť hodnotu p práve vtedy, keď $p = \frac{k}{k+1}$.

1.9 Kláštor Miesto Smrti

Zadanie. *Počas pobytu v Ríme sa Konštantínovi zjavil Boh a povedal: „Konštantín, verný služobník svetla si bol, no moja teta, Smrtka, sa už blíži. Je čas sa rozlúčiť so svätom svätským.“ Konštantín sa zľakol tejto správy. Bol to však fiškus, tak sa rozhodol, že sa skúsi pred Smrtkou ukryť. Vstúpil teda do kláštora, kde si nechal zmeniť meno na Cyril. V kláštore sa opäť venoval svojim duchovným radostiam, netušiac, že Smrtka sledovala jeho kroky.*

Konštantínove kroky tvoria postupnosť kladných racionálnych čísel $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ definovanú ako

$$a_{n+2} = \frac{a_n + 2024}{1 + a_{n+1}}$$

pre $n \geq 1$. Určte najmenšiu možnú hodnotu $a_1 + a_2$ tak, aby všetky členy postupnosti boli celočíselné.

Riešenie. opravuje **Štepi** (martin.stepanek@trojsten.sk)

Ukážeme si viacero rôznych riešení, lebo v každom je nejaká zaujímavá myšlienka iná od tých ostatných. Na začiatok predpokladajme, že všetky a_n sú celé čísla a poďme zistiť, aký najmenší môže byť súčet $a_1 + a_2$.

Riešenie cez algebru

Vyjadrime si pomocou zadania a_{n+3} a dosaďme hodnotu a_{n+2}:

$$a_{n+3} = \frac{a_{n+1} + 2024}{\frac{a_n+2024}{a_{n+1}+1} + 1} = \frac{(a_{n+1} + 1)(a_{n+1} + 2024)}{a_n + a_{n+1} + 2025} = a_{n+1} + 1 - \frac{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)}{a_n + a_{n+1} + 2025}.$$

Posledná úprava je celkom triková, ale vlastne robíme niečo podobné ako pri delení so zvyškom – chceme zlomok vyjadriť ako celé číslo plus nejaký zlomok s menším čitateľom. Keďže sme v prirodzených číslach, zlomok musí mať hodnotu aspoň 1, teda $a_{n+3} \leq a_{n+1}$.

Členy $a_2, a_4, a_6, \dots$ teda tvoria nerastúcu postupnosť, a keďže sme v prirodzených číslach, musí byť od nejakého bodu konštantná, teda ten zlomok musí mať od nejakého n hodnotu stále 1. Vtedy platí $(a_n + 1)(a_{n+1} + 1) = a_n + a_{n+1} + 2025$, čo vieme upraviť na $a_n a_{n+1} = 2024$.

Nás ale zaujímajú členy na začiatku, tak čo s tým? Keď už poznáme a_n a a_{n+1}, vieme si z nich vyjadriť

$$a_{n-1} = a_n a_{n+1} + a_{n+1} - 2024 = a_{n+1},$$

teda postupnosť celá vyzerá tak, že sa v nej striedajú a_1 a a_2.

Koľko najmenej teda môže byť $a_1 + a_2$? Buď rozpísaním si deliteľov 2024 alebo pomocou AG-nerovnosti ľahko zistíme, že najmenší súčet dostávame pri $a_1 = 44$ a $a_2 = 46$ (alebo naopak) a to 90, a máme aj konštrukciu.

Riešenie cez teóriu čísel

Keďže a_{n+2} má byť celé, musí $a_{n+1} + 1 \mid a_n + 2024$. Zároveň si ale vieme vyjadriť

$$a_{n+1} + 1 = \frac{a_{n-1} + 2024}{a_n + 1} + 1 = \frac{a_{n-1} + a_n + 2025}{a_n + 1},$$

teda platí $a_{n+1} + 1 \mid a_{n-1} + a_n + 2025$. Odčítaním týchto dvoch deliteľností dostaneme $a_{n+1} + 1 \mid a_{n-1} + 1$. Keďže sme v prirodzených číslach, deliteľnosť znamená nerovnosť, teda $a_{n+1} \leq a_{n-1}$.

Postupnosť $a_1, a_3, a_5, \ldots$ je teda nerastúca, preto je od nejakého bodu konštantná. Potom platí

$$a_n = a_{n+2} = \frac{a_n + 2024}{a_{n+1} + 1},$$

z čoho dostaneme $a_n a_{n+1} = 2024$. Potom už riešenie dokončíme rovnako ako to predchádzajúce.

Riešenie cez kombinatoriku

Dokážeme najprv, že postupnosť je ohraničená (zhora; zdola je to zrejmé, keďže sú to prirodzené čísla). Ak je v postupnosti ľubovoľný prvok $a_n > 2024$, potom a_{n+2} je najviac $\frac{a_n+2024}{1+1} < a_n$. Pre prvok $a_n \leq 2024$ analogicky platí $a_{n+2} \leq 2024$. Postupnosť teda vieme ohraničiť 2024 alebo prvým väčším prvkom na párnych alebo nepárnych indexoch.

V postupnosti teda môže byť len konečne veľa hodnôt, čiže aj konečne veľa rôznych po sebe idúcich dvojíc. Od nejakého bodu sa teda postupnosť začne opakovať. Navyše, keďže z dvoch členov vieme jednoznačne povedať predchádzajúci (zo zadania si vyjadríme a_n), musí sa začať opakovať od začiatku, inak by pred bodom, kde sa začne opakovať, boli dve rôzne hodnoty. Postupnosť teda tvorí jeden cyklus.

Preto od nejakého indexu t platí, že $a_1 = a_{t+1}, a_2 = a_{t+2}, \ldots$. Keďže postupnosť je cyklus, nezáleží, kde začíname, môžeme teda BUNV predpokladať, že pre nejaký cyklus si vyberieme taký začiatok a_1, a_2, aby ich súčet bol čo najmenší. Bude teda nanajvýš taký ako súčet $a_t + a_{t+1} = a_t + a_1$, teda $a_2 \leq a_t$. Zo zadania si vyjadríme

$$a_2 = \frac{a_t + 2024}{a_1 + 1} \geq \frac{a_2 + 2024}{a_1 + 1}.$$

Z toho potom dostaneme $a_1 a_2 \geq 2024$. Nás ale zaujíma súčet, použijeme teda AG-nerovnosť:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} \geq \sqrt{2024},$$

$$a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{2024}.$$

No a najbližšie väčšie celé číslo je $2\sqrt{2025} = 90$, konštrukciu spravíme rovnako ako v predošlých dvoch riešeniach.

1.10 Keď Metoda Stratíš

Zadanie. *Po úmornom rmútení za bratom sa Metod pobral späť na Veľkú Moravu. Jeho útrapám však nebolo konca. Cestou ho totiž zajali sily pekelné konajúce prostredníctvom tých najhorších z najhorších – Frankov. Tí priviazali Metoda k betónovému pražcu a išli sa zo svojho činu vyspovedať. Keď sa však vrátili, po Metodovi nebolo ani chýru, ani slychu. Ako ho tak hľadali, narazili na studňu, pri ktorej stáli dvaja mládenci. Jeden z Frankov sa ich pýta: „Hallo Jungen, nevideli ste tu takého alte pána Metoda?“ Mládenci odvetili: „No, pred chvíľou tu taký starší pán prebehol a skočil do studne.“ „Aber, to nemohol byť náš Metod, on bol priviazaný o betónový pražec.“*

Metodovi na dne studne neostávalo nič iné ako čakať na záchranu. Každý deň vyryl do kameňa inú postupnosť núl a jednotiek dĺžky 2023. Po n dňoch bol zachránený. Keď si zoberieme všetky podpostupnosti[11] *dĺžky 1012 všetkých postupností, ktoré Metod stihol za ten čas napísať, tak nedostaneme všetkých 2^{1012} binárnych postupností dĺžky 1012. Aké je najväčšie možné n?*

Riešenie. opravuje **Jakub Šošovička** (jakubsosovicka73@gmail.com)

Ako prvé môžeme pri takejto úlohe skúsiť hľadať konštrukciu. Teda si vyberme nejakú podpostupnosť dĺžky 1012 a skonštruujme čo najviac postupností, ktoré neobsahujú túto postupnosť. No a ktorú podpostupnosť skúsime ako prvú? Najprirodzenejšie je zobrať podpostupnosť zo samých jednotiek (resp. núl). Môžeme si všimnúť, že presne polovica postupností dĺžky 2023 obsahuje viac núl ako jednotiek, napríklad preto, že keď popárujeme binárnu postupnosť s jej inverzom, práve jedna z dvojice bude obsahovať aspoň 1012 jednotiek. Teda $n = 2^{2022}$ vyhovuje (uvažujeme všetky postupnosti s najviac 1011 jednotkami). Je to ale to najväčšie vyhovujúce n? Môžeme si to skúsiť na malých číslach a vidíme, že asi áno. Dokážeme, že to tak naozaj je.

Trikové riešenie (pravdepodobnostná metóda)

Sporom, ak by to tak nebolo, musela by existovať podpostupnosť S zapísaná ako $a_1a_2\ldots a_{1012}$, ktorá by nebola obsiahnutá vo viac ako polovici postupností. Poďme sa teraz zahrať takú hru. Hoďme si férovou mincou. Ak padne hlava, zapíšme jednotku, ak padne znak zapíšme nulu. Toto spravme postupne 2023-krát. Ak padne v prvom hode cifra a_1, dostaneme bod. V opačnom prípade nedostaneme bod. Vždy, keď dostaneme bod po padnutí cifry a_i, kde $i < 1012$, budeme chcieť v ďalších hodoch hodiť cifru a_{i+1} (za ňu dostaneme bod), až kým nedostaneme ďalší bod. Príklad: nech naša podpostupnosť je $1000\ldots$. Pokiaľ na minci hodíme postupne $01110\ldots$, body, ktoré postupne dostaneme, sú $0, 1, 0, 0, 1, \ldots$. Pokiaľ aj nazbierame všetkých 1012 bodov, pokračujme v hre ďalej (až do 2023 hodov), pričom dostaneme bod napríklad vždy práve vtedy, keď hodíme hlavu. Môžeme si všimnúť, že naša postupnosť obsahuje podpostupnosť S práve vtedy, keď sme nazbierali aspoň 1012 bodov. Aká je pravdepodobnosť, že sme nazbierali aspoň 1012 bodov? V každom hode sme mali na získanie bodu polovičnú pravdepodobnosť. Pravdepodobnosť, že sme viackrát získali bod ako nezískali je preto rovnaká ako pravdepodobnosť, že sme viackrát nezískali bod ako získali. Teda je to presne polovica. Pre náhodnú postupnosť máme teda polovičnú šancu, že obsahuje S. Preto presne polovica postupností obsahuje S. Z toho už vyplýva, že ak by bolo $n > 2^{2022}$, každá podpostupnosť S dĺžky 1012 by v nich bola obsiahnutá. Preto $n = 2^{2022}$.

Poznámka: Podobný postup sa dá spraviť aj bez pravdepodobnostnej metódy, a to nájdením bijekcie medzi postupnosťami, ktoré obsahujú viac jednotiek ako núl a postupnosťami obsahujúcimi S (použitím rovnakého princípu ako pri hádzaní mince).

Klasické riešenie (indukcia)

Indukujme. Uvažujme ľubovoľnú podpostupnosť S dĺžky k. Nech S' je S bez prvého bitu. Označme $P(S, n)$ počet postupností dĺžky n obsahujúcich podpostupnosť S. Pre $n \geq 2$ si môžeme rozmyslieť rekurentný vzťah $P(S, n) = P(S', n-1) + P(S, n-1)$. Pokiaľ je totiž prvý bit postupnosti zhodný s prvým bitom S, už nám stačí, aby postupnosť z ďalších $n-1$ cifier obsahovala S'. Ak sa prvý bit nezhoduje, potrebujeme, aby zvyšok obsahoval S. Teraz by sme z rekurencie mohli zrátať výraz všeobecne alebo odsledovať správanie, tipnúť a dokázať indukciou. Vyšlo by nám, že pre podpostupnosť S dlžky k platí $P(S, n) = \binom{n}{n} + \binom{n}{n-1} + \ldots + \binom{n}{k}$, z čoho by sme potom dorátali, že pri $(n, k) = (2023, 1012)$ je to polovica súčtu 2023-tieho riadku Pascalovho trojuholníka, teda 2^{2022}. To ale nemusíme

[11] Podpostupnosť vznikne poškrtaním niektorých prvkov pôvodnej postupnosti. Napríklad $\{2, 3, 5, 7\}$ je podpostupnosť postupnosti $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

robiť. Stačí indukciou dokázať, že $P(S,n) = P(T,n)$ pre všetky dvojice S, T dĺžky k. To zrejme platí pre $n = 1$. A z rekurencie $P(S,n) = P(S', n-1) + P(S, n-1)$ dostávame indukčný krok, keďže $P(S,n) = P(S', n-1) + P(S, n-1) = P(T', n-1) + P(T, n-1) = P(T, n)$. Preto pre každú podpostupnosť dĺžky 1012 je počet postupností dĺžky 2023 obsahujúcich danú podpostupnosť rovnaký. Pre podpostupnosť samých jednotiek sme už počet postupností zrátali, a je ich 2^{2022}. Preto $n > 2^{2022}$ nevyhovuje.

Každopádne, najväčšie n vyhovujúce zadaniu je $n = 2^{2022}$.