# Riešenia 2. kola letnej časti

## 2.1 Košiar Malamut Stráži ($\kappa \leq 0$)

**Zadanie.** *Milý denníček,*
*pamätáš sa na ten košiar, ktorý podával tú lahodnú jahňacinku... Ten sviniar Dunčo sa vrátil z dovolenky a hneď je to iná pesnička. Ani som sa usadiť nestihol a už ma hnal. Od hladu neviem ani zaspať. Skúšal som počítať ovečky, ale myslím, že to môj problém len zhoršilo.*

*Napočítal som $o$ oviec, $b$ baranov a $j$ jahniatok, pričom $o$, $b$, $j$ sú celé (možno aj záporné) čísla. Navyše platí, že $o^2 + b^2 + j^2 = 2bj + 1$ a tiež $2o + b + j = 2024$. Určte všetky možné trojice $(o, b, j)$, ku ktorým som sa mohol dopočítať.*

**Riešenie.** opravuje **Maťka** (martina.ganova@trojsten.sk)

Najskôr si skúsime upraviť prvú rovnicu zo zadania. Rýchlo si všimneme, že vieme využiť známy vzorec $(a + b)^2$.

$$o^2 + b^2 + j^2 = 2bj + 1,$$
$$o^2 + b^2 - 2bj + j^2 = 1,$$
$$o^2 + (b - j)^2 = 1.$$

Vieme, že čísla umocnené na párnu mocninu sú vždy nezáporné, a preto jediná možnosť ako získať súčet 1 z dvoch celých nezáporných čísel je, ak jedno z nich je 1 a druhé 0.
To nám dáva niekoľko možností, ktoré postupne budeme dosadzovať do druhej rovnice zo zadania.

- $o^2 = 1$ a $(b - j)^2 = 0$. To znamená, že $o = \pm 1$ a $b - j = 0$, t.j. $b = j$.
  - $o = 1$ a $b = j$. Dosadením do druhej rovnice zo zadania dostaneme

$$2o + b + j = 2024,$$
$$2 \cdot 1 + j + j = 2024,$$
$$2j = 2022,$$
$$j = 1011,$$
$$b = 1011.$$

Jedno riešenie bude teda $o = 1$, $j = 1011$ a $b = 1011$.

- $o = -1$ a $b = j$. Dosadíme do druhej rovnice zo zadania a dostávame

$$\begin{aligned} 2o + b + j &= 2024, \\ 2 \cdot (-1) + j + j &= 2024, \\ 2j &= 2026, \\ j &= 1013, \\ b &= 1013. \end{aligned}$$

Ďalšie riešenie bude teda $o = -1$, $j = 1013$ a $b = 1013$.

- $o^2 = 0$ a $(b - j)^2 = 1$ To znamená, že $o = 0$ a $b - j = \pm 1$. Druhú rovnicu si upravíme odčítaním $2j$ a pozrieme sa na paritu rovnice po dosadení známych hodnôt.

$$\begin{aligned} 2o + b + j &= 2024, \\ 2 \cdot 0 + b - j &= 2024 - 2j, \\ b - j &= 2024 - 2j, \\ \pm 1 &= 2(1012 - j). \end{aligned}$$

Vidíme, že ľavá strana rovnice má nepárnu hodnotu, zatiaľčo tá pravá má párnu hodnotu, a preto pre tento prípad neexistuje žiadne riešenie.

Táto úloha má 2 riešenia: $o = 1$, $j = 1011$, $b = 1011$ a $o = -1$, $j = 1013$, $b = 1013$.

## 2.2 Kozliatka Ma Spoznali ($\kappa \leq 0$)

**Zadanie.** *Milý denníček,*
*ako som sa tak ponevieral po lese, naďabil som na malú chalúpku, v ktorej bývajú šťavnaté kozliatka. Mama koza nebola doma, tak som sa rozhodol využiť situáciu. Zaklopal som na dvere a hovorím: „Kozliatka, kozliatka, otvorte mi vrátka. To som ja, vaša mamička.“ V duchu som bol na seba mimoriadne pyšný, že som s takým úskokom prišiel. Kozliatka však spoznali, že môj hlas neznie ako ich mamička, takže som nepochodil. Cestou lesom som však našiel katalóg miestnej kliniky, ktorá okrem iného ponúka úpravu hlasu.*

*Klinika ponúka štyri druhy operácie na zmenu hlasu. Každá operácia má n-miestny identifikačný kód zložený z* 0 *a* 1.[1] *Aby sa predišlo chybám, sú kódy urobené tak, že ak pacient pri diktovaní spraví nanajvýš jednu chybu (teda namiesto jednej* 0 *povie* 1 *alebo naopak), tak doktor vie jednoznačne určiť, ktorú operáciu mal pacient na mysli. Určte najmenšie n, pre ktoré môžu takéto identifikačné kódy existovať, a vysvetlite, prečo menšie n nevyhovuje.*

**Riešenie.** opravuje **Mimi** (matej.hanus@trojsten.sk)

Pre $n = 5$ existuje napríklad štvorica kódov 00000, 00111, 11011 a 11100. Overiť, že vyhovujú, môžeme vypísaním všetkých možností, ako sa možno pomýliť v jednej číslici. Zistíme, že takou chybou nemôžeme dostať z dvoch

[1] Kód môže začínať aj číslicou 0.

rôznych kódov (z našej štvorice) jedno päťčíslie. Menej pracne to možno overiť pozorovaním, že každé dva kódy sa líšia na aspoň troch pozíciách. To znamená, že päťčíslie, ktoré získame jednou chybou, sa bude od každého z ostatných kódov stále líšiť na aspoň dvoch pozíciách.

Keby boli kódy štvormiestne, v kóde by bolo možné spraviť chybu štyrmi rôznymi spôsobmi. To znamená, že pre každý druh operácie by sme museli uznávať päť rôznych štvorčíslí, ktoré by mohol pacient povedať – správny kód a štyri chybné. To je spolu $5 \cdot 4 = 20$ štvorčíslí s jednoznačnými významami, ale celkovo existuje iba $2^4 = 16$ štvorčíslí, takže sa medzi ne naše kódy nezmestia.

Ľahko si rozmyslíme, že kódy nemôžu byť ani kratšie. Keby existovali, mohli by sme ich predĺžiť na štvormiestne napríklad doplnením núl na koniec. Najmenšie použiteľné $n$ je teda 5.

## 2.3 Krása Melodického Sopránu ($\kappa \leq 1$)

**Zadanie.** *Milý denníček,*
*dnes som teda bol na tej operácii na zmenu hlasu. Z katalógu som si vybral „Hlas mamičky kozy".*

*Hlasivky majú tvar ostrouhlého trojuholníka. Kozliatka dokážu z hlasu určiť uhly tohoto trojuholníka, pričom vedia, že ich mama nemá ani pravouhlé, ani rovnoramenné hlasivky. Aby mali istotu, využívajú bezpečnostné číslo $b \geq 0$, ktorým sa riadia nasledovne:*

- *Ak sa niektoré dva uhly trojuholníka líšia o menej ako b stupňov, tak ho považujú za rovnoramenný.*
- *Ak sa niektorý uhol trojuholníka líši od pravého uhla o menej ako b stupňov, tak ho považujú za pravouhlý.*

*Určte, aké najväčšie môže byť b, aby existoval* ***ostrouhlý*** *trojuholník, ktorý nepovažujú ani za pravouhlý, ani za rovnoramenný.*

*Išlo to hladko, ale dnes sa musím šetriť, takže za kozliatkami pôjdem až zajtra.*

**Riešenie.** opravuje **Vašino** (samuel.vasko@trojsten.sk)

Skúsme sa na začiatok zamyslieť a „tipnúť" si riešenie. Keďže hľadaný trojuholník je ostrouhlý, všetky jeho uhly budú ostré. Zároveň priemerný uhol má 60°. Povedzme, že jeden z uhlov by mal 60°, potom by z ostatných dvoch bol jeden väčší ako 60° a druhý menší ako 60°. Zároveň však musia byť oba menšie ako 90°. Teda ten väčší má hodnotu niečo medzi 60° a 90°. Zoberme si teda ich priemer, čo je 75°. Uhly v tomto trojuholníku sú teda 45°, 60°, 75°. Z tohto vieme vyvodiť, že ak $b = 15$, tak taký trojuholník existuje.

Keďže hľadaný trojuholník je ostrouhlý, tak sú všetky jeho uhly ostré. Rovnako vieme, že najväčší uhol sa musí od líšiť aspoň o $b$ od pravého uhla, teda môže byť najviac $90° - b$. Rovnako sa druhý najväčší musí od prvého najväčšieho líšiť aspoň o $b$, čiže bude najviac $90° - 2b$. Analogicky tretí bude najviac $90° - 3b$. Súčet všetkých uhlov potom bude najviac $90° - b + 90° - 2b + 90° - 3b = 270° - 6b$. Máme teda, že $180° \leq 270° - 6b$. Po úprave dostávame $6b \leq 90°$ a následne $b \leq 15°$, teda $b$ vie byť najviac 15°.

## 2.4 Klamstvo Miesto Smrti ($\kappa \leq 2$)

**Zadanie.** *Milý denníček,*
*dnes som bol za tými kozliatkami, ale nedopadlo to bohvieako. Samozrejme, kozliatka mi otvorili vrátka, tak som ich všetky zhltol. Taký som bol plný, že som sa nevládal pohnúť. Preto ma načapala mama koza vo svojom vlastnom dome a ľahko si domyslela, čo sa stalo. Chcel som sa vyhnúť bitke, nuž som povedal: „Prepáčte mi, mama koza,*

*nevedel som, že sú vaše. Viete, ja som vegetarián, ja papám iba sirôtky." Uverila mi a všetko bolo odpustené, len som musel ísť na operáciu, aby mi kozliatka z brucha vytiahli.*

*V čakárni pred operáciou sme hrali s mamou kozou karty. Na nich boli celé čísla od 1 po $2k$ vrátane, pričom každá kartička mala práve jedno číslo a žiadne dve kartičky nemali rovnaké. S mamou kozou sme si ich náhodne rozdelili na polovicu a hrali sme nasledovne:*

- *Ja a mama koza sme sa striedali v ťahoch, pričom som začínal ja.*
- *Hráč na ťahu musí vyložiť jednu kartičku s číslom $m$ takú, že je $m$ menšie ako všetky alebo väčšie ako všetky ostatné už vyložené kartičky. (Ak nie je na stole žiadna karta, tak hráč môže vyložiť ľubovoľnú.)*
- *Ak hráč nemôže vyložiť na ťahu žiadnu kartičku, prehral. (Aj ak minul všetky svoje kartičky.)*

*Určte víťaznú stratégiu pre jedného z hráčov na základe začiatočného rozdelenia kariet.*

**Riešenie.** opravujú **Denys** (denys.andrukhovskyi@trojsten.sk) a **Lukáš** (lukas.gaborik@trojsten.sk)

Aby sa nám podarilo nájsť nejakú myšlienku pre riešenie, skúsime si vymyslieť jednoduchý príklad. Nech vlk má obidve kartičky 1 a $2k$. On teda môže zahrať v prvom ťahu 1, potom mama koza zahrá čokoľvek, a vlk zahrá $2k$ v druhom ťahu. Je očividné, že mama koza nevie zahrať kartičku menšiu ako 1 alebo väčšiu ako $2k$ – čiže prehrala. Analogicky, keď by mama koza mala túto dvojicu, tiež by vyhrala – vždy vie zahrať aj 1, aj $2k$, a vlk po jej ťahu nemôže vyložiť žiadnu kartičku.

Čiže aj intuitívne, aj s týmto príkladom nám môže prísť úvaha o tom, že okrajové kartičky sú „lepšie", a pritom dôležitou je nie kartička sama o sebe, ale pár kariet.

Poďme sa pozrieť ďalej. Čo keď ale každý hráč má len jednu kartičku z dvojice 1, $2k$? Skúsime si tiež vymyslieť príklad. Nech vlk má kartičky 1, 2, 5, a mama koza má zvyšné 3, 4, 6. Keď vlk v prvom ťahu zahrá 1, tak mama koza vie hneď zahrať 6 a vyhrá. Nech teda vlk vyloží 2. Potom máme 2 možnosti:

- Mama koza zahrá 3 alebo 4. Ďalej vlk zahrá 5, a mama koza už nebude môcť vyložiť zvyšnú kartičku z dvojice $(3, 4)$, lebo sa obe nachádzajú medzi 2 a 5. Mama koza preto môže vyložiť len 6. Vlk vyloží 1 a mama koza už nemôže nič dokladať.
- Mama koza hneď zahrá 6, teda vlk zahrá 1 a mama koza prehrá.

Čiže vlk vie vyhrať v tomto prípade bez ohľadu na to, čo zahrá mama koza. Analogicky, keď by kartičky boli vymenené, tak by aj mama koza mohla vyhrať skoro takisto (premyslite si to).

Takže, už máme niekoľko dôležitých myšlienok: symetrické dvojice kartičiek sú dôležité pre hráčov, pričom „lepšie" sú viac vzdialené od stredu. Okrem toho, ten, kto má nejakú takú dvojicu, vyhrá bez ohľadu na to, kto začína. Skúsime teraz tieto myšlienky zovšeobecniť, upresniť a dokázať.

Urobme dvojice kartičiek $(1, 2k), (2, 2k-1), \ldots, (k, k+1)$, ktoré ďalej budeme volať „pár". Skúsime vymyslieť a dokázať stratégiu pre toho hráča, ktorý má „najviac vzdialený pár" kartičiek, alebo, presne povedané, takú dvojicu $(i, 2k+1-i)$, že $1 \leq i \leq k$, a pre všetky $1 \leq j < i$ žiaden hráč nevlastni dvojicu kartičiek $(j, 2k+1-j)$. Budeme hovoriť, že pár $(j, 2k+1-j)$ je „viac vzdialený od stredu", keď $j < i$.

Začneme vlkom. Nech on má najviac vzdialený pár. Pomenujeme ho $(i, 2k+1-i)$, pričom nech $1 \leq i \leq k$. Teda vlk, aby vyhral, môže postupovať nasledovne: začne hru tým, že vyloží jednu kartičku zo svojho páru, nech to bude $i$. Ďalej sú 2 možnosti:

- Mama koza vyloží kartičku $j$ takú, že $i < j < (2k + 1 - i)$, čiže vnútri vlkovho páru. Vlk potom môže vyložiť $(2k + 1 - i)$, lebo $(2k + 1 - i) > j > i$, čiže je väčšia ako všetky ostatné už vyložené kartičky.
- Mama koza vyloží kartičku $m_1$ takú, že $m_1 < i$ alebo kartičku $m_2$ takú, že $(2k + 1 - i) < m_2$. V oboch prípadoch, keďže vieme, že vlk má najviac vzdialený pár, a všetky páry, čo sú viac vzdialené, sú rozdelené medzi hráčmi, tak vlk musí mať kartičku, ktorá dopĺňa $m_1$ alebo $m_2$ do páru, ktorú môže vyložiť.

V oboch prípadoch, po 2 ťahoch oboch hráčov vedia zahrať len tie kartičky, ktoré sú viac vzdialené od stredu ako $(i, 2k+1-i)$ (v prvom prípade sú to práve všetky také kartičky, a v druhom sú to kartičky, ktoré sú viac vzdialené od stredu ako $(m_1, 2k + 1 - m_1)$ alebo $(2k + 1 - m_2, m_2)$). Je to dôležité preto, lebo všetky také kartičky sú po pároch rozdelené, čiže práve jednu kartičku z každej takej dvojice má práve jeden hráč. To nám hovorí o tom, že na každý ťah mamy kozy vlk vie zahrať kartičku z toho istého páru, lebo keď mama koza zahrá kartičku $n$, ktorá je menšia ako všetky, tak $2k + 1 - n$ je väčšia, ako všetky. Naozaj, keď by to bolo inak, tak by existovala kartička $2k + 1 - n' > 2k + 1 - n$, teda $n' < n$, a z konštrukcie stratégie pre vlka by muselo vyplývať, že keď bola zahraná nejaká kartička, tak aj jej doplnok by musel byť zahraný. Teda mama koza by nemohla vyložiť $n$, lebo už by bola zahraná kartička $n' < n$. Analogický dôkaz vieme spraviť aj pre prípad, keď $n$ je väčšie, ako všetky ostatné kartičky.

Takže, vlk vždy vie „symetricky“ dokladať kartičky z toho istého páru, z ktorého zahrala kartičku mama koza. Vlk teda nikdy neprehrá, čiže vyhrá.

Analogicky vieme sformulovať postup pre mamu kozu, keď má najviac vzdialený pár $(i, 2k + 1 - i)$:

- Pokúsi sa vyložiť obidve kartičky zo svojho páru.
- Keď vlk vyloží kartičku $j$, že $j < i$ alebo $(2k + 1 - i) < j$, tak mama koza vyloží doplnok tej kartičky do páru.
- Potom, ak mama koza vyložila svoj pár, alebo jej v tom vlk zabránil a ona vyložila doplnok do ho kartičky, vedia už hrať len tie kartičky, ktoré sú viac vzdialené od stredu a sú rozdelené medzi hráčmi. Mama koza preto vždy vie vyložiť kartičku, ktorá je doplnkom do páru kartičky vlka. Vidíme preto, že mama koza vyhrá.

Zostalo nám prebrať ten prípad, keď nikto nemá najviac vzdialený pár. V tomto prípade platí skoro tá istá logika. Každý pár kartičiek je rozdelený medzi hráčmi, a teda na každý ťah vlka mama koza vie vyložiť kartičku, ktorá je z toho istého páru. V tomto prípade vyhrá mama koza.

Takže, keď niekto má najviac vzdialený pár, tak vyhrá bez ohľadu na to, kto začína. Ak nikto nemá najviac vzdialený pár, tak vyhrá mama koza.

### Iné riešenie

Ak má mama koza obe z kariet 1, $2k$, očividne môže každú z nich položiť v ktoromkoľvek ťahu. Zároveň, po tom, ako budú položené obe, zrejme už nie je možné uložiť žiadnu ďalšiu kartu. Znamená to, že mama koza ich vie uložiť v prvých dvoch svojich ťahoch bez ohľadu na to, či začína a následne vlk nevie ťahať, čím mama koza vyhrala. Analogickou argumentáciou v rovnakej situácii vyhrá aj vlk.

Zostáva teda prešetriť, čo sa deje vo zvyšnom prípade – a teda, keď každý z hráčov má práve jednu z kariet 1, $2k$. Nech bez ujmy na všeobecnosti mama koza má kartu 1 a vlk kartu $2k$. Pozrime sa teraz, koľko po sebe idúcich kariet od okraja majú u seba naši hráči. Povedzme, že mama koza má $a$ kariet $1, 2, \ldots, a$, avšak kartu $a + 1$ už nemá a vlk má $b$ kariet $2k, 2k - 1, \ldots, 2k - b + 1$, avšak kartu $2k - b$ už nemá. Je zrejmé, že obaja sú schopní tieto svoje okrajové karty zahrať bez ohľadu na to, čo bude robiť ich súper. Ostáva nám preskúmať, aké šance majú hrať karty zo stredu.

Každý z hráčov vie vo svojom prvom ťahu uložiť ktorúkoľvek kartu, lebo na to, aby niektoré karty nebolo možné vykladať, musia už byť vyložené aspoň dve karty. Znamená to, že vlk vie v prvom svojom ťahu uložiť kartu $2k - b$, v druhom kartu $a$ a následne už obaja môžu ukladať iba svoje okrajové karty. Tým vie vlk dosiahnuť, že mama koza bude schopná vyložiť najviac jednu kartu, ktorá nie je jej okrajová. Keďže vlk vyložil tiež jednu neokrajovú kartu, tak takouto stratégiou je schopný vyhrať za predpokladu, že vie vyložiť viac kariet ako mama koza, a teda $b + 1 > a + 1$, čo je ekvivalentné s $b > a$.

Podobná stratégia funguje aj pre mamu kozu. Vtedy môže vlk teoreticky vyložiť dve svoje neokrajové karty, kým mu to mama koza znemožní. Mama koza zároveň touto stratégiou dokáže vyložiť okrem okrajových kariet jednu neokrajovú. Uvedomme si však, že keďže nezačína, na výhru jej stačí vedieť vyložiť aspoň toľko kariet ako vlk, čo dáva podmienku $a + 1 \geq b + 2$, čo je v celých číslach opäť to isté ako $a > b$.

Mama koza teda vie vyhrať vždy, keď $a > b$. Naopak, vlk vie vyhrať vždy, keď $b > a$. Ostáva nám teda prešetriť prípad $a = b$.

Uvedomme si, že akonáhle niektorý z nich zahrá niektorú svoju okrajovú kartu, jeho súper môže zahrať tú svoju najbližšie k stredu (ak tak doteraz neurobil). Odteraz už teda vedia hrať len svoje okrajové karty. A nakoľko $a = b$, skôr sa ich zbaví ten, kto položil svoju okrajovú kartu ako prvý, a teda prehrá. Znamená to, že cieľom oboch hráčov je vyložiť svoju prvú okrajovú kartu neskôr ako súper. Vieme to interpretovať aj tak, že keďže ani jeden z nich nechce zahrať okrajovú kartu, tak akoby sme hrali bez nich. Potom totiž ten, kto nemôže vyložiť kartu, tak by síce mohol vyložiť niektorú svoju okrajovú kartu, no to vedie k tomu, že prehral. Vlk a mama koza teda hrajú s kartami $a + 1, a + 2, \ldots, 2k - a$. Keďže nezáleží na absolútnych hodnotách na kartičkách, iba na ich relatívnych veľkostiach, môžeme všetky hodnoty znížiť o $a$. Tým dostaneme, že hrajú s kartami $1, 2, \ldots, 2(k-a)$, čo je rovnaká úloha ako predtým, len s menším počtom kariet.

Túto úlohu teda vieme vyriešiť rekurzívnou myšlienkou. Je zrejmé, že postupným zjednodušovaním otázky niekedy dosiahneme prípad, kedy buď $a > b$ (a teda vyhrá mama koza), $a < b$ (a teda vyhrá vlk) alebo $a = b = k$. V opačnom prípade totiž stále môžeme úlohu postupom uvedeným vyššie zredukovať na jednoduchší prípad. Je zrejmé, že v prípade $a = b = k$ vyhrá ten hráč, ktorý nezačína, pretože obaja sú schopní vyložiť všetky svoje karty bez ohľadu na súpera.

Suma sumárum teda dostávame, že vyhrá ten, kto má väčší počet okrajových kariet, pričom v prípade rovnosti tieto odstránime a otázku sa opýtame znova v menšom prípade, kým nedostaneme odpoveď. Ak sa takto zbavíme všetkých kariet, vyhrá ten, čo nezačínal.

### Poznámky

Ako to, že sme sa dostali k dvom rôznym výsledkom? Ide totiž o to, že obe interpretácie sú ekvivalentné. Skúste si premyslieť, prečo.

Viacerým z vás v riešeniach chýbal poriadny popis, ako má hráč s víťaznou stratégiou hrať, aby zaručene vyhral. Toto je skoro vždy nevyhnutná súčasť riešenia a je to dobré napísať, aj keď táto stratégia z vašich ostatných úvah implicitne vyplýva.

## 2.5 Košík Ma Sýti ($\kappa \leq 6$)

**Zadanie.** *Milý denníček,*
*už piaty deň som nejedol. Dnes som stretol v lese také dievča v červenej čiapočke. Keď ma zbadala, vzala nohy na*

*ramená. Netušil som, že ľudia sú až takí ohybní. Za normálnych okolností by som ju aj tak zožral, ale po dvoch operáciách som sa na naháňačku úplne necítil. Našťastie, po dievčine zostal košík s jedlom a pohľadnicou.*

*Pohľadnica mala tvar lichobežníka $ABCD$ s priesečníkom uhlopriečok $E$, pričom platí $|BC| = |CD| = |DA|$. Bod $S$ je stred kružnice opísanej lichobežníku $ABCD$, bod $Q$ je stred kružnice opísanej trojuholníku $ABE$. Dokážte, že trojuholníky $DSC$ a $AQE$ sú podobné.*

*Z pohľadnice som sa dozvedel, že dievčina má babičku, ktorá býva sama. To by mohla byť ľahko uloviteľná potrava.*

**Riešenie.** opravujú **Baška** (barbora.novosadova@trojsten.sk) a **Andy** (martin.andricik@trojsten.sk)

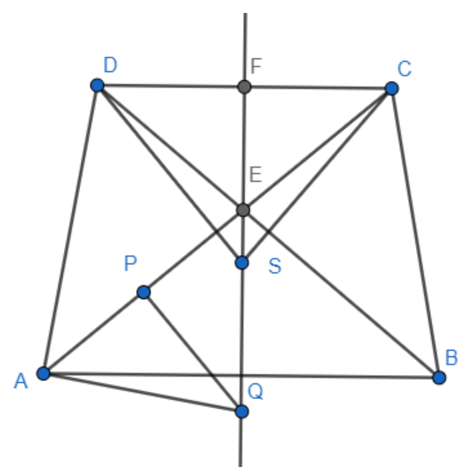
Ako to pri geometrii býva, je viac správnych dôkazov. Napríklad s využitím obvodových uhlov sa dá riešenie dosť skrátiť. My ukážeme, že sú to rovnoramenné trojuholníky s rovnakým uhlom oproti základni, teda podobné podľa vety $SUS$.

Keďže $Q$ je stred kružnice opísanej $ABE$, platí $QA = QE$. Podobne, $S$ je stred kružnice opísanej $ABCD$, teda $SC = SD$. Z toho zrejme platí $\frac{|QA|}{|SD|} = \frac{|QE|}{|SC|}$. Stačí už len ukázať $|\sphericalangle AQE| = |\sphericalangle DSC|$.

Keďže $ABCD$ je rovnoramenný, jeho základne majú spoločnú os. Z definície bodov $S$ a $Q$ ako stredov opísaných kružníc platí, že ležia na tejto osi. Trojuholníky $ABD$ a $BAC$ sú zhodné podľa $SUS$ ($|AD| = |BC|$, $AB$ je spoločná, $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BAD|$ sú zhodné uhly pri základni rovnoramenného lichobežníka). Preto sú zhodné aj uhly $BAC$ a $ABD$, čo znamená, že trojuholník $ABE$ je rovnoramenný, a teda aj bod $E$ leží na osi $AB$, teda aj na osi $CD$.

Označme $F$ stred strany $CD$. Keďže trojuholník $DSC$ je rovnoramenný, platí $|\sphericalangle DSF| = |\sphericalangle FSD|$. V trojuholníku $AQE$ je os uhla $AQE$ aj osou strany $AE$. Označme $P$ stred strany $AE$. Stačí nám potom ukázať, že $|\sphericalangle PQE| = |\sphericalangle FSD|$.

Bod $S$ je stred kružnice opísanej lichobežníku $ABCD$, teda aj trojuholníku $ADC$, leží teda na osi $AC$. Takže $DS$ je kolmá na $AC$. Priamka $PQ$ je os strany $AE$, takže aj $PQ$ je kolmá na $AC$, preto $PQ$ a $DS$ sú rovnobežné. Keďže body $F, S, E$ a $Q$ ležia na priamke, sú uhly $FSD$ a $EQP$ súhlasné, teda rovnaké. Z toho už vyplýva $|\sphericalangle DSC| = |\sphericalangle AQE|$.




## 2.6 Korisť Moju Sledujem

**Zadanie.** *Milý denníček,*
*ako sa ukázalo, babička „červenej čiapočky“ býva v paneláku, takže len jej adresa mi je nanič.*

*Babičkin panelák má prízemie a $n$ poschodí. Medzi poschodiami sa dá chodiť po schodisku. Babičke trvá prekonanie vzdialenosti medzi dvoma susednými poschodiami konštantne celočíselný počet $v \geq 1$ sekúnd a prechod zo schodiska do vlastného bytu opäť celočíselný počet $h \geq 1$ sekúnd. Ja však tieto konštanty nepoznám.*

*V košíku „červenej čiapočky“ však bol špeciálny ďalekohľad, ktorým môžem každú sekundu sledovať jedno konkrétne poschodie paneláku. Kvôli stenám a iným zábranám však ďalekohľadom nedovidím na schodisko – to znamená, že babičku uvidím na prízemí a potom až vtedy, keď sa na svojom poschodí poberie do svojho bytu.*

*Uvidel som babičku vojsť na schodisko. Vzhľadom na $n$ nájdite najmenšie možné $h$ také, že viem s istotou určiť, kde babička býva, bez ohľadu na hodnotu $v$.*

**Riešenie.** opravuje **Viktor** (viktor.balan@trojsten.sk)

Uvedomme si najprv, čo sa vlastne snaží vlk dosiahnuť. Snaží sa pozorovať poschodia tak, aby zaručil, že babičku niekedy uvidí. Potom bude vedieť, že na tom poschodí býva. Nemôže sa ale stať, že by zistil, kde babička býva, aj bez toho, aby ju priamo uvidel? Napríklad že bude pozorovať všetky poschodia až na jedno, a pokiaľ ju neuvidí, vie, že na tom jednom býva? Nie, pretože kým babičku neuvidí, nemôže si byť istý, že to nebude len tým, že babička ešte na poschodie nedorazila, a teda ľubovoľný tip, ktorý spraví, môže byť nesprávny...

Teraz teda poďme na odhad odpovede samotný: Ak nepoznáme hodnotu $v$, babička sa vie na poschodí číslo $k$ ukázať po ktoromkoľvek násobku $k$ sekúnd. Inak povedané, pre poschodie s číslom $k$ platí, že po uplynutí nejakého násobku $k$ sekúnd existuje také číslo $v$, že babička sa na tom poschodí teraz objaví. To znamená, že po uplynutí $n!$ sekúnd sa môže babička ukázať na ľubovoľnom poschodí, a až do tohto momentu nemusíme vôbec tušiť, kde sa nachádza. Predstavme si, že babička bude potom na chodbe menej ako $n$ sekúnd. V tomto prípade sa určite počas týchto menej než $n$ sekúnd nestihneme pozrieť na každé poschodie, a keďže babička môže byť na ktoromkoľvek, nemáme záruku, že ju uvidíme. Preto vlk stratégiu pre $h < n$ nemá.

Ukážme teraz, že stačí nech $h = n$, aby vlk vedel víťazstvo zaručiť. Naozaj jednoducho, stačí mu prejsť v priebehu $n$ sekúnd všetky poschodia, a toto opakovať, kým babičku neuvidí. Babička sa nikdy nestihne prešmyknúť, keďže na každé jedno poschodie sa vlk pozrie každú $n$-tú sekundu, a teda nikdy sa nenájde $n$ po sebe idúcich sekúnd, kedy vlk nejaké poschodie nevidí a babička by sa tam mohla vtedy objaviť bez povšimnutia. Preto vlk má stratégiu pre $h \geq n$.

## 2.7 Karkulkine Marinované Stehienka

**Zadanie.** *Milý denníček,*
*mám za sebou tretiu operáciu. A to som preukázal svoj um a prekabátil som aj „červenú čiapočku“, s ktorou som vôbec nerátal. To už som mal v sebe babičku, takže to bola hostina. Ale s horárom som si poradiť nedokázal, keďže tu nemohla o sirôtkach byť žiadna reč. Ale poviem Ti to radšej celé postupne.*

*Budem ti postupne rozprávať čísla. Začnem číslom $x_1 = 2$ a potom si každé ďalšie číslo spočítam z toho predošlého ako $x_{n+1} = \frac{2+x_n}{1-2x_n}$. Ak narazím na čísla 0 alebo $\frac{1}{2}$, skončím. Dokážte, že nikdy neskončím.*

**Riešenie.** opravuje **Mati** (matus.zelko@trojsten.sk)

Vzorové riešenie si požičalo postup od Mariána Kovaľa.

Namiesto postupnosti, ktorú nám ponúka zadanie, uvážme 2 postupnosti

$$a_{n+1} = a_n + 2 \cdot b_n,$$

$$b_{n+1} = b_n - 2 \cdot a_n$$

s počiatočnými členmi $a_0 = 2$ a $b_0 = 1$. Všimnime si, že členy týchto postupnosti sú celé čísla a spĺňajú, že ich podiely tvoria pôvodnú postupnosť. Skutočne, $x_0 = 2 = a_0/b_0$ a

$$x_{n+1} = \frac{2 + x_n}{1 - 2x_n} = \frac{2 + \frac{a_n}{b_n}}{1 - 2 \cdot \frac{a_n}{b_n}} = \frac{a_n + 2b_n}{b_n - 2a_n} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}.$$

Takže na to, aby sme v pôvodnej postupnosti niekedy dostali číslo $x_k = 1/2$, potrebujeme, aby pre nejaké $k \in \mathbb{N}$ platilo, že $2a_k = b_k$. Keďže ide o celé čísla, minimálne potrebujeme, aby $b_k$ bolo párne. Všimnime si, že $b_0 = 1$ je nepárne. Ďalej však od neho iba odrátavame $2a_n$, čo je párne číslo, a teda parita sa zachová. Pôvodná postupnosť teda nikde nedosiahne hodnotu 1/2.

Aby sme ukázali, že sa ani 0 v pôvodnej postupnosti nevyskytne, stačí ukázať, že $a_k$ nikdy nebude nula. Pozrime sa na zvyšky, ktoré dávajú členy postupnosti po delení piatimi. Keďže $a_0 = 2$ a $b_0 = 1$, tak by mohlo byť zaujímavé, ako sa menia zvyšky, ak platí

$$a_n \equiv 2 \pmod 5,$$

$$b_n \equiv 1 \pmod 5.$$

Potom dostávame

$$a_{n+1} \equiv a_n + 2b_n \equiv 2 + 2 \equiv 4 \pmod 5,$$

$$b_{n+1} \equiv b_n - 2a_n \equiv 1 - 4 \equiv 2 \pmod 5.$$

Ďalej,

$$a_{n+2} \equiv a_{n+1} + 2b_{n+1} \equiv 4 + 4 \equiv 3 \pmod 5,$$

$$b_{n+2} \equiv b_{n+1} - 2a_{n+1} \equiv 2 - 8 \equiv 4 \pmod 5.$$

Nevzdávame to a odhodlane počítame

$$a_{n+3} \equiv a_{n+2} + 2b_{n+2} \equiv 3 + 8 \equiv 1 \pmod 5,$$

$$b_{n+3} \equiv b_{n+2} - 2a_{n+2} \equiv 4 - 6 \equiv 3 \pmod 5.$$

Nakoniec,

$$a_{n+4} \equiv a_{n+3} + 2b_{n+3} \equiv 1 + 6 \equiv 2 \pmod 5,$$

$$b_{n+4} \equiv b_{n+3} - 2a_{n+3} \equiv 3 - 2 \equiv 1 \pmod 5.$$

Už sme spomínali, že $a_0 = 2$ a $b_0 = 1$. Z výpočtu uvedeného vyššie a indukcie je jasné, že hodnota $a_k$ nikdy nebude deliteľná piatimi, a teda nemôže byť 0, čo sme chceli ukázať.

## 2.8 Kameň, Moruša, Slama

**Zadanie.** *Milý denníček,*
*dnes som sa zobudil s chuťou na bravčovinu, i keď po týždni bez jedla by som zjedol aj sirôtky zo záhrady. Vydal som sa teda do Prasačiniec, aby som si pochutil. Hneď skraja dediny som videl slamený domček. Tak som doň fúkol, až po ňom nič neostalo. Ale domáceho nikde. Hneď vedľa stál druhý domček, tentoraz drevený. Tak som doň fúkol, až po ňom nič neostalo, ale domáceho opäť nikde.*

*Tretí dom bol z kameňa a popísaný číslami. Spredu vyzeral ako tabuľka $n \times n$, pričom $n \geq 3$. V každom políčku je vpísané číslo 1 alebo 2, pričom v každom obdĺžniku $2 \times 3$ alebo $3 \times 2$ je párny súčet. Vzhľadom na $n$ určte, koľkými spôsobmi mohla byť takáto tabuľka vyplnená.*

*Nech som fúkal, ako som fúkal, tento dom som nerozfúkal.*

**Riešenie.** opravuje **Štepi** (martin.stepanek@trojsten.sk)

Vyberme si nejaké vyplnenie prvých troch políčok prvého riadku a prvých dvoch políčok druhého riadku. Ukážeme, že teraz už vieme celý zvyšok tabuľky vyplniť práve jedným spôsobom.

Zaveďme si značenie, kde políčko $(x, y)$ bude v $x$-tom stĺpci a $y$-tom riadku. Políčko $(3, 2)$ vieme určiť jednoznačne z obdĺžnika od $(1, 1)$ po $(3, 2)$, čím ho celý vyplníme.

Z tohto obdĺžnika vieme ďalej jednoznačne určiť aj políčko $(1, 3)$: obdĺžnik od $(1, 2)$ do $(3, 3)$ nám určuje paritu riadku od $(1, 3)$ po $(3, 3)$ a obdĺžnik od $(2, 1)$ po $(3, 3)$ určuje paritu iba dvoch pravých políčok $(2, 3)$ a $(3, 3)$, z čoho už jednoznačne dostávame $(1, 3)$. Potom vieme zrejme doplniť aj políčko $(2, 3)$ a potom aj $(3, 3)$.

Takto si teda vieme zobrať vyplnený $2 \times 3$ obdĺžnik a jednoznačne ho rozšíriť na $3 \times 3$. Potom si môžeme zobrať ten dolný $2 \times 3$ obdĺžnik z nášho novovyplneného štvorca $3 \times 3$ a ten ďalej rozšíriť, a tak ďalej, čím vyplníme celé prvé tri stĺpce. Symetricky vieme takto vyplniť prvé tri riadky. No a potom už zrejme vieme vyplniť celú tabuľku.

Takto sme dokázali, že ak nejaké vyplnenie pre daných prvých 5 políčok existuje, tak je jednoznačné, ale musíme overiť, či také vyplnenie aj naozaj existuje (mohlo by sa stať, že takto získané vyplnenie v skutočnosti nie je platné).

Zostrojíme vyplnenie tabuľky pre prípady, keď je medzi prvými piatimi políčkami iba jedna jednotka a všetky ostatné sú dvojky. Vždy vyplníme ľavý horný $3 \times 3$ štvorec a ním vydláždime zvyšok tabuľky, stačí teda overiť, že vyhovujú súčty v obdĺžnikoch v tomto štvorci, vrátane tých „cez okraj“ (teda tretí a prvý riadok/stĺpec). Pre prehľadnosť namiesto dvojok budeme písať iba bodky.

$$\begin{array}{ccc} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & 1 & 1 \end{array}$$

Tabuľka so samými dvojkami tiež funguje. Ak chceme mať medzi prvými piatimi políčkami viac jednotiek, môžeme zobrať súčet (po prvkoch modulo 2) tých tabuliek, ktoré majú jednotky na príslušných miestach a dvojky na tých ostatných. Ak totiž nejaké dve tabuľky spĺňajú podmienku v zadaní, potom ju spĺňa aj takýto ich súčet.

## 2.9 Kruté Majetnícke Svine!!

**Zadanie.** *Milý denníček,*
*toľká to nespravodlivosť!! Nielenže som sa včera nenajedol, ale tie svine si pýtajú odškodnenie za ujmu na majetku! Tak som sa napajedil, že som sa vybral do toho kamenného domu, že ich zožeriem!! Keďže ma však nechceli vpustiť dnu vrátkami, vybral som sa komínom! Tešil som sa, ako s nimi vypečiem, ale nakoniec vypekali niečo oni!! Tak som sa spálil, že som rovno uháňal preč! Asi im budem musieť nakoniec zaplatiť!!*

*Majiteľovi slameného domu dlžím $p$ peňazí, majiteľovi dreveného domu dlžím $q$ peňazí a majiteľovi kamenného dlžím $r$ peňazí. Platí, že $p$, $q$, $r$ sú prvočísla spĺňajúce*

$$p!q!r! \mid (p+q)!!(p+r)!!(q+r)!!,$$

*pričom* $!!$ *označuje dvojitý faktoriál, teda* $0!! = 1!! = 1$ *a* $n!! = n(n-2)!!$. *Nájdite všetky také trojice prvočísel* $(p, q, r)$.

**Riešenie.** opravuje **Martin Kopčány** (martinkopcany001@gmail.com)

Všimnime si, že ak na oboch stranách výrazu vymeníme dve premenné a napríklad prepíšeme $p$ na $q$ a $q$ na $p$, nič sa na výraze nezmení a bude to stále rovnaký výraz. Bez ujmy na všeobecnosti si teda môžeme povedať, že $p \geq q \geq r$, lebo si ich vieme jednoducho prepísmenkovať, aby to platilo.

Úlohu si rozdelíme na niekoľko podprípadov, ktoré vyriešime zvlášť. Konkrétne to bude týchto päť:

- ak $p$, $q$, $r$ sú rovnaké nepárne prvočísla,
- ak $p$, $q$, $r$ sú nepárne prvočísla, pričom $p$ je ostro väčšie ako ostatné dve,
- ak $p$, $q$, $r$ sú nepárne prvočísla, pričom $p = q > r$,
- ak $r = 2$, a $p$ a $q$ sú nepárne prvočísla a
- ak $r = q = 2$.

Riešenia jednotlivých častí:

- Ak $p$, $q$, $r$ sú rovnaké nepárne prvočísla, tak na ľavej strane bude výraz $p!p!p!$ a na pravej strane bude $(2p)!!(2p)!!(2p)!!$. To si vieme rozpísať ako

$$\begin{aligned} &p!p!p! \mid (2p)!!(2p)!!(2p)!!,\\ &(p!)^3 \mid ((2p)(2p-2)(2p-4)\cdots 4\cdot 2)^3,\\ &(p!)^3 \mid (2\cdot(p)\cdot 2\cdot(p-1)\cdot 2\cdot(p-2)\cdots 2\cdot(2)\cdot 2\cdot(1))^3,\\ &(p!)^3 \mid (p!\cdot 2^p)^3. \end{aligned}$$

  To očividne platí. Tým pádom, ak sú $p$, $q$, $r$ rovnaké nepárne prvočísla, tak spĺňajú deliteľnosť v zadaní.

  Všimnime si, že ak je $x$ párne číslo, tak $x!! = \left(\frac{x}{2}\right)! \cdot 2^{\frac{x}{2}}$.

- Ak $p$, $q$, $r$ sú nepárne prvočísla, pričom $p$ je ostro väčšie ako ostatné dve. Potom každé z čísel $(p+q)$, $(q+r)$, $(p+r)$ je párne číslo, takže môžeme použiť pozorovanie z predošlej časti a zistíme, že

$$p!q!r! \mid (p+q)!!(p+r)!!(q+r)!!,$$

$$p!q!r! \;\mid\; \left(\frac{p+q}{2}\right)!\left(\frac{p+r}{2}\right)!\left(\frac{q+r}{2}\right)! \cdot 2^{\frac{p+q}{2}} \cdot 2^{\frac{p+r}{2}} \cdot 2^{\frac{q+r}{2}}.$$

Prvočíslo $p$ nemôže deliť žiaden z výrazov na pravej strane. Je to preto, že $p$ je najväčšie z troch prvočísel, a teda $p = \frac{p+p}{2} > \frac{p+q}{2} \geq \frac{p+r}{2} > \frac{q+r}{2}$. Tým pádom súčin na pravej strane nemôže obsahovať v prvočíselnom rozklade prvočíslo $p$, a teda takáto trojica čísel nemôže byť riešením.

- Ak $p$, $q$, $r$ sú nepárne prvočísla, pričom $p = q > r$, výraz si môžeme rozpísať ako

$$p!q!r! \mid (p+q)!!(p+r)!!(q+r)!!,$$

$$p!p!r! \mid (2p)!!(p+r)!!(p+r)!!,$$

$$p!p!r! \;\mid\; p!\left(\frac{p+r}{2}\right)!\left(\frac{p+r}{2}\right)! \cdot 2^{p} \cdot 2^{\frac{p+r}{2}} \cdot 2^{\frac{p+r}{2}}.$$

Teraz už má na ľavej strane prvočíslo $p$ násobnosť ($p$-*valuáciu*) rovnú dvom. Na pravej strane však delí výraz $p!$ len v prvej mocnine a zvyšné výrazy nedelí. Tým pádom nemôže výraz na ľavej strane deliť výraz na pravej strane.

- Ak $r = 2$, a $p$ a $q$ sú nepárne prvočísla, výraz upravíme na

$$p!q! \cdot 2 \mid (p+2)!!(q+2)!!(p+q)!!,$$

$$p!q! \cdot 2 \mid (p+2)!!(q+2)!!\left(\frac{p+q}{2}\right)! \cdot 2^{\frac{p+q}{2}}.$$

Jeden zo spôsobov ako dokázať, že ľavá strana delí pravú je, že ukážeme, že pravá strana deleno ľavá strana je celé číslo, pričom si uvedomíme, že $x! = x!! \cdot (x-1)!!$.

$$\frac{(p+2)!!(q+2)!!\left(\frac{p+q}{2}\right)! \cdot 2^{\frac{p+q}{2}}}{p!q! \cdot 2} = \frac{(p+2)!!(q+2)!!\left(\frac{p+q}{2}\right)! \cdot 2^{\frac{p+q}{2}}}{p!! \cdot (p-1)!! \cdot q!! \cdot (q-1)!! \cdot 2} = \frac{(p+2) \cdot (q+2) \cdot \left(\frac{p+q}{2}\right)! \cdot 2^{\frac{p+q}{2}}}{(p-1)!! \cdot (q-1)!! \cdot 2} =$$

$$= \frac{(p+2) \cdot (q+2) \cdot \left(\frac{p+q}{2}\right)! \cdot 2^{\frac{p+q}{2}}}{\left(\frac{p-1}{2}\right)! \cdot \left(\frac{q-1}{2}\right)! \cdot 2^{\frac{p-1}{2}} \cdot 2^{\frac{q-1}{2}} \cdot 2} = \frac{(p+2) \cdot (q+2) \cdot \left(\frac{p+q}{2}\right)!}{\left(\frac{p-1}{2}\right)! \cdot \left(\frac{q-1}{2}\right)!} =$$

$$= \frac{p+1}{2} \cdot (p+2) \cdot (q+2) \cdot \frac{\left(\frac{p+q}{2}\right)!}{\left(\frac{p+1}{2}\right)! \cdot \left(\frac{q-1}{2}\right)!} = \frac{(p+1)(p+2)(q+2)}{2} \cdot \binom{\frac{p+q}{2}}{\frac{p+1}{2}}.$$

Platí, že posledná zátvorka je kombinačné, číslo a teda tento výraz je celé číslo.

Tým pádom ak $p$, $q$ sú ľubovoľné nepárne prvočísla a $r = 2$, tak výraz naľavo vždy delí výraz napravo.

- Ak $r = q = 2$, opäť si rozpíšme výraz

$$p! \cdot 2 \cdot 2 \mid (p+2)!!(p+2)!! \cdot 4!!,$$
$$p! \mid (p+2)!!(p+2)!! \cdot 2.$$

  Súčiny $(p+2)!!$ a $(q+2)!!$ obsahujú len nepárne čísla a teda jediné párne číslo na pravej strane výrazu je 2. Z toho vyplýva, že číslo 4 nedelí pravú stranu a teda 4 nedelí ani ľavú stranu. Z toho vyplýva, že $p!$ je najviac 3!, lebo pre všetky vyššie faktoriály platí, že majú v sebe mocninu dvojky s násobnosťou aspoň 2. Tým pádom v tejto časti sú jediné vyhovujúce riešenia $p = 3, q = 2, r = 2$ a $p = 2, q = 2, r = 2$.

Toto sú teda všetky riešenia tejto deliteľnosti:

- $p = q = r$ sú prvočísla,
- jedno z prvočísel $p$, $q$, $r$ je 2 a zvyšné dve sú nepárne prvočísla,
- z prvočísel $p$, $q$, $r$ sú dve rovné 2 a tretie rovné 3.

Gratulujem všetkým, čo to dočítali až do konca a ako odmenu ponúkam video s mačičkami.

## 2.10 Konečne Mám Šťastie

**Zadanie.** *Milý denníček,*
*dnes za mnou prišiel exekútor, keďže som nemal dosť peňazí na zaplatenie dlhu. Normálne mi vošiel až do nory. Tak som ho zožral. Konečne viem, ako vyzerá šťastie.*

*Šťastie má tvar trojuholníka ABC so stredom opísanej kružnice O. Bod T je na výške na stranu AB taký, že* $|\sphericalangle TBA| = |\sphericalangle ACB|$. *Priamka CO pretína stranu AB v bode K. Dokážte, že os strany AB, výška na BC a úsečka KT sa pretínajú v jednom bode.*

**Riešenie.** opravuje **Miško P.** (michal.pecho@trojsten.sk)

*Vzorové riešenie tejto úlohy si môžeš pozrieť aj ako video na našom YouTube kanáli* `www.youtube.com/KorMatSem`.

Označme si $G$ priesečník priamky $BT$ s osou strany $AB$. Trojuholník $ABG$ je rovnoramenný, preto platí

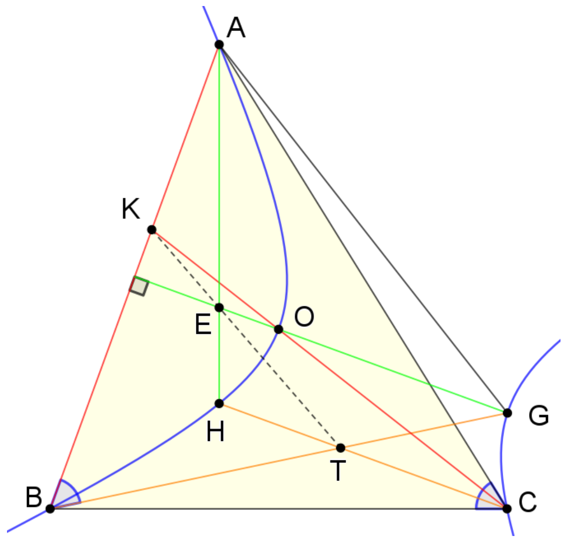
$$|\sphericalangle AGB| = 180^\circ - 2|\sphericalangle TBA| = 180^\circ - 2|\sphericalangle ACB| = 180^\circ - |\sphericalangle AOB|.$$

Keďže platí $OG \perp AB$ a zároveň $|\sphericalangle AGB| = 180^\circ - |\sphericalangle AOB|$, je $G$ ortocentrum trojuholníka $AOB$.

Nech $H$ je ortocentrum trojuholníka $ABC$. Označme $E$ priesečník výšky $AH$ s osou strany $AB$, teda priamkou $OG$. Stačí nám dokázať, že body $K$, $E$, $T$ ležia na priamke.

Uvažujme kužeľosečku $\mathcal{H}$ prechádzajúcu bodmi $A$, $B$, $C$, $H$, $O$. Táto kužeľosečka je zjavne hyperbolou. Platí, že hyperbola prechádzajúca bodmi $X$, $Y$, $Z$ je pravouhlá práve vtedy, keď na nej leží ortocentrum trojuholníka $XYZ$.[2] Keďže ortocentrum $H$ leží na $\mathcal{H}$ prechádzajúcej bodmi $A$, $B$, $C$, je táto hyperbola pravouhlá. To znamená, že na nej leží aj ortocentrum trojuholníka $AOB$, teda bod $G$.

[2] Ak nepoznáš, spoznaj tu `https://davidaltizio.web.illinois.edu/geom-conics.pdf` (Theorem 4.4).




Keďže body $A, H, C, O, G, B$ ležia na $\mathcal{H}$, môžeme použiť Pascalovu vetu[3] na šesťuholník $AHCOGB$ a tým dostávame, že $AH \cap OG = E$, $HC \cap GB = T$ a $CO \cap AB = K$ ležia na priamke, čo sme chceli dokázať.

## Poznámky

Žiadne z odovzdaných riešení nešlo podľa vzorového a ani jedno z nich nebolo syntetické.

[3] Ak nepoznáš, spoznaj tu https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal%27s_theorem.